Crochet de Gerstenhaber pour les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie de dimension finie

Rabih Bou Daher

N° D.U. 2819

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES
N°912

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité :
Mathématiques Fondamentales

Par **Rabih BOU DAHER**

Crochet de Gerstenhaber pour les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie de dimension finie

Soutenue publiquement le 27 juin 2017, devant la commission d'examen composée de :

Jury

M. Claude Cibils	Professeur	Rapporteur
M. François Dumas	Professeur	Examinateur
M. Christian Kassel	DR émérite du CNRS	Rapporteur
M. Thierry Lambre	Professeur	Directeur
Mme. Rachel Taillefer	Maître de conférences	Examinatrice
M. Alexander Zimmermann	Professeur	Examinateur

Remerciements

Il est le temps pour moi d'exprimer ma reconnaissance et ma gratitude envers mon directeur de thèse Thierry LAMBRE sans qui ce travail n'aurait pas eu lieu. Merci d'avoir répondu positivement à ma demande de stage de M2, de m'avoir fait découvrir les algèbres homologiques et de m'avoir encouragé à entamer cette thèse. Merci aussi pour votre disponibilité, votre gentillesse et votre confiance en moi, même lorsque j'en manquais moi-même.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Claude CIBILS, Christian KASSEL et Andrea SOLOTAR pour l'honneur qu'il me font en acceptant de rapporter cette thèse. De plus, je remercie sincérement François DUMAS, Rachel TAILLEFER et Alexander ZIMMERMANN d'avoir accepeté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie Julien BICHON qui m'a accepté en Master 2 recherche et qui a été toujours disponible pour m'aider avec toutes mes questions pendant ma première année à l'université Clermont Auvergne.

Je souhaite aussi à remercier l'ensemble des membres du laboratoire de mathématiques qui m'ont accueilli avec bienveillance. Je remercie toute l'équipe GAAO du laboratoire de mathématiques et tout le corps professoral de l'université Clermont Auvergne.

Je remercie également mes collèges François, Yacouba et Douha pour la bonne hummeur et la convivialité tout au long de ces années. Un merci plus particulier à mes amies Hoda et Layal qui ont rendu mes années à Clermont si agréables.

Tout particulièrement, je tiens à remercier mes parents pour leur amour, leur confiance et leur courage sans faille tout au long de la réalisiation de cette thèse.

Enfin, je remercie ma copine Melissa AYOUB qui m'a soutenu et qui continue de me soutenir par sa confiance, son soutien moral et son amour malgré la distance.

Crochet de Gerstenhaber pour les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie de dimension finie

Résumé

Dans cette thèse, nous décrivons explicitement la structure multiplicative et la structure d'algèbre de Lie graduée sur la cohomologie de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie de dimension finie.

Dans un premier temps, nous introduisons une structure multiplicative de la cohomologie de l'algèbre de Lie. Ensuite, nous montrons explicitement qu'il existe un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives entre l'algèbre de cohomologie de Hochschild de l'algèbre enveloppante munie du produit cup et l'algèbre de cohomologie de l'algèbre de Lie.

Dans un deuxième temps, nous introduisons une structure d'algèbre de Lie graduée sur la cohomologie de l'algèbre de Lie. Ensuite, nous montrons qu'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées entre l'algèbre de Lie de cohomologie de Hochschild de l'algèbre enveloppante munie du crochet de Gerstenhaber et l'algèbre de cohomologie de l'algèbre de Lie.

Enfin, nous décrivons complètement le crochet de Gerstenhaber sur la cohomologie de Hochschild de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie de dimension ≤ 3.

Mots clés

(Co)homologie de Hochschild, produit cup, produit cap, algèbre de Gerstenhaber, algèbre envelppante.

Gerstenhaber bracket for the enveloping algebras of finite-dimensional Lie algebras

Abstract

In this thesis, we explicitly describe the multiplicative structure and the graded Lie algebra structure of the cohomology of finite-dimensional Lie algebras.

In a first step, we introduce a multiplicative structure for the cohomology of Lie algebra. Then, we explicitly show that there exists an isomorphism of commutative graded algebras between the Hochschild cohomology algebra of the enveloping algebra provided with the cup product and the cohomology algebra of the Lie algebra.

In a second step, we introduce a graded Lie algebra structure for the cohomology of Lie algebra. Then, we show that there exists an isomorphism of graded Lie algebras between the Hochschild cohomology Lie algebra of the enveloping algebra provided with the Gerstenhaber bracket and the cohomology algebra of the Lie algebra.

Finally, we describe completely the Gerstenhaber bracket on the Hochschild cohomology of the enveloping algebra of a Lie algebra for dimension ≤ 3.

Keywords

Hochschild (co)homology, cup product, cap product, Gerstenhaber algebra, enveloping algebra.

Table des matières

Introduction

L'homologie de Hochschild et la cohomologie de Hochschild sont des théories homologiques et cohomologiques définies à l'origine pour les algèbres associatives, mais qui ont été généralisées à des catégories plus générales. Elles ont été introduites par Gerhard Hochschild en 1945 dans [13]. En 1963, dans [12], Gerstenhaber a introduit deux opérations sur les groupes de cohomologie de Hochschild $H^*(A, A)$: le produit cup

$$\cup : H^p(A, A) \otimes H^q(A, A) \longrightarrow H^{p+q}(A, A)$$

et le crochet

$$[\ ,\ ]_G : H^p(A, A) \otimes H^q(A, A) \longrightarrow H^{p+q-1}(A, A).$$

Il a montré que la cohomologie de Hochschild $H^*(A, A)$ de A munie du produit cup $\cup$ est une algèbre associative et commutative au sens gradué c'est-à-dire que si α et β sont des éléments homogènes de degrés respectifs p et q, on a

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{pq} \beta \cup \alpha.$$

Il a également démontré que $H^{*+1}(A, A)$ munie du crochet de Gerstenhaber $[\ ,\ ]_G$ a une structure d'algèbre de Lie graduée c'est-à-dire qu'on a

1. $[\alpha, \beta]_G = (-1)^{(p-1)(q-1)}[\beta, \alpha]_G$,
2. $(-1)^{(p-1)(r-1)}[[\alpha\, ,\, \beta]_G\, ,\, \gamma]_G + (-1)^{(p-1)(q-1)}[[\beta\, ,\, \gamma]_G\, ,\, \alpha]_G + (-1)^{(q-1)(r-1)}[[\gamma\, ,\, \alpha]_G\, ,\, \beta]_G = 0$

   où $\gamma \in H^r(A, A)$.

Deux conséquences résultent de cette structure :

1. $(H^1(A, A), [\ ,\ ]_G)$ est une algèbre de Lie.
2. $H^*(A, A)$ est un $H^1(A, A)$-module de Lie.

En identifiant $H^1(A,A)$ à $\mathrm{Der}(A,A)/\mathrm{Der}(\mathrm{Int}(A,A))$, le crochet de Gerstenhaber s'identifie au crochet des commutateurs des dérivations extérieures. De plus, pour $\alpha \in H^{p+1}(A,A)$, $[\alpha, -]_G$ est une dérivation de degré p de l'algèbre graduée commutative $(H^*(A,A), \cup)$, c'est-à-dire qu'on a la relation

$$[\alpha, \beta \cup \gamma]_G = [\alpha, \beta]_G \cup \gamma + (-1)^{(p+1)|\beta|}\beta \cup [\alpha, \gamma]_G.$$

En raison de la complexité des définitions, la compréhension des deux structures $\cup$ et $[\ ,\ ]_G$ reste difficile.

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique positive. Soit $\mathbb{K}[G]$ l'algèbre de groupe d'un groupe abélien fini. Dans [14], T. Holm a décrit complètement la structure multiplicative $\Big(H^*(\mathbb{K}[G], \mathbb{K}[G]), \cup\Big)$ de la cohomologie de l'algèbre de groupe $\mathbb{K}[G]$. A partir de ce résultat, Claude Cibils et Andrea Solotar ont prouvé directement dans [6] que l'algèbre de cohomologie de Hochschild de $\mathbb{K}[G]$ est isomorphe au produit tensoriel de l'algèbre de cohomologie habituelle $\Big(H^*(G, \mathbb{K}), \cup\Big)$ avec l'algèbre de groupe $\mathbb{K}[G]$. Dans [8, 9], K. Erdmann, T. Holm et N. Snashall ont calcule la cohomologie de Hochschild des algèbres autoinjectives de type de représentation fini de type A. En 2006, dans [11], J. Fan et Y. Xu ont montré que la structure multiplicative pour l'algèbre de Fibonacci sur un corps est triviale. En 2008, C.-H. Eu a calculé dans [10] celles des algèbres préprojectives.

Plusieurs résultats ont été obtenus concernant le crochet de Gerstenhaber. En 2001, dans [25], Strametz a étudié la structure d'algèbre de Lie du premier groupe de la cohomologie de Hochschild d'une algèbre monomiale de dimension finie en termes de la combinatoire du carquois, en caractéristique quelconque. Une de ses contributions a été de donner des conditions nécessaires et suffisantes aux données combinatoires des algèbres monomiales afin de garantir la semi-simplicité dans le premier groupe de cohomologie. De plus, elle a montré que dans ce cas, l'algèbre de Lie semi-simple obtenue est un produit direct de certaines algèbres de Lie de matrices de trace nulle. En 2006, dans [1], Bustamante a montré que la structure d'algèbre de Lie gradué de la cohomologie des algèbres de chaînes quadratiques triangulaires est triviale. En 2008, dans [22, 23], Sánchez-Flores a étudié la structure de module de Lie de la cohomologie des algèbres monomiales dont le carré du radical est nul. Pour de telles algèbres, dans [5], Claude Cibils a calculé les groupes de cohomologie en utilisant la combinatoire du carquois. En 2014, dans [27], la structure d'algèbre de Lie graduée de la cohomologie a été calculé explicitement pour les algèbres symétriques quantiques et leurs extensions.

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux algèbres enveloppantes de Sridharan $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie. Ces algèbres ont été introduites par

Sridharan dans [24]. Ces algèbres $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ sont des généralisations des algèbres enveloppantes usuelles car, pour $f=0$, on a $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Cartan et Eilenberg construisent dans ([2], p. 277) des isomorphismes d'espaces vectoriels entre la (co)homologie de Hochschild des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie et la (co)homologie de Lie d'algèbres de Lie :

$$\Phi^*_{\mathrm{CE}} : H^*(\mathcal{U}(\mathfrak{g}),\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \cong H^*_{Lie}(\mathfrak{g},\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}}) \text{ et } \Phi^{\mathrm{CE}}_* : H_*(\mathcal{U}(\mathfrak{g}),\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \cong H^{Lie}_*(\mathfrak{g},\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}}).$$

En homologie, cet isomorphisme a été décrit explicitement par Kassel ([15], corol. 5, p. 241-242).
Pour calculer la cohomologie de Hochschild des algèbres de Sridharan $H^*(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}),\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}))$, on remarque que $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ est un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module pour la représentation adjointe(3.2, p. 61), noté $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}}$.

Nous montrons qu'il existe une structure d'algèbres graduées commutatives

$$\left(H^*_{Lie}(\mathfrak{g},\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}})\,,\,\cup_{Lie}\right)$$

et que, de plus, on a un isomorphisme d'algèbre graduée commutative

$$\Phi^*_f : \left(H^*(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}),\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})),\cup\right) \cong \left(H^*_{Lie}(\mathfrak{g},\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}})\,,\,\cup_{Lie}\right)$$

où $\cup$ désigne le produit cup introduit par Cartan et Eilenberg ([2], p. 217) et par Gerstenhaber ([12], p. 278). Pour $f=0$, Φ^*_f est l'isomorphisme d'espaces vectoriels classique de Cartan-Eilenberg c-à-d. $\Phi^*_{f=0} = \Phi^*_{\mathrm{CE}}$.

L'homologie de Hochschild de $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ a été calculée par Kassel dans [15] à l'aide d'une petite résolution que nous utiliserons beaucoup. Dans [4], Chouhy et Solotar ont calculé la cohomologie de Hochschild en tant qu'espace vectoriel gradué pour $\mathfrak{g}$ de dimension 3.

Le but de cette thèse est d'écrire le produit cup et le crochet de Gerstenhaber de $H^*(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}),\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}))$ sur les cochaînes à partir de la «petite» résolution de Kassel de $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$. Deux outils sont nécessaires pour mener à bien ce projet.

Premier outil : en 1988, C. Kassel a construit une résolution

$$\cdots \to \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^p(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \xrightarrow{b'_p} \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^{p-1}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \to \dots$$

de $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ à partir de la résolution de Chevalley-Eilenberg aussi qu'un morphisme de comparaison

$$\varphi'_* : \left(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), b'_*\right) \to \left(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \overline{\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})}^{\otimes *} \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), b^{\mathrm{bar}}_*\right)$$

de source la résolution de Kassel à valeurs dans la résolution bar.

Deuxième outil : en 2016, dans [19], C. Negron et S. Witherspoon ont proposé une construction du crochet de Gerstenhaber à partir d'une résolution de l'algèbre qui n'est pas nécessairement la résolution bar. Cette construction nécessite l'expression des morphismes de comparaison entre ces deux résolutions.

L'étape la plus délicate reste la description du morphisme

$$\eta'_* : \left(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \overline{\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})}^{\otimes *} \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), b_*^{\text{bar}}\right) \to \left(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), b'_*\right)$$

de source la résolution bar à valeurs dans la petite résolution. Remarquons que, dans [21], S. Rivière a proposé une description topologique d'un morphisme de comparaison sur le corps des réels. Mais ce morphisme de comparaison, à notre connaissance, ne semble pas permettre de décrire explicitement les structures $\cup$ et $[\ ,\ ]_G$. Dans nos recherches, on a pu décrire explicitement ces structures à partir du morphisme de complexes construit au chapitre 2 de cette thèse.

Une partie importante de ce mémoire est consacrée au calcul d'une homotopie

$$t_* : \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^{*+1}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$$

pour la résolution de Kassel. Cette homotopie nous a conduit à décrire explicitement le morphisme de complexe

$$\eta'_* : \left(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \overline{\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})}^{\otimes *} \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), b_*^{\text{bar}}\right) \to \left(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), b'_*\right).$$

Ce morphisme est indispensable pour nous permettre d'écrire explicitement le produit cup $\cup$, le produit cap $\cap$ et le crochet de Gerstenhaber $[\ ,\ ]_G$ à partir de la petite «résolution de Kassel» sur les chaînes et les cochaînes.

Une autre partie importante de nos travaux est consacrée aux exemples. Nous décrivons le crochet de Gerstenhaber sur la cohomologie de Hochschild de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie de dimension ≤ 3. En particulier, pour l'algèbre de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$, nous détaillons complètement la structure d'algèbre de Lie graduée $\left(H^*(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h})), [\ ,\ ]_G\right)$ ainsi que $\left(H^*(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha), \mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)), [\ ,\ ]_G\right)$ où $\mathfrak{r}_\alpha$ est l'algèbre de Lie de dimension 3 de type α avec $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \notin \{-1\}$.

Ce manuscrit s'articule en six parties

1. *Chapitre 1* : on commence par rappeler les définitions de l'homologie de Hochschild, la cohomologie de Hochschild, le produit cup, le produit cap et le crochet de Gerstenhaber pour une $\mathbb{K}$-algèbre quelconque où $\mathbb{K}$ est un corps. Ensuite, on rappelle la définition d'une algèbre enveloppante de Sridharan d'une algèbre de Lie et nous introduisons la «petite» résolution de Kassel de $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$.

2. *Chapitre 2* : cette partie est essentiellement consacrée à l'écriture explicite d'une homotopie pour la résolution de Kassel. Cette homotopie nous permet d'introduire le morphisme de complexes de source la résolution bar à valeurs dans la «petite» résolution de Kassel.

3. *Chapitre 3* : cette partie décrit explicitement la structure du produit cup $\cup_{Lie}$ de l'algèbre $H^*_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}})$. On montre ensuite qu'il existe un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives

$$\Big(H^*(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})), \cup\Big) \cong \Big(H^*_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}}), \cup_{Lie}\Big)$$

   où la cohomologie de l'algèbre de Lie est calculée à coefficients dans la représentation adjointe $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}}$.

4. *Chapitre 4* : cette partie décrit explicitement le crochet de Gerstenhaber $[\ ,\ ]_\Lambda$ de l'algèbre de Lie graduée $H^{*+1}_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}})$.

5. *Chapitre 5* : cette partie décrit explicitement la structure du produit cap $\cap_{Lie}$ qui définie une action de $H^*_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}})$ sur $H^{Lie}_*(\mathfrak{g}, \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}})$. On montre qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^{Lie}_p(\mathfrak{g}, \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}}) \otimes H^q_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}}) \arrow[r, "\cap_{Lie}"] \arrow[d] & H^{Lie}_{p-q}(\mathfrak{g}, \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}}) \arrow[d] \\
H_p(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})) \otimes H^q(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})) \arrow[r, "\cap"] & H_{p-q}(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}))
\end{tikzcd}$$

   où les flèches verticales sont des isomorphismes.

6. *Chapitre 6* : nous décrivons complètement le crochet de Gerstenhaber sur la cohomologie de Hochschild de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}$ et de l'agèbre de type α $\mathfrak{r}_\alpha$. Nos calculs nous ont permis de décrire l'algèbre de Lie $\Big(H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h})), [\ ,\ ]_G\Big)$ en termes d'algèbres de Witt. Ce résultat peut également se retrouver en termes de dérivations via l'isomorphisme

$$H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h})) \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))/\mathrm{Der\ Int}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h})).$$

Chapitre 1

Rappels et notations

Ce chapitre préliminaire rassemble les outils nécessaires. On fixe $\mathbb{K}$ un corps. On note $\otimes$ le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{K}}$. Dans tout ce texte, A est une $\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire d'algèbre opposée A^{op}. On pose $A^e := A \otimes A^{\mathrm{op}}$. On note $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie n et de base $(x_1, \ldots, x_n)$.

1.1 Résolutions d'une $\mathbb{K}$-algèbre

Définition 1.1.1 ([26], p. 2)**.** *Un complexe de chaînes de A-modules est un couple (C_*, d_*) où C_* est un A-module gradué et où $d_* : C_* \to C_*$ est une application linéaire de degré -1, appelée différentielle telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $d_n \circ d_{n+1} = 0$.*

$$\ldots C_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \ldots$$

Définition 1.1.2 ([26], p. 3)**.** *Un complexe de cochaînes de A-modules est un couple (C_*, d_*) où C_* est un A-module gradué et où $d_* : C_* \to C_*$ est une application linéaire de degré $+1$, appelée différentielle telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $d_{n+1} \circ d_n = 0$.*

$$\ldots C_n \xrightarrow{d_n} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+3} \ldots$$

Définition 1.1.3 ([26], p. 2)**.** *Soient (C^1_*, d^1_*) et (C^2_*, d^2_*) deux complexes de (co)chaînes de*
A-modules. Un morphisme de complexes $f : (C^1_*, d^1_*) \to (C^2_*, d^2_*)$ est une application linéaire de degré 0 qui commute aux différentielles :

$$\begin{tikzcd} C_n^1 \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n^1"'] & C_n^2 \arrow[d, "d_n^2"] \\ C_{n-1}^1 \arrow[r, "f_{n-1}"'] & C_{n-1}^2 \end{tikzcd}$$

Définition 1.1.4 ([26], p. 3)**.** *Un morphisme de complexes de (co)chaînes de A-modules*
$f : C^1 \to C^2$ est appelé quasi-isomorphisme si l'application induite en (co)homologie est un isomorphisme.

Définition 1.1.5 ([2], p. 75)**.** *Soient Λ un anneau et M un Λ-module. Une Λ-résolution projective (resp. libre) du Λ-module M est une suite exacte de Λ-modules*

$$\dots \overset{d_{n+1}}{\to} P_n \overset{d_n}{\to} P_{n-1} \to \dots \to P_1 \overset{d_1}{\to} P_0 \overset{\varepsilon}{\to} M \to 0$$

dans laquelle tous les P_n sont des Λ-modules projectifs (resp. libres). L'application surjective ε s'appelle l'augmentation.

D'après ([18], p. 280 et [17], p. 12), le complexe $\left(\mathrm{Bar}_*(A), b_*^{\mathrm{bar}}\right)$

$$\dots \xrightarrow{b_{p+2}^{\mathrm{bar}}} \mathrm{Bar}_{p+1}(A) \xrightarrow{b_{p+1}^{\mathrm{bar}}} \mathrm{Bar}_p(A) \xrightarrow{b_p^{\mathrm{bar}}} \mathrm{Bar}_{p-1}(A) \xrightarrow{b_{p-1}^{\mathrm{bar}}} \dots$$

est défini par $\mathrm{Bar}_*(A) := A \otimes A^{\otimes *} \otimes A$ et où b^{bar} est définie pour $a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_p \otimes a_{p+1} \in \mathrm{Bar}_p(A)$ par

$$b_p^{\mathrm{bar}}(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_p \otimes a_{p+1}) = \sum_{\ell=0}^{p} (-1)^\ell a_0 \otimes \dots \otimes a_\ell a_{\ell+1} \otimes \dots \otimes a_{p+1}.$$

L'augmentation de ce complexe est la multiplication $\mu : A \otimes A \to A$ avec $\mu(a \otimes b) = ab$.

Proposition 1.1.6 ([18], p. 281 et [17], p. 12)**.** *Le complexe bar $\left(\mathrm{Bar}_*(A), b_*^{\mathrm{bar}}\right)$ est une A^e-résolution projective du A^e-module à gauche A appelée résolution bar.*

Posons $\overline{A} := A/\mathbb{K}$. D'après ([18], p. 282 et [17], p. 13), le complexe $\left(\overline{\mathrm{Bar}}_*(A), b_*^{\mathrm{bar}}\right)$

$$\dots \xrightarrow{b_{p+2}^{\mathrm{bar}}} \overline{\mathrm{Bar}}_{p+1}(A) \xrightarrow{b_{p+1}^{\mathrm{bar}}} \overline{\mathrm{Bar}}_p(A) \xrightarrow{b_p^{\mathrm{bar}}} \overline{\mathrm{Bar}}_{p-1}(A) \xrightarrow{b_{p-1}^{\mathrm{bar}}} \dots$$

est défini par $\overline{\mathrm{Bar}}_*(A) := A \otimes \overline{A}^{\otimes *} \otimes A$ et où b^{bar} est définie pour $a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_p \otimes a_{p+1} \in \overline{\mathrm{Bar}}_p(A)$ par

$$b_p^{\mathrm{bar}}(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \dots \otimes \overline{a_p} \otimes a_{p+1}) = \sum_{\ell=0}^{p} (-1)^\ell a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \dots \otimes \overline{a_\ell a_{\ell+1}} \otimes \dots \otimes \overline{a_p} \otimes a_{p+1}.$$

L'augmentation de ce complexe est la multiplication.

Proposition 1.1.7 ([18], p. 282 et [17], p. 13). *Le complexe* $\left(\overline{\mathrm{Bar}}_*(A), b_*^{\mathrm{bar}}\right)$ *est une résolution projective du* A^e*-module à gauche* A *appelé résolution bar normalisée. L'application*

$$\left(\mathrm{Bar}_*(A), b_*^{\mathrm{bar}}\right) \to \left(\overline{\mathrm{Bar}}_*(A), b_*^{\mathrm{bar}}\right)$$

induite par la projection $A \to \overline{A}$ *est un quasi-isomorphisme de complexes.*

1.2 Homologie et cohomologie de Hochschild

1.2.1 Homologie

Définition 1.2.1 ([17], p. 12). *L'homologie de Hochschild de* A *est définie par*

$$H_*(A, A) := \mathrm{Tor}_*^{A^e}(A, A).$$

On a donc $H_*(A, A) = H_*(A \otimes_{A^e} P_*, \mathrm{id} \otimes_{A^e} d_*)$ *où* (P_*, d_*) *est une* A^e*-résolution projective de* A*.*

Soit $\left(\mathrm{Bar}_*(A), b_*^{\mathrm{bar}}\right)$ la résolution bar introduite dans la section 1.1. Pour $p \in \mathbb{N}$, posons

$$C_p(A, A) := A \otimes_{A^e} \mathrm{Bar}_p(A)$$

et

$$C_p^{\mathbb{K}}(A, A) := A \otimes A^{\otimes p}.$$

L'isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $C_p(A, A) \cong C_p^{\mathbb{K}}(A, A)$ induit un isomorphisme de complexes

$$\left(C_p(A, A), \mathrm{id}_A \otimes_A b_p^{\mathrm{bar}}\right) \cong \left(C_p^{\mathbb{K}}(A, A), b_p\right)$$

où

$$b_p : C_p^{\mathbb{K}}(A, A) \to C_{p-1}^{\mathbb{K}}(A, A)$$

est donnée pour $a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \in A \otimes A^p$ par

$$\begin{aligned} b_p(a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p) &= aa_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_p \\ &+ \sum_{\ell=1}^{p-1} (-1)^\ell a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_\ell a_{\ell+1} \otimes \cdots \otimes a_p \\ &+ (-1)^p a_p a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p-1}. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.2 ([17], p. 9 et [18], p. 288)**.** *Pour tout entier $p \geq 0$, l'homologie de Hochschild est donnée par*

$$H_p(A, A) = H_p\Big(C_*^{\mathbb{K}}(A, A), b_*\Big).$$

Soit $\Big(\overline{\mathrm{Bar}}_*(A), b_*^{\mathrm{bar}}\Big)$ la résolution bar normalisée introduite dans la section 1.1. On a

$$H_p(A, A) = H_p\Big(A \otimes_{A^e} \overline{\mathrm{Bar}}_*(A), \mathrm{id}_A \otimes_{A^e} b_*^{\mathrm{bar}}\Big).$$

Posons

$$\overline{C}_p(A, A) := A \otimes_{A^e} \overline{\mathrm{Bar}}_p(A)$$

et

$$\overline{C}_p^{\mathbb{K}}(A, A) := A \otimes \overline{A}^{\otimes p}.$$

Le passage au quotient de $b_p : C_p^{\mathbb{K}}(A, A) \to C_{p-1}^{\mathbb{K}}(A, A)$ définit une différentielle toujours notée

$$b_p : \overline{C}_p^{\mathbb{K}}(A, A) \to \overline{C}_{p-1}^{\mathbb{K}}(A, A).$$

Corollaire 1.2.3. *Pour tout entier $p \geq 0$, on a*

$$H_p(A, A) = H_p\Big(\overline{C}_*^{\mathbb{K}}(A, A), b_*\Big).$$

1.2.2 Cohomologie

Définition 1.2.4 ([17], p. 41)**.** *La cohomologie de Hochschild de A est définie par*

$$H^*(A, A) := \mathrm{Ext}_{A^e}^*(A, A).$$

On a donc $H^*(A, A) = H^*(\mathrm{Hom}_{A^e}(P_*, A), (d_*)^t)$ où (P_*, d_*) est une A^e-résolution projective de A.

Posons

$$C^p(A, A) := \mathrm{Hom}_{A^e}(\mathrm{Bar}_p(A), A)$$

et

$$C_{\mathbb{K}}^p(A, A) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes p}, A).$$

L'isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $C^p(A, A) \cong C_{\mathbb{K}}^p(A, A)$ induit un isomorphisme de complexes

$$\Big(C^p(A, A), (b_p^{\mathrm{bar}})^t\Big) \cong \Big(C_{\mathbb{K}}^p(A, A), b^p\Big)$$

où

$$b^p : C^p_{\mathbb{K}}(A, A) \to C^{p+1}_{\mathbb{K}}(A, A)$$

est donnée pour $f \in C^p_{\mathbb{K}}(A, A)$ et $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p+1} \in A^{\otimes p+1}$ par

$$\begin{aligned} b(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p+1}) &= a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{p+1}) \\ &+ \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_\ell a_{\ell+1} \otimes \cdots \otimes a_{p+1}) \\ &+ (-1)^{p+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p) a_{p+1}. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.5 ([17], p. 37 et [18], p. 284)**.** *Pour $p \geq 0$ un entier, la cohomologie de Hochschild est donnée par*

$$H^p(A, A) := H^p(C^*_{\mathbb{K}}(A, A), b^*).$$

Posons

$$\overline{C}^p(A, A) := \mathrm{Hom}_{A^e}(\overline{\mathrm{Bar}}_p(A), A)$$

et

$$\overline{C}^p_{\mathbb{K}}(A, A) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\overline{A}^{\otimes p}, A).$$

Le passage au quotient de $b^p : C^p_{\mathbb{K}}(A, A) \to C^{p+1}_{\mathbb{K}}(A, A)$ définit une différentielle toujours notée

$$b^p : \overline{C}^p_{\mathbb{K}}(A, A) \to \overline{C}^{p+1}_{\mathbb{K}}(A, A).$$

Proposition 1.2.6. *Pour tout entier $p \geq 0$, on a*

$$H^p(A, A) = H^p(\overline{C}^*_{\mathbb{K}}(A, A), b^*).$$

1.3 Les produits cup et cap

1.3.1 Produit cup

Rappelons la définition du produit cup([12], p. 278 et [2], p. 217) :

$$\cup : H^p(A, A) \otimes H^q(A, A) \to H^{p+q}(A, A).$$

Ce produit cup est défini à partir de l'application également notée $\cup$

$$\overline{C}^p_{\mathbb{K}}(A, A) \otimes \overline{C}^q_{\mathbb{K}}(A, A) \xrightarrow{\cup} \overline{C}^{p+q}_{\mathbb{K}}(A, A).$$

Écrivons $\alpha \in H^p(A,A)$ et $\beta \in H^q(A,A)$ sous la forme $\alpha = \mathrm{cl}(f)$ et $\beta = \mathrm{cl}(g)$ où $f \in \overline{C}^p_{\mathbb{K}}(A,A)$ et $g \in \overline{C}^q_{\mathbb{K}}(A,A)$ sont des b-cocyles normalisés. On définit l'élément $f \cup g$ de $\overline{C}^{p+q}_{\mathbb{K}}(A,A)$ par la formule

$$(f \cup g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p+q}) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p) g(a_{p+1} \otimes \cdots \otimes a_{p+q}). \tag{1.3.1.1}$$

La formule

$$b(f \cup g) = b(f) \cup g + (-1)^p f \cup b(g) \tag{1.3.1.2}$$

montre que $f \cup g$ est un b-cocycle dès que f et g le sont. Ceci permet de définir $\alpha \cup \beta$ comme la classe de cohomologie du b-cocycle $f \cup g$.
M. Gerstenhaber a montré le résultat suivant.

Théorème 1.3.1 ([12], p. 281)**.** *Le produit cup munit $\Big(H^*(A,A), \cup\Big)$ d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre graduée commutative, c'est-à-dire que, pour $\alpha \in H^p(A,A)$ et $\beta \in H^q(A,A)$, on a la relation*

$$\alpha \cup \beta = (-1)^{pq} \beta \cup \alpha.$$

1.3.2 Produit cap

Le produit cap de Cartan et Eilenberg ([2], ch. 11 § 6)

$$\cap : H_p(A,A) \otimes H^q(A,A) \to H_{p-q}(A,A).$$

admet la description suivante à partir de l'application également notée $\cap$

$$\overline{C}^{\mathbb{K}}_p(A,A) \otimes \overline{C}^q_{\mathbb{K}}(A,A) \xrightarrow{\cap} \overline{C}^{\mathbb{K}}_{p-q}(A,A).$$

Écrivons $\omega \in H_p(A,A)$ sous la forme $\omega = \mathrm{cl}(z)$ où $z = a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \in \overline{C}^{\mathbb{K}}_p(A,A)$ est un p-cocycle normalisé. De même, écrivons $\alpha \in H^q(A,A)$ sous la forme $\alpha = \mathrm{cl}(f)$ où $f \in \overline{C}^q_{\mathbb{K}}(A,A)$ est un q-cocycle normalisé. On définit l'élément $z \cap f$ ([16], p. 449) de $\overline{C}^{\mathbb{K}}_{p-q}(A,A)$ par la formule

$$a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \cap f = a f(a_1 \otimes \ldots a_q) \otimes a_{q+1} \otimes \cdots \otimes a_p. \tag{1.3.2.1}$$

La formule

$$b(z) \cap f = z \cap b(f) + (-1)^p b(z \cap f) \tag{1.3.2.2}$$

montre que $z \cap f$ est un b-cycle dès que z et f le sont. Ceci permet définir $\omega \cap \alpha$ comme la classe d'homologie du b-cycle $z \cap f$.

1.4 Le crochet de Gerstenhaber

On définit le crochet de Gerstenhaber à partir de la résolution bar normalisée introduite dans 1.1. Pour $p \in \mathbb{N}$, on rappelle que

$$\overline{C}^p(A, A) = \mathrm{Hom}_{A^e}(\overline{\mathrm{Bar}}_p(A), A).$$

Soient $f \in \overline{C}^p(A, A)$ et $g \in \overline{C}^q(A, A)$. Pour $1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p+q-1} \otimes 1 \in \overline{\mathrm{Bar}}_{p+q-1}(A)$, l'application $f \circ_i g \in \overline{C}^{p+q-1}(A, A)$ est définie par M. Gerstenhaber([12], p. 279) par la formule

$$\begin{aligned}&(f \circ_i g)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p+q-1} \otimes 1) = \\ &\qquad f(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes g(1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+q-1} \otimes 1) \otimes a_{i+q} \otimes \cdots \otimes a_{p+q-1} \otimes 1).\end{aligned}$$

Posons

$$f \circ_G g := \sum_{i=1}^{p} (-1)^{(q-1)(i-1)} f \circ_i g.$$

On a $f \circ_G g \in \overline{C}^{p+q-1}(A, A)$.

Remarque 1.4.1. *On prendra garde que si f et g sont des p et q cocycles respectifs, $f \circ g$ n'est pas en général un $(p+q-1)$ cocycle.*

Suivant Gerstenhaber ([12], th. 1, p. 270), on définit le crochet, $[f\,,\,g]_G \in \overline{C}^{p+q-1}(A, A)$, par

$$[f\,,\,g]_G = f \circ_G g - (-1)^{(p-1)(q-1)} g \circ_G f. \tag{1.4.0.1}$$

Théorème 1.4.2 ([12], th. 3, p. 281)**.** *Si f est un p-cocycle de Hochschild et si g est un q-cocycle de Hochschild, le crochet $[f\,,\,g]_G$ est un $(p+q-1)$ cocycle de Hochschild.*

Théorème 1.4.3 ([12], th. 1, p. 270)**.** *Soit $\mathcal{L}(A) = H^*(A, A)[1]$, c'est-à-dire $\mathcal{L}^p(A) = H^{p+1}(A, A)$ pour tout entier p. L'application*

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{L}^p(A) \otimes \mathcal{L}^q(A) & \to & \mathcal{L}^{p+q}(A) \\ \mathrm{cl}(f) \otimes \mathrm{cl}(g) & \mapsto & \mathrm{cl}([f\,,\,g]_G)\end{array}$$

munit $\mathcal{L}(A)$ d'une structure d'algèbre de Lie graduée, c'est-à-dire qu'en posant $\alpha = \mathrm{cl}(f)$, $\beta = \mathrm{cl}(g)$ et $[\alpha\,,\,\beta]_G = \mathrm{cl}([f\,,\,g]_G)$, on a

$$[\alpha\,,\,\beta]_G = (-1)^{pq}[\beta\,,\,\alpha]_G.$$

Pour $\gamma \in \mathcal{L}^r(A)$, on a

$$(-1)^{pr}[[\alpha\,,\,\beta]_G\,,\,\gamma]_G + (-1)^{pq}[[\beta\,,\,\gamma]_G\,,\,\alpha]_G + (-1)^{qr}[[\gamma\,,\,\alpha]_G\,,\,\beta]_G = 0.$$

Théorème 1.4.4 ([12], corol. 2, p. 286-287)**.** *Pour tout $\alpha \in \mathcal{L}^p(A)$, $\beta \in \mathcal{L}^q(A)$ et $\gamma \in \mathcal{L}^r(A)$, le crochet $[\alpha\,,\,-]_G$ est une dérivation graduée de degré $p+1$ de l'algèbre graduée $\Big(H^*(A,A),\cup\Big)$, c'est-à-dire*

$$[\alpha\cup\beta\,,\,\gamma]_G=[\alpha\,,\,\gamma]_G\cup\beta+(-1)^{(p+1)r}\alpha\cup[\beta\,,\,\gamma]_G.$$

1.5 Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

Pour cette section, on se refère à [7]. On appelle algèbre de Lie, un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire $(x,y)\to[x,y]$ de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout x de $\mathfrak{g}$, on a $[x,x]=0$.
2. Pour tous x,y et z dans $\mathfrak{g}$, on a $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$.

Le produit $[x,y]$ est appelé crochet de Lie.
Dans ce texte, on ne considère que les algèbres de Lie de dimension finie.

Soit $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ la $\mathbb{K}$-algèbre tensorielle de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$. Rappelons que $\mathrm{T}(\mathfrak{g})=\oplus_{i\geq 0}\mathrm{T}^i(\mathfrak{g})$ avec $\mathrm{T}^i(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}^{\otimes i}$ pour $i>0$ et $\mathrm{T}^0(\mathfrak{g})=\mathbb{K}$. Le produit dans $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ est la concaténation. Soit J l'idéal bilatère de $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments

$$\{x\otimes y-y\otimes x-[x,y]\,|\,x\in\mathfrak{g},\,y\in\mathfrak{g}\}.$$

L'algèbre associative $\mathrm{T}(\mathfrak{g})/J$ s'appelle l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On la note $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

On a $\mathfrak{g}=\mathrm{T}^1(\mathfrak{g})$, soit $i:\mathfrak{g}\hookrightarrow\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ l'inclusion et soit $\pi:\mathrm{T}(\mathfrak{g})\to\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ la projection canonique. La composée $\iota=\pi\circ i:\mathfrak{g}\to\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ satisfait la relation

$$\iota(x)\iota(y)-\iota(y)\iota(x)=\iota([x,y]),$$

pour tous x et y dans $\mathfrak{g}$.

Théorème 1.5.1 (Poincaré-Birkhoff-Witt, [7], p. 72)**.** *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie n, de base $(x_1,\ldots,x_n)$. Les éléments*

$$\Big\{\iota(x_1)^{i_1}\ldots\iota(x_n)^{i_n}\,|\,n\in\mathbb{N}^*,\,(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n\Big\}$$

forment une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Pour $p\geq 0$ un entier, introduisons les $\mathbb{K}$-modules

$$F_p\Big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\Big) = \pi\Big(\oplus_{j\leq p} \mathrm{T}^j(\mathfrak{g})\Big) = \sum_{j\leq p} \pi\Big(\mathrm{T}^j(\mathfrak{g})\Big).$$

L'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \cup_{p\geq 0} F_p\Big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\Big)$ est une algèbre filtrée de gradué associé

$$\mathrm{gr}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \oplus_{p\geq 1}\Big(F_p\Big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\Big)/F_{p-1}\Big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\Big)\Big).$$

Le théorème **PBW** admet les deux importants corollaires suivant :

Corollaire 1.5.2 ([7], p. 72)**.** *L'application $\iota : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est une application injective.*

On identifie donc $\mathfrak{g}$ à $\iota(\mathfrak{g})$, appelée image canonique de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Corollaire 1.5.3 ([7], p. 78)**.** *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie n, de base $(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$. La symétrisation*

$$\begin{array}{rccc} \theta : & S(\mathfrak{g}) & \to & \mathrm{gr}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \\ & x_1 \ldots x_n & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} x_{\sigma(x_1)} \ldots x_{\sigma(x_n)} \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

1.6 Le complexe de Chevalley-Eilenberg

Dans cette section, on se refère à [26]. Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie, de base $(x_1, \ldots, x_n)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, soit $\Lambda^p\mathfrak{g}$ le *p-ième* produit extérieur de $\mathfrak{g}$, engendré par les monômes $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}$ où $x_{i_k} \in \mathfrak{g}$ avec $1 \leq k \leq n$. Puisque $\Lambda^p\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{K}$-module libre, le $\mathbb{K}$-module

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}$$

est un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module libre à gauche. Par convention, on a $\Lambda^0\mathfrak{g} = \mathbb{K}$ et $\Lambda^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

L'augmentation $\varepsilon : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{K}$ est le morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres défini par $\varepsilon(\mathfrak{g}) = 0$ et $\varepsilon(1) = 1$. Autrement dit, ε est l'application induite par la projection de $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ sur $\mathbb{K}$ parallèlement à $\oplus_{p\geq 1}\mathfrak{g}^{\otimes p}$. Ce morphisme d'algèbres munit $\mathbb{K}$ d'une structure de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module à gauche.

Définition 1.6.1 ([2], p. 270)**.** *La cohomologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, à coefficients dans le $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module M est définie par*

$$H^*_{Lie}\Big(\mathfrak{g}, M\Big) := \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathbb{K}, \mathrm{M}).$$

Soit $\left(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\Lambda^*\mathfrak{g}, d'^*_{CE}\right)$ le complexe de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Pour $1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}$, la différentielle de Chevalley-Eilenberg

$$d'^p_{CE} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^p\mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^{p-1}\mathfrak{g}$$

est $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-linéaire à gauche et définie par

$$\begin{aligned} d'^p_{CE}(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}) = &\sum_{\ell=1}^{p}(-1)^{\ell+1}x_{i_\ell} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \\ &+ \sum_{1\leq\ell<\ell'\leq p}(-1)^{\ell+\ell'} \otimes [x_{i_\ell}, x_{i_{\ell'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \\ &\qquad\qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}. \end{aligned}$$

Théorème 1.6.2 ([26], p. 239)**.** *Le complexe* $\left(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\Lambda^*\mathfrak{g}, d'^*_{CE}\right)$ *est une* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$*-résolution libre du* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$*-module à gauche* $\mathbb{K}$*.*

Corollaire 1.6.3. *Soit M un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module à gauche. On a*

$$H^*_{Lie}\left(\mathfrak{g}, M\right) = H^*\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}\left(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^*\mathfrak{g}, M\right), (d'^*_{CE})^t\right)$$

où $(d'^*_{CE})^t$ est l'application transposée de d'^*_{CE}.

1.7 Les algèbres enveloppantes de Sridharan

Dans cette section, on se refère à [24]. Soit toujours $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie n, de base $(x_1, \dots, x_n)$ et soit $f \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$ un 2-cocycle du complexe de Chevalley-Eilenberg $\left(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\Lambda^*\mathfrak{g}, d'^*_{CE}\right)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à coefficients triviaux. L'application $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ est donc une forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ vérifiant l'identité

$$f(x, [y, z]) + f(y, [z, x]) + f(z, [x, y]) = 0,$$

pour tous x, y et z dans $\mathfrak{g}$.

Définition 1.7.1 ([24], p. 532 et [15], p. 237)**.** *On appelle algèbre enveloppante de Sridharan du couple $(\mathfrak{g}, f)$, l'algèbre associative*

$$\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) := \mathrm{T}(\mathfrak{g})/I_f$$

où I_f est l'idéal bilatère de l'algèbre tensorielle $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments

$$\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] - f(x, y).1 \mid x \in \mathfrak{g} \text{ et } y \in \mathfrak{g}\}.$$

Théorème 1.7.2 (Poincaré-Birkhoff-Witt, [24], p. 533). *Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors les éléments*

$$\Big\{\iota(x_1)^{i_1} \ldots \iota(x_n)^{i_n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*,\ (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n\Big\}$$

forment une base de $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$.

Soit $\pi_f : \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ la projection canonique. D'après ([24] p. 534), la restriction de π_f à $\mathfrak{g}$ est l'injection $\mathbb{K}$-linéaire $\iota_f : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ qui vérifie

$$\iota_f(x)\iota_f(y) - \iota_f(y)\iota_f(x) - \iota_f([x,y]) - f(x,y).1. \tag{1.7.0.1}$$

Pour $p \geq 0$, introduisons les $\mathbb{K}$-modules

$$F_p\Big(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})\Big) = \pi_f\Big(\oplus_{j\leq p} \mathrm{T}^j(\mathfrak{g})\Big) = \sum_{j\leq p} \pi_f\Big(\mathrm{T}^j(\mathfrak{g})\Big).$$

L'algèbre $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) = \cup_{p\geq 0} F_p\Big(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})\Big)$ est une algèbre filtrée de gradué associé

$$\mathrm{gr}(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})) = \oplus_{p\geq 1}\Big(F_p\Big(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})\Big)/F_{p-1}\Big(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})\Big)\Big).$$

Théorème 1.7.3 ([24], p. 533). *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie n, de base $(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$. La symétrisation*

$$\begin{array}{rccc} \theta_f : & S(\mathfrak{g}) & \to & \mathrm{gr}(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})) \\ & x_1 \ldots x_n & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} x_{\sigma(x_1)} \ldots x_{\sigma(x_n)} \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Remarque 1.7.4. *Pour $f = 0$, on a $\mathcal{U}_0(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $\iota_0 = \iota$.*

R. Sridharan a montré que si f et f' sont deux cocycles de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ à coefficients triviaux cohomologues alors les algèbres enveloppantes $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{U}_{f'}(\mathfrak{g})$ sont isomorphes.

Théorème 1.7.5 ([24], p. 536). *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Soient f et f' des 2-cocycles du complexe de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ à coefficients triviaux et soit $h : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ une application $\mathbb{K}$-linéaire. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Les cocycles f et f' sont cohomologues à h, c'est-à-dire que pour tous x et y dans $\mathfrak{g}$, on a $(f' - f)(x,y) = h([x,y])$.*
2. *L'application $\psi_h : \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_{f'}(\mathfrak{g})$ définie pour $x \in \mathfrak{g}$ par $\psi_f\Big(\iota_f(x)\Big) = \iota_{f'}(x) + h(x)$ s'étend en un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.*

1.8 Résolutions de $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$

Rappelons que $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}}$ désigne l'algèbre opposée de $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$. On pose

$$\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^e := \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}}.$$

On introduit trois $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^e$-résolutions projectives de $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ qu'on utilisera dans la suite :
— La résolution bar : $\Big(\mathrm{Bar}_*(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})), b_*^{\mathrm{bar}}\Big) = \Big(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^{\otimes *} \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), b_*^{\mathrm{bar}}\Big)$;
— La résolution bar normalisée : $\Big(\overline{\mathrm{Bar}}_*(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})), b_*^{\mathrm{bar}}\Big) = \Big(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \overline{\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})}^{\otimes *} \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), b_*^{\mathrm{bar}}\Big)$;
— La résolution de Kassel : $\Big(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^* \mathfrak{g} \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}), b'_*\Big)$, définie ci-dessous.

Proposition 1.8.1 ([15], p. 241)**.** *Considérons le $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$-bimodule libre*

$$L'_*(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})) := \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^* \mathfrak{g} \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}).$$

Soit

$$b' : L'_p(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})) \to L'_{p-1}(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g}))$$

la différentielle définie pour $a \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes b \in \mathcal{U}_f(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ par

$$\begin{aligned} b'_p(a \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes b) = & \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell+1} a x_{i_\ell} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes b \\ & - \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell+1} a \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_\ell} b \\ & + \sum_{1 \leq \ell < \ell' \leq p} (-1)^{\ell+\ell'} a \otimes [x_{i_\ell}, x_{i_{\ell'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes b. \end{aligned}$$

Le complexe $\Big(L'_*(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})), b'_*\Big)$ est une $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})^e$-résolution libre de $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$.

Définition 1.8.2. *La résolution $\Big(L'_*(\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})), b'_*\Big)$ s'appelle la résolution de Kassel.*

Chapitre 2

Le morphisme de comparaison

Soit toujours $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n, de base $(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $f \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$ un 2-cocycle de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ à coefficients triviaux et soit $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de Sridharan associée à f. On pose

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}),$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$$

et

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathbb{K}.$$

Le but de ce chapitre est de construire une homotopie

$$t_* : L'_*(\mathcal{A}) \to L'_{*+1}(\mathcal{A})$$

pour la résolution de Kassel $\left(L'_*(\mathcal{A}), b'_*\right)$ satisfaisant $t^2 = 0$.

Soit $\left(\overline{\mathrm{Bar}}_*(\mathcal{A}), b^{\mathrm{bar}}_*\right)$ la résolution bar normalisée de $\mathcal{A}$ définie à la section 1.1. A partir de l'homotopie t_*, on construit un morphisme de complexes

$$\eta'_* : \left(\overline{\mathrm{Bar}}_*(\mathcal{A}), b^{\mathrm{bar}}_*\right) \to \left(L'_*(\mathcal{A}), b'_*\right)$$

qui satisfait

$$\eta'_p(1 \otimes x_{k_1} \otimes \cdots \otimes x_{k_p} \otimes 1) = 1 \otimes x_{k_1} \wedge \cdots \wedge x_{k_p} \otimes 1 \quad \text{si} \quad k_1 > \cdots > k_p$$

et

$$\eta'_p(1 \otimes x_{k_1} \otimes \cdots \otimes x_{k_p} \otimes 1) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

où $x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}$ des éléments de la base de $\mathfrak{g}$.

2.1 Définition d'une homotopie t_* pour la résolution de Kassel

Rappelons que l'homotopie $t_* : L'_*(\mathcal{A}) \to L'_{*+1}(\mathcal{A})$ doit être $\mathcal{A}$-linéaire à gauche

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathcal{A} \otimes \Lambda^{p+1}\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "b'_{p+1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathcal{A} \otimes \Lambda^{p}\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "b'_{p}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "t_p"'] & \mathcal{A} \otimes \Lambda^{p-1}\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "t_{p-1}"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathcal{A} \otimes \Lambda^{p+1}\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "b'_{p+1}"'] & \mathcal{A} \otimes \Lambda^{p}\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "b'_{p}"'] & \mathcal{A} \otimes \Lambda^{p-1}\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

et doit satisfaire $b'_{p+1}t_p + t_{p-1}b'_p = \mathrm{id}$, pour tout entier p positif.

Notation 2.1.1. *Pour $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{A}$, on définit le commutateur*

$$[\ ,\ ]_c : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

par $[a, b]_c = ab - ba$.

Voici quelques remarques concernant la filtration de $\mathcal{A}$.

Remarque 2.1.2. *Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier, j un entier $1 \leq j \leq n$, $s \geq 0$ un entier et soit $\underline{\ell} = (\ell_j, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}^{n-(j-1)}$ un $n - (j-1)$ uplet avec $\ell_j \neq 0$ et $\ell_j + \cdots + \ell_n \leq s$.*

1. *On a*
$$x_j^{\ell_j} \ldots x_n^{\ell_n} \in F_s(\mathcal{A}).$$
2. *On a*
$$x_j^{\ell_j-1} x_{j+1}^{\ell_{j+1}} \ldots x_n^{\ell_n} \in F_{s-1}(\mathcal{A}).$$
3. *Pour tout entier $1 \leq k \leq p$ tel que l'indice i_k satisfait $j \leq i_k \leq n$, le commutateur*
$$[x_{i_k}, x_j^{\ell_j-1} \ldots x_{i_k}^{\ell_{i_k}}]_c\, x_{i_k+1}^{\ell_{i_k+1}} \ldots x_n^{\ell_n} \text{ appartient à } F_{s-1}(\mathcal{A}).$$

Définition 2.1.3. *Soit p un entier compris entre 1 et n et soit I_p l'ensemble des p-multi-indices ordonnés :*

$$I_p = \{\, \underline{i} = (i_1, \ldots, i_p) \in [\![1, n]\!]^p \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n \}\,.$$

Il sera commode d'avoir quelques notations pour l'énoncé de la définition de l'homotopie t_*.

Notation 2.1.4. *Pour* $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_p) \in I_p$, *on pose*

$$x_{\underline{i}} = x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \in \Lambda^p \mathfrak{g}.$$

Soit j *un entier compris entre* 1 *et* n. *Fixons* $\underline{\ell} = (\ell_j, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}^{n-(j-1)}$. *Soit* s *un entier positif. On pose* $|\underline{\ell}| = \ell_j + \cdots + \ell_n$ *et on suppose* $|\underline{\ell}| \leq s$. *On a*

$$\underline{x}^{\underline{\ell}} = x_j^{\ell_j} \ldots x_n^{\ell_n} \in F_s(\mathcal{A}).$$

Pour définir l'application $\mathcal{A}$-linéaire à gauche $t_* : L'_*(\mathcal{A}) \to L'_{*+1}(\mathcal{A})$, de source le $\mathcal{A}^e$-module libre $L'_*(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \Lambda^* \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$, il suffit de définir t_* sur les générateurs de ce module libre $\Lambda^* \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ et ensuite de la prolonger par $\mathcal{A}$-linéarité à gauche sur $\mathcal{A} \otimes \Lambda^* \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$.

Notation 2.1.5. *Si* $t_p : \mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \Lambda^{p+1} \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ *est une application, on note* $t_p^{(s)}$ *la restriction de* t_p *à* $\mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes F_s(\mathcal{A})$.

Définition 2.1.6. *Soit* p *un entier* $1 \leq p \leq n$. *Définissons récursivement l'application*

$$t_p : \mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \Lambda^{p+1} \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}.$$

1. *L'application* $t_{-1} : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ *est donnée par* $t_{-1}(x_1^{\ell_1} \ldots x_n^{\ell_n}) = x_1^{\ell_1} \ldots x_n^{\ell_n} \otimes 1$.
2. *L'application* $t_0 : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \Lambda^1 \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ *est donnée par*

$$t_0(1 \otimes x_1^{\ell_1} \ldots x_n^{\ell_n}) = -\sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{r=1}^{\ell_k} x_1^{\ell_1} \ldots x_{k-1}^{\ell_{k-1}} x_k^{r-1} \otimes x_k \otimes x_k^{\ell_k - r} x_{k+1}^{\ell_{k+1}} \ldots x_n^{\ell_n} \Big).$$

3. *Pour* $p \geq 1$, *l'application* $t_p^{(0)} : \mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes F_0(\mathcal{A}) \to \mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ *est donnée par*

$$t_p^{(0)}(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1) = 0.$$

4. *Pour* $p \geq 1$ *et* $s \geq 1$, *on suppose construit l'application* $\mathcal{A}$*-linéaire à gauche*

$$t_p^{(s-1)} : \mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes F_{s-1}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A} \otimes \Lambda^{p+1} \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}.$$

Définissons $t_p^{(s)}$ *sur* $\mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes F_s(\mathcal{A})$ *par les conditions suivantes :*

Soit j un entier avec $1 \leq j \leq n$. Soient $\underline{\ell} = (\ell_j, \dots, \ell_n) \in \mathbb{N}^{n-(j-1)}$ avec $\ell_j \neq 0$ et $|\underline{\ell}| = \ell_j + \cdots + \ell_n \leq s$ et soit $\underline{x}^{\underline{\ell}} = x_j^{\ell_j} \dots x_n^{\ell_n} \in F_s(\mathcal{A})$.

(a) Si $|\underline{\ell}| = \ell_j + \cdots + \ell_n < s$, on pose

$$t_p^{(s)}/_{\mathcal{A}\otimes\Lambda^p\mathfrak{g}\otimes F_{s-1}(\mathcal{A})} = t_p^{(s-1)}.$$

(b) Si $|\underline{\ell}| = \ell_j + \cdots + \ell_n = s$ et si $j \geq i_1$ alors on pose

$$t_p^{(s)}(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j^{\ell_j} \dots x_n^{\ell_n}) = 0.$$

(c) Si $|\underline{\ell}| = \ell_j + \cdots + \ell_n = s$ et si $j < i_1$ alors on pose

$$\begin{aligned}
&t_p^{(s)}(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j^{\ell_j} \dots x_n^{\ell_n}) = \\
&(-1)^{p+1} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes x_j^{\ell_j - 1} x_{j+1}^{\ell_{j+1}} \dots x_n^{\ell_n} \\
&+ t_p^{(s-1)}\Big(\sum_{k=1}^{p} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge [x_{i_k}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j^{\ell_j - 1} x_{j+1}^{\ell_{j+1}} \dots x_n^{\ell_n}\Big) \\
&+ t_p^{(s-1)}\Big(\sum_{k=1}^{p} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, x_j^{\ell_j - 1} \dots x_{i_k}^{\ell_{i_k}}]_c \, x_{i_k+1}^{\ell_{i_k+1}} \dots x_n^{\ell_n}\Big) \\
&+ t_p^{(s-1)}\Big(x_j \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j^{\ell_j - 1} \dots x_n^{\ell_n}\Big).
\end{aligned}$$

L'application t_* définie par le procédé récursif ci-dessus satisfait la propriété suivante évidente, mais très utile, qu'on emploiera de nombreuses fois après réorganisation d'éléments dans la base PBW.

Proposition 2.1.7. *Soit j un entier avec $1 \leq j \leq n$. Soit p un entier avec $1 \leq p \leq n$. Soit $(i_1, \dots, i_p) \in I_p$. Pour tous entiers $1 \leq k \leq p$ et $1 \leq l \leq n$, introduisons l'élément $m \in \mathcal{A} \otimes \Lambda^{p+1}\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ défini par*

$$m := 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} \wedge x_l \wedge x_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j^{\ell_j} \dots x_n^{\ell_n}.$$

Si $j \geq i_1$ ou si $l \leq j < i_1$, on a $t_{p+1}(m) = 0$.
Autrement dit, l'élément $t_{p+1}(m)$ est nul s'il existe au moins un indice de l'élément $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_l \wedge \cdots \wedge x_{i_p}$ inférieur ou égal à j.

Démonstration. Remarquons que $x_j^{\ell_j} \dots x_n^{\ell_n}$ est évidemment un élément de la base PBW de $\mathcal{A}$. On divise la démonstration en deux parties :

Cas où $j \geq i_1$:

Si $l < i_1$ alors $l < j$ d'où le résultat par la formule 4)b) de la définition 2.1.6. Et si $l \geq i_1$ alors l'écriture ordonnée de m est de la forme $m = 1 \otimes x_{i_1} \wedge \omega \otimes x_j^{\ell_j} \dots x_n^{\ell_n}$ avec $\omega \in \Lambda^p \mathfrak{g}$. D'où, on a $t_{p+1}(m) = 0$ toujours d'après la formule 4)b) de la définition 2.1.6.

Cas où $l \leq j < i_1$:

Si $l \leq j$ alors l'écriture ordonnée de m est de la forme $m = 1 \otimes x_l \wedge \omega' \otimes x_j^{\ell_j} \dots x_n^{\ell_n}$ avec $\omega' \in \Lambda^p \mathfrak{g}$. D'où, on a $t_{p+1}(m) = 0$ d'après la formule 4)b) de la définition 2.1.6. □

Les pages 25 à 55 sont consacrées à la démonstration du résultat suivant, qui est le résultat le plus important du chapitre.

Lemme 2.1.8. *L'application $t_p : L'_p(\mathcal{A}) \to L'_{p+1}(\mathcal{A})$ définie récursivement ci-dessus est une application $\mathcal{A}$-linéaire à gauche qui satisfait :*

1. $b'_{p+1} t_p + t_{p-1} b'_p = \mathrm{id}$.
2. $t_{p+1} t_p = 0$.

La démonstration de ce lemme se déroule par récurrence sur le degré p et sur le degré filtrant s. Durant la démonstration, on utilise les notations suivantes :

Notation 2.1.9. *Soit j tel que $1 \leq j \leq n$. Soit $\underline{\ell} = (\ell_j, \dots, \ell_n) \in \mathbb{N}^{n-(j-1)}$ avec $\ell_j \neq 0$. On désigne par $\underline{\ell}' \in \mathbb{N}^{n-(j-1)}$ le multi-indice $\underline{\ell}' = (\ell_j - 1, \ell_{j+1}, \dots, \ell_n)$. Avec ces notations et pour $|\underline{\ell}| = \ell_j + \dots + \ell_n \leq s$, on a*

$$\underline{x}^{\underline{\ell}} = x_j^{\ell_j} \dots x_n^{\ell_n} \in F_s(\mathcal{A})$$

et

$$\underline{x}^{\underline{\ell}'} = x_j^{\ell_j - 1} x_{j+1}^{\ell_{j+1}} \dots x_n^{\ell_n} \in F_{s-1}(\mathcal{A}).$$

Dans la suite de ce chapitre, on fixe les élements

$$\underline{x}^{\underline{\ell}} = x_j^{\ell_j} \dots x_n^{\ell_n} \quad \text{et} \quad \underline{x}^{\underline{\ell}'} = x_j^{\ell_j - 1} x_{j+1}^{\ell_{j+1}} \dots x_n^{\ell_n}$$

où $1 \leq j \leq n$ et $\ell_j \neq 0$.

2.2 Cas où $p = -1$

Pour $p = -1$, on a

$$t_{-1}(\underline{x}^{\underline{\ell}}) = \underline{x}^{\underline{\ell}} \otimes 1.$$

Il faut montrer donc que $b'_0 \circ t_{-1}(\underline{x}^{\underline{\ell}}) = \mathrm{id}(\underline{x}^{\underline{\ell}})$. Or, on a

$$(b'_0 \circ t_{-1})(\underline{x}^{\underline{\ell}}) = b'_0(\underline{x}^{\underline{\ell}} \otimes 1) = \underline{x}^{\underline{\ell}}.$$

2.3 Cas où $p = 0$

Pour $p = 0$ et d'après la formule 2) de la définition 2.1.6, on a

$$t_0(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) = -\sum_{k=j}^{n}\Big(\sum_{r=1}^{\ell_k} x_j^{\ell_j} \dots x_k^{r-1} \otimes x_k \otimes x_k^{\ell_k - r} \dots x_n^{\ell_n}\Big).$$

Il faut montrer que $(b'_1 \circ t_0)(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) + (t_{-1} \circ b'_0)(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) = \mathrm{id}(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}})$. On a

$$\begin{aligned}
(b'_1 \circ t_0)(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) &= b'_1\Big(-\sum_{k=j}^{n}\Big(\sum_{r=1}^{\ell_k} x_j^{\ell_j} \dots x_k^{r-1} \otimes x_k \otimes x_k^{\ell_k - r} \dots x_n^{\ell_n}\Big)\Big) \\
&= -\sum_{k=j}^{n}\Big(\sum_{r=1}^{\ell_k} x_j^{\ell_j} \dots x_k^{r-1+1} \otimes x_k^{\ell_k - r} \dots x_n^{\ell_n}\Big) \\
&\quad + \sum_{k=j}^{n}\Big(\sum_{r=1}^{\ell_k} x_j^{\ell_j} \dots x_k^{r-1} \otimes x_k^{\ell_k - r+1} \dots x_n^{\ell_n}\Big) \\
&= -\underline{x}^{\underline{\ell}} \otimes 1 + 1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}.
\end{aligned}$$

On en déduit $(b'_1 \circ t_0)(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) + (t_{-1} \circ b'_0)(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) = -\underline{x}^{\underline{\ell}} \otimes 1 + 1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}} + \underline{x}^{\underline{\ell}} \otimes 1 = \mathrm{id}(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}})$, ce qui montre

$$b'_1 t_0 + t_{-1} b'_0 = \mathrm{id}.$$

2.4 Cas où $p \geq 1$ et $s = 0$

On regarde un monôme de $\mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes F_0(\mathcal{A})$ de la forme

$$1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1 = 1 \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p} \otimes 1.$$

La formule 3) de la définition 2.1.6 fournit

$$t_p^{(0)}(1 \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p} \otimes 1) = 0.$$

Donc, pour montrer l'égalité

$$b'_{p+1} t_p^{(0)} + t_{p-1} b'_p = \mathrm{id},$$

il suffit de montrer $(t_{p-1} \circ b'_p)(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) = \mathrm{id}(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1)$. On a $b'_p(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) = A'_{p-1} + B'_{p-1} + C'_{p-1}$ où

$A'_{p-1} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots \wedge x_{i_p} \otimes 1,$

$$B'_{p-1} = -\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k}$$

et

$$C'_{p-1} = \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1.$$

Or, d'après la formule 3) de la définition 2.1.6, on a

$$t_{p-1}(A'_{p-1}) = t_{p-1}(C'_{p-1}) = 0.$$

Puisque $i_k \geq i_1$ avec $2 \leq k \leq n$, d'après la proposition 2.1.7, on a

$$t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^{k+1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k}\Big) = 0$$

donc $t_{p-1}(B'_{p-1}) = t_{p-1}(-1 \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_1})$.

Alors, d'après la formule 4)c) de la définition 2.1.6, on a

$$\begin{aligned} t_{p-1}(B'_{p-1}) &= -(-1)^p \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_{i_1} \otimes 1 \\ &= -(-1)^p(-1)^{p-1} \otimes x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} (t_{p-1} \circ b'_p)(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) &= t_{p-1}(A'_{p-1}) + t_{p-1}(B'_{p-1}) + t_{p-1}(C'_{p-1}) \\ &= 0 + 1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1 + 0 \\ &= \mathrm{id}(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1). \end{aligned}$$

D'où, on a montré l'égalité

$$b'_{p+1}t_p^{(0)} + t_{p-1}b'_p = \mathrm{id}.$$

2.5 Cas où $p \geq 1$, $j \geq i_1$ et $s \geq 1$

Montrons que

$$b'_{p+1}t_p + t_{p-1}b'_p = \mathrm{id}. \tag{2.5.0.1}$$

On regarde un monôme $1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}} \in \mathcal{A} \otimes \Lambda^p\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ avec $j \geq i_1$. Puisque $j \geq i_1$, d'après la formule 4)b) de la définition (2.1.6), on a

$$t_{p-1}(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) = 0.$$

Il suffit donc de montrer que

$$(t_{p-1} \circ b'_p)(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) = \mathrm{id}(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}).$$

On pose alors

$$b'_p(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\ell}) = A'_{p-1} + B'_{p-1} + C'_{p-1}$$

où

$$A'_{p-1} = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1} x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\ell},$$

$$B'_{p-1} = -\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k}\underline{x}^{\ell}$$

et

$$C'_{p-1} = \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\ell}.$$

On pose

$$A_p = t_{p-1}(A'_{p-1}) \quad , \quad B_p = t_{p-1}(B'_{p-1}) \quad \text{et} \quad C_p = t_{p-1}(C'_{p-1}).$$

Pour $2 \leq k \leq p$ et d'après la proposition 2.1.7, le monôme

$$x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\ell}$$

est tel que

$$t_{p-1}(\sum_{k=2}^{p} x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\ell}) = 0$$

car $j \geq i_1$. Alors, on a

$$A_p = t_{p-1}(A'_{p-1}) = t_{p-1}(x_{i_1} \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\ell}).$$

De même, pour $2 \leq k < k' \leq p$ et d'après la proposition (2.1.7), le monôme

$$1 \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\ell}$$

est tel que

$$t_{p-1}(\sum_{2 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\ell}) = 0$$

car $j \geq i_1$. Alors, on a

$$C_p = t_{p-1}(C'_{p-1}) = t_{p-1}\Big(\sum_{k'=2}^{p} (-1)^{1+k'} \otimes [x_{i_1}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\ell}\Big).$$

D'autre part, on pose
$$B_p = t_{p-1}(B'_{p-1}) = B_{p,1} + B_{p,2}$$
avec

$B_{p,1} = -t_{p-1}(1 \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_1}\underline{x}^{\underline{\ell}})$

et

$B_{p,2} = -t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^{k+1} \otimes x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k}\underline{x}^{\underline{\ell}}\Big).$

Or, d'après la proposition 2.1.7, on a
$$t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^{k+1} \otimes x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j^{\ell_j} \ldots x_{i_k}^{\ell_{i_k}+1} \ldots x_n^{\ell_n}\Big) = 0$$
car $j \geq i_1$ et $x_j^{\ell_j} \ldots x_{i_k}^{\ell_{i_k}+1} \ldots x_n^{\ell_n}$ est dans la base PBW. Il en résulte que
$$\begin{aligned}
B_{p,2} &= -t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^{k+1} \otimes x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k}\underline{x}^{\underline{\ell}}\Big) \\
&\quad + t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^{k+1} \otimes x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j^{\ell_j} \ldots x_{i_k}^{\ell_{i_k}+1} \ldots x_n^{\ell_n}\Big) \\
&= -t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^{k+1} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, x_j^{\ell_j} \ldots x_{i_k}^{\ell_{i_k}}]_c\, x_{i_k+1}^{\ell_{i_k+1}} \ldots x_n^{\ell_n}\Big).
\end{aligned}$$

D'après la formule 4)c) de la définition 2.1.6, on trouve
$$\begin{aligned}
B_{p,1} &= -t_{p-1}(1 \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_1}\underline{x}^{\underline{\ell}}) \\
&= -(-1)^p \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_{i_1} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}} \\
&\quad - t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p} 1 \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge [x_{i_k}, x_{i_1}] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}\Big) \\
&\quad - t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p} 1 \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, x_j^{\ell_j} \ldots x_{i_k}^{\ell_{i_k}}]_c\, x_{i_k+1}^{\ell_{i_k+1}} \ldots x_n^{\ell_n}\Big) \\
&\quad - t_{p-1}(x_{i_1} \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{p+1}(-1)^{p-1}\otimes x_{i_1}\wedge x_{i_2}\wedge\cdots\wedge x_{i_p}\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}\\
&\quad - t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^k\otimes[x_{i_k},x_{i_1}]\wedge x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\widehat{x}_{i_k}\wedge\cdots\wedge x_{i_p}\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}\Big)\\
&\quad - t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^k\otimes x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{x}_{i_k}\wedge\cdots\wedge x_{i_p}\otimes[x_{i_k},x_j^{\ell_j}\dots x_{i_k}^{\ell_{i_k}}]_c\, x_{i_k+1}^{\ell_{i_k+1}}\dots x_n^{\ell_n}\Big)\\
&\quad - t_{p-1}(x_{i_1}\otimes x_{i_2}\wedge\cdots\wedge x_{i_p}\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}).
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$B_{p,1}=1\otimes x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_p}\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}-C_p-B_{p,2}-A_p.$$

Par conséquent, pour $x_{\underline{i}}=x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_p}$, on a

$$
\begin{aligned}
t_p\circ b'_{p+1}(1\otimes x_{\underline{i}}\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}) &= t_p(A'_p)+t_p(B'_p)+t_p(C'_p)\\
&= A_p+B_{p,1}+B_{p,2}+C_p\\
&= A_p+\Big(1\otimes x_{\underline{i}}\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}-C_p-B_{p,2}-A_p\Big)+B_{p,2}+C_p\\
&= \mathrm{id}(1\otimes x_{\underline{i}}\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}).
\end{aligned}
$$

Il nous reste donc à montrer l'égalité

$$b'_{p+1}t_p+t_{p-1}b'_p=\mathrm{id}. \tag{2.5.0.2}$$

pour $p\geq 1$ et $j<i_1$. Afin de montrer cette égalité, on procède par récurrence sur le degré p de l'élément $\underline{x}^{\underline{\ell}}$.

2.6 Cas où $p=1$, $j<i_1$ et $s\geq 1$

Dans cette section, on pose

$$i_1=i.$$

Soit $1\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}\in\mathcal{A}\otimes\Lambda^1\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}$. On regarde un monôme $1\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}\in\mathcal{A}\otimes\mathfrak{g}\otimes F_s(\mathcal{A})$ avec $j<i$ et $|\underline{\ell}|=s$. D'après la formule 4)c) de la définition (2.1.6), on a

$$
\begin{aligned}
t_1^{(s)}(1\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}) = 1\otimes x_i\wedge x_j\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}&\\
+t_1^{(s-1)}(1\otimes[x_i,x_j]\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'})&\\
+t_1^{(s-1)}(1\otimes x_j\otimes[x_i,x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i}]_c\, x_{i_k+1}^{\ell_{i_k+1}}\dots x_n^{\ell_n})&\\
+t_1^{(s-1)}(x_j\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}).&
\end{aligned}
$$

Afin de montrer l'égalité

$$b'_2 t_1^{(s)} + t_0 b'_1 = \mathrm{id},$$

on procède par récurrence sur le degré filtrant de $\underline{x}^{\underline{\ell}} \in F_s(\mathcal{A})$.

D'abord, supposons $s = 1$.
Soit $\underline{x}^{\underline{\ell}} = x_j \in F_1(\mathcal{A})$. On a

$$t_0 \circ b'_1(1 \otimes x_i \otimes x_j) = t_0(x_i \otimes x_j - 1 \otimes x_i x_j).$$

Réordonnons $x_i x_j$ dans la base PBW. On a $x_i x_j = x_j x_i + [x_i, x_j] + f(x_i, x_j)$. On a

$$\begin{aligned} t_0 \circ b'_1\Big(1 \otimes x_i \otimes x_j\Big) &= t_0\Big(x_i \otimes x_j - 1 \otimes x_j x_i - 1 \otimes [x_i, x_j] - 1 \otimes f(x_i, x_j)\Big) \\ &= -x_i \otimes x_j \otimes 1 \,+\, 1 \otimes x_j \otimes x_i \,+\, x_j \otimes x_i \otimes 1 \,+\, 1 \otimes [x_i, x_j] \otimes 1. \end{aligned}$$

D'après la définition de $t_1^{(s)}$ ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} b'_2 \circ t_1^{(1)}(1 \otimes x_i \otimes x_j) &= b'_2(1 \otimes x_i \wedge x_j \otimes 1) \\ &= x_i \otimes x_j \otimes 1 - x_j \otimes x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_j \otimes x_i + 1 \otimes x_i \otimes x_j \\ &\quad -1 \otimes [x_i, x_j] \otimes 1, \end{aligned}$$

ce qui montre $b'_2 \circ t_1^{(1)}(1 \otimes x_i \otimes x_j) + t_0 \circ b'_1(1 \otimes x_i \otimes x_j) = \mathrm{id}(1 \otimes x_i \otimes x_j)$. On a donc l'égalité pour $\underline{x}^{\underline{\ell}} \in F_1(\mathcal{A})$.

Supposons à présent $s \geq 2$.
Supposons qu'on ait l'égalité

$$b'_2 t_1^{(s-1)} + t_0 b'_1 = \mathrm{id}. \tag{2.6.0.1}$$

Montrons alors $b'_2 t_1^{(s)} + t_0 b'_1 = \mathrm{id}$.

Soit $\underline{x}^{\underline{\ell}} \in F_s(\mathcal{A})$ où $|\underline{\ell}| = s$. D'après l'expression de $t_1^{(s)}$ ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} b'_2 \circ t_1^{(s)}(1 \otimes x_i \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) &= b'_2(1 \otimes x_i \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}) \\ &\quad + b'_2 \circ t_1^{(s-1)}(1 \otimes [x_i, x_j] \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}) \\ &\quad + b'_2 \circ t_1^{(s-1)}(1 \otimes x_j \otimes [x_i, x_j^{\ell_j - 1} \ldots x_i^{\ell_i}]_c \, x_{i+1}^{\ell_{i+1}} \ldots x_n^{\ell_n}) \\ &\quad + b'_2 \circ t_1^{(s-1)}(x_j \otimes x_i \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}). \end{aligned}$$

Or, d'après la remarque (2.1.2), les monômes $\underline{x}^{\underline{\ell}'}$ et $[x_i, x_j^{\ell_j - 1} \ldots x_i^{\ell_i}]_c \ldots x_n^{\ell_n}$ appartiennent à $F_{s-1}(\mathcal{A})$. D'après l'hypothèse de récurrence (2.6.0.1), on a

$$
\begin{aligned}
&b_2'\circ t_1^{(s)}(1\otimes x_i\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}})+t_0\circ b_1'(1\otimes x_i\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}})\\
&\quad= b_2'(1\otimes x_i\wedge x_j\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'})\\
&\qquad+\Big(\mathrm{id}-(t_0\circ b_1')\Big)\Big(1\otimes[x_i,x_j]\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}+1\otimes x_j\otimes[x_i,x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i}]_c\,x_{i+1}^{\ell_{i+1}}\dots x_n^{\ell_n}+x_j\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big)\\
&\qquad+t_0\circ b_1'(1\otimes x_i\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}})\\
&\quad= b_2'(1\otimes x_i\wedge x_j\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'})\\
&\qquad+1\otimes[x_i,x_j]\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ +\ 1\otimes x_j\otimes[x_i,x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i}]_c\,x_{i+1}^{\ell_{i+1}}\dots x_n^{\ell_n}\ +\ x_j\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\\
&\qquad-(t_0\circ b_1')(1\otimes[x_i,x_j]\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'})\\
&\qquad-(t_0\circ b_1')(1\otimes x_j\otimes[x_i,x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i}]_c x_{i+1}^{\ell_{i+1}}\dots x_n^{\ell_n})\\
&\qquad-(t_0\circ b_1')(x_j\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'})\\
&\qquad+(t_0\circ b_1')(1\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}})\\
&\quad= x_i\otimes x_j\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ -\ x_j\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ +\ 1\otimes x_i\otimes x_j\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ -\ 1\otimes x_j\otimes x_i\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ -\ 1\otimes[x_i,x_j]\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\\
&\qquad+1\otimes[x_i,x_j]\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ +\ 1\otimes x_j\otimes[x_i,x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i}]_c x_{i+1}^{\ell_{i+1}}\dots x_n^{\ell_n}\ +\ x_j\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\\
&\qquad-t_0\Big([x_i,x_j]\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ -\ 1\otimes[x_i,x_j]\,\underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big)\\
&\qquad-t_0\Big(x_j\otimes[x_i,x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i}]_c x_{i+1}^{\ell_{i+1}}\dots x_n^{\ell_n}\ -\ 1\otimes x_j[x_i,x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i}]_c x_{i+1}^{\ell_{i+1}}\dots x_n^{\ell_n}\Big)\\
&\qquad-t_0\Big(x_jx_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ -\ x_j\otimes x_i\underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big)\\
&\qquad+t_0\Big(x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}\ -\ 1\otimes x_i\underline{x}^{\underline{\ell}}\Big)\\
&\quad= x_i\otimes x_j\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ +\ 1\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}\ -\ 1\otimes x_j\otimes x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i+1}\dots x_n^{\ell_n}\\
&\qquad-t_0([x_i,x_j]\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ +\ x_jx_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}-x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}})\\
&\qquad-t_0(-\,1\otimes[x_i,x_j]\,\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ -\ 1\otimes x_j[x_i,x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i}]_c x_{i+1}^{\ell_{i+1}}\dots x_n^{\ell_n}+1\otimes x_i\underline{x}^{\underline{\ell}})\\
&\qquad-t_0(x_j\otimes[x_i,x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i}]_c x_{i+1}^{\ell_{i+1}}\dots x_n^{\ell_n}\ -\ x_j\otimes x_i\underline{x}^{\underline{\ell}'})\\
&\quad= x_i\otimes x_j\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ +\ 1\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}\ -\ 1\otimes x_j\otimes x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i+1}\dots x_n^{\ell_n}\\
&\qquad-t_0(x_ix_j\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}-f(x_i,x_j)\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}-x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}})\\
&\qquad-t_0(1\otimes x_j^{\ell_j}\dots x_i^{\ell_i+1}\dots x_n^{\ell_n}\ +\ 1\otimes f(x_i,x_j)\underline{x}^{\underline{\ell}'})\\
&\qquad-t_0(-x_j\otimes x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i+1}\dots x_n^{\ell_n})\\
&\quad= x_i\otimes x_j\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}\ +\ 1\otimes x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}}\ -\ 1\otimes x_j\otimes x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i+1}\dots x_n^{\ell_n}\\
&\qquad-t_0(x_ix_j\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}'}-x_i\otimes\underline{x}^{\underline{\ell}})\\
&\qquad-t_0(1\otimes x_j^{\ell_j}\dots x_i^{\ell_i+1}\dots x_n^{\ell_n}-x_j\otimes x_j^{\ell_j-1}\dots x_i^{\ell_i+1}\dots x_n^{\ell_n})
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= x_i \otimes x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \;+\; 1 \otimes x_i \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}} \;-\; 1 \otimes x_j \otimes x_j^{\ell_j - 1} \dots x_i^{\ell_i+1} \dots x_n^{\ell_n} \\
&\quad - x_i \otimes x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\
&\quad + 1 \otimes x_j \otimes x_j^{\ell_j - 1} \dots x_i^{\ell_i+1} \dots x_n^{\ell_n} \\
&= \mathrm{id}(1 \otimes x_i \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}).
\end{aligned}$$

Pour $s \geq 2$, on a montré $b'_2 \circ t_1^{(s)}(1 \otimes x_i \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) + t_0 \circ b'_1(1 \otimes x_i \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) = \mathrm{id}(1 \otimes x_i \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}})$ avec $\underline{x}^{\underline{\ell}} \in F_s(\mathcal{A})$ et $j < i$. Par conséquent, on a

$$b'_2 t_1 + t_0 b'_1 = \mathrm{id}$$

pour $j < i$.

Il nous reste donc à monter l'égalité $b'_{p+1} t_p + t_{p-1} b'_p = \mathrm{id}$ pour $p \geq 1$.

2.7 Cas où $p \geq 1$, $j < i_1$ et $s \geq 1$

Le but de cette section est de montrer l'égalité

$$b'_{p+1} t_p^{(s)} + t_{p-1} b'_p = \mathrm{id} \tag{2.7.0.1}$$

pour $p \geq 1$, $j < i_1$ et $s \geq 1$. Or, dans la section précédente, on a montré l'égalité (2.7.0.1) pour $p = 1$. On procède donc par récurrence sur le degré p. Supposons donc qu'on ait l'égalité

$$b'_p t_{p-1}^{(s-1)} + t_{p-2} b'_{p-1} = \mathrm{id} \tag{2.7.0.2}$$

pour $s \geq 2$. Montrons que l'on a

$$b'_{p+1} t_p^{(s)} + t_{p-1} b'_p = \mathrm{id}. \tag{2.7.0.3}$$

Soit $1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}} \in \mathcal{A} \otimes \Lambda^p(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}$. Afin de montrer l'égalité (2.7.0.3), on procède par récurrence sur le degré filtrant de $\underline{x}^{\underline{\ell}} \in F_s(\mathcal{A})$. Pour cela, on divise la démonstration de cette section en deux parties. La première sera consacrée au cas $s = 1$ et la deuxième au cas $s > 1$. On note que chaque sous section possède ses propres notations.

2.7.1 Cas où $p \geq 1$, $j < i_1$ et $s = 1$

Dans cette sous section, on pose

$$\underline{x}^{\underline{\ell}} = x_j \in F_1(\mathcal{A})/\mathbb{K}.$$

On regarde un monôme $1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}} = 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j \in \mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes F_1(\mathcal{A})$. La formule 4)$c$) de la définition 2.1.6 fournit

$$t_p(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j) = (-1)^{p+1} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes 1.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} b'_{p+1} \circ t_p(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j) &= b'_{p+1}\big((-1)^{p+1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes 1\big) \\ &= A'_p + B'_p + C'_p \\ &= (A'_{p,1} + A'_{p,2}) + (B'_{p,1} + B'_{p,2}) + (C'_{p,1} + C'_{p,2}) \end{aligned}$$

avec

$$A'_{p,1} = (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes 1,$$

$$A'_{p,2} = (-1)^{p+1}(-1)^{p+2} x_j \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1,$$

$$B'_{p,1} = -(-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes x_{i_k},$$

$$B'_{p,2} = -(-1)^{p+1}(-1)^{p+2} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j$$

$$C'_{p,1} = (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes 1$$

et

$$C'_{p,2} = (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+(p+1)} \otimes [x_{i_k}, x_j] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1.$$

D'autre part, on a $b'_p(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j) = A'_{p-1} + B'_{p-1} + C'_{p-1}$ avec

$$A'_{p-1} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j,$$

$$B'_{p-1} = -\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k} x_j$$

et

$$C'_{p-1} = \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j.$$

On donc

$$t_{p-1} \circ b'_p(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j) = A_p + B_p + C_p$$

avec
$$A_p = t_{p-1}(A'_{p-1}) \quad , \quad B_p = t_{p-1}(B'_{p-1}) \quad \text{et} \quad C_p = t_{p-1}(C'_{p-1}).$$

D'après la formule 4)c) de la définition 2.1.6, on a

$$\begin{aligned} A_p &= t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}(-1)^{p}x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes 1. \end{aligned}$$

On en déduit que
$$A_p = -A'_{p,1}. \tag{2.7.1.1}$$

Réordonnons $x_{i_k}x_j$ dans la base PBW. On a $x_{i_k}x_j = x_jx_{i_k} + [x_{i_k}, x_j] + f(x_{i_k}, x_j)$. On écrit donc
$$B_p = t_{p-1}(B'_{p-1}) = B_{p,1} + B_{p,2} + B_{p,3}$$
avec
$$B_{p,1} = t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_jx_{i_k}\Big),$$
$$B_{p,2} = t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, x_j]\Big)$$
et
$$B_{p,3} = t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes f(x_{i_k}, x_j)\Big).$$

On a $f(x_{i_k}, x_j) \in \mathbb{K}$. D'après la formule 3) de la définition 2.1.6, on en déduit
$$B_{p,3} = 0.$$

Calculons à présent $B_{p,1}$. D'après la formule 4)c) de la définition 2.1.6, on a

$$\begin{aligned} B_{p,1} &= t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_jx_{i_k}\Big) \\ &= B_{p,1,1} + B_{p,1,2} + B_{p,1,3} + B_{p,1,4} + B_{p,1,5} + B_{p,1,6} \end{aligned}$$

avec

$$B_{p,1,1} = (-1)^p \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes x_{i_k}$$

$$B_{p,1,2} = t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p} (-1)^k \Big(\sum_{k'=1}^{k-1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge [x_{i_{k'}}, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k} \Big)\Big),$$

$$B_{p,1,3} = t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \Big(\sum_{k'=k+1}^{p} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge [x_{i_{k'}}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k} \Big)\Big),$$

$$B_{p,1,4} = t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p} (-1)^k \Big(\sum_{k'=1}^{k-1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_{k'}}, 1]_c\, x_{i_k} \Big)\Big),$$

$$B_{p,1,5} = t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \Big(\sum_{k'=k+1}^{p} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_{k'}}, x_{i_k}]_c \Big)\Big)$$

et

$$B_{p,1,6} = t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p} (-1)^k x_j \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k} \Big).$$

On a $B_{p,1,4} = 0$. On remarque que

$$B_{p,1,1} = -B'_{p,1}. \tag{2.7.1.2}$$

Par ailleurs, d'après la proposition 2.1.7, on a

$$t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p} (-1)^k x_j \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k} \Big) = 0$$

car $i_1 \leq i_k$. On a donc

$$\begin{aligned} B_{p,1,6} &= t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p} (-1)^k x_j \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k} \Big) \\ &= t_{p-1}\Big((-1)^1 x_j \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_1} \Big) \\ &= -(-1)^p x_j \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_{i_1} \otimes 1 \\ &= (-1)^{p+1} (-1)^{p-1} x_j \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$B_{p,1,6} = -A'_{p,2}. \tag{2.7.1.3}$$

Il est commode d'introduire quelques notations pour la suite de la démonstration.

Définition 2.7.1. *Soient x_i et x_j deux éléments de la base $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathfrak{g}$. Notons $[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,j}^k \, x_k$. Pour tout entier naturel q compris entre 1 et n, on pose*

$$[x_i, x_j]_{<q} = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{i,j}^k \, x_k$$

et

$$[x_i, x_j]_{>q} = \sum_{k=q+1}^{n} \lambda_{i,j}^k \, x_k.$$

Pour tout q, on a bien sûr $[x_i, x_j] = [x_i, x_j]_{<q} + [x_i, x_j]_{>q} + \lambda_{i,j}^q \, x_q$.

Calculons à présent $B_{p,2}$. On a

$$\begin{aligned} B_{p,2} &= t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p}(-1)^k \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, x_j]\Big) \\ &= t_{p-1}\Big((-1)^1 \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_1}, x_j]\Big) \\ &\quad + t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^k \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, x_j]\Big). \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.1.7 et la formule 4)c) de la définition 2.1.6, on a donc

$$\begin{aligned} B_{p,2} &= (-1)(-1)^p \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge [x_{i_1}, x_j]_{<i_2} \otimes 1 \\ &\quad + \sum_{k=2}^{p}(-1)^k(-1)^p \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge [x_{i_k}, x_j]_{<i_1} \otimes 1 \\ &= (-1)^{p+1}(-1)^{p-1} \otimes [x_{i_1}, x_j]_{<i_2} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1 \\ &\quad + \sum_{k=2}^{p}(-1)^k(-1)^p(-1)^{p-1} \otimes [x_{i_k}, x_j]_{<i_1} \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} B_{p,2} &= 1 \otimes [x_{i_k}, x_j]_{<i_2} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1 \\ &\quad + \sum_{k=2}^{p}(-1)^{k+1} \otimes [x_{i_k}, x_j]_{<i_1} \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1. \end{aligned}$$

Calculons à présent $B_{p,1,2}$. D'après la proposition 2.1.7, on a

$$t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^k\Big(\sum_{k'=2}^{k-1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge [x_{i_{k'}}, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k}\Big)\Big) = 0$$

car $i_1 \leq i_k$. On a donc

$$B_{p,1,2} = t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^k\Big(\sum_{k'=1}^{k-1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge [x_{i_{k'}}, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k}\Big)\Big)$$

$$= t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^k 1 \otimes [x_{i_1}, x_j] \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k}\Big).$$

Or, d'après la proposition 2.1.7, on a

$$t_{p-1}\Big(\sum_{k=3}^{p}(-1)^k 1 \otimes [x_{i_1}, x_j] \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k}\Big) = 0$$

car $i_2 \leq i_k$. On a donc

$$B_{p,1,2} = t_{p-1}\Big((-1)^2 \otimes [x_{i_1}, x_j] \wedge x_{i_3} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_2}\Big)$$

$$= (1)^p \otimes [x_{i_1}, x_j]_{>i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_{i_2} \otimes 1$$

$$= (1)^p(1)^{p-2} \otimes [x_{i_1}, x_j]_{>i_2} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1,$$

ce qui donne

$$B_{p,1,2} = 1 \otimes [x_{i_1}, x_j]_{>i_2} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_{p+1}} \otimes 1.$$

D'une manière analogue, calculons $B_{p,1,3}$. D'après la proposition 2.1.7, on a

$$B_{p,1,3} = t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\Big(\sum_{k'=k+1}^{p} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge [x_{i_{k'}}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k}\Big)\Big)$$

$$= t_{p-1}\Big((-1)^1\Big(\sum_{k'=2}^{p} 1 \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge [x_{i_{k'}}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_1}\Big)\Big)$$

$$= t_{p-1}\Big((-1)^1\Big(\sum_{k=2}^{p} 1 \otimes x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge [x_{i_k}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_1}\Big)\Big)$$

$$= -t_{p-1}\Big(\sum_{k=2}^{p}(-1)^k \otimes [x_{i_k}, x_j] \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_1}\Big)$$

$$= -\sum_{k=2}^{p}(-1)^k(-1)^p \otimes [x_{i_k}, x_j]_{>i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_{i_1} \otimes 1$$

$$= \sum_{k=2}^{p}(-1)^{k+p+1}(-1)^{p-2} \otimes [x_{i_k}, x_j]_{>i_1} \wedge x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1,$$

ce qui donne

$$B_{p,1,3} = \sum_{k=2}^{p} (-1)^{k+1} \otimes [x_{i_k}, x_j]_{>i_1} \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1.$$

D'où, on a

$$\begin{aligned}
&B_{p,2} + B_{p,1,2} + B_{p,1,3} \\
&\quad = 1 \otimes [x_{i_1}, x_j]_{<i_2} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_{p+1}} \otimes 1 \\
&\qquad + \sum_{k=2}^{p} (-1)^{k+1} \otimes [x_{i_k}, x_j]_{<i_1} \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1 \\
&\qquad +1 \otimes [x_{i_1}, x_j]_{>i_2} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1 \\
&\qquad + \sum_{k=2}^{p} (-1)^{k+1} \otimes [x_{i_k}, x_j]_{>i_1} \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1 \\
&\quad = 1 \otimes [x_{i_1}, x_j] \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1 \\
&\qquad + \sum_{k=2}^{p} (-1)^{k+1} \otimes [x_{i_k}, x_j] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1 \\
&\quad = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \otimes [x_{i_k}, x_j] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$B_{p,2} + B_{p,1,2} + B_{p,1,3} = -C'_{p,2}. \tag{2.7.1.4}$$

Calculons $B_{p,1,5}$. On

$$B_{p,1,5} = t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \Big(\sum_{k'=k+1}^{p} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_{k'}}, x_{i_k}]_c \Big)\Big).$$

Puisque $f(x_{i_{k'}}, x_{i_k}) \in \mathbb{K}$, on obtient

$$B_{p,1,5} = t_{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \Big(\sum_{k'=k+1}^{p} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_{k'}}, x_{i_k}] \Big)\Big)$$

$$= t_{p-1}\Big(\sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^k (-1)^{p-k'} \otimes x_{i_1} \wedge \dots$$
$$\cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes [x_{i_{k'}}, x_{i_k}]\Big)$$
$$= t_{p-1}\Big(\sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{p+k+k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes [x_{i_{k'}}, x_{i_k}]\Big)$$
$$= \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \wedge [x_{i_{k'}}, x_{i_k}]_{<j} \otimes 1$$
$$= \sum_{1 \leq k < k' \leq p+1} (-1)^{k+k'} (-1)^{p-1} \otimes [x_{i_{k'}}, x_{i_k}]_{<j} \wedge x_{i_1} \wedge \dots$$
$$\cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes 1.$$

Calculons à présent $C_p + B_{p,1,5}$. On a

$$C_p + B_{p,1,5}$$
$$= t_{p-1}(\sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j)$$
$$+ \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'+p-1} \otimes [x_{i_{k'}}, x_{i_k}]_{<j} \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes 1$$
$$= \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'} (-1)^p \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}]_{>j} \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes 1$$
$$+ \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'+p-1} \otimes [x_{i_{k'}}, x_{i_k}]_{<j} \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes 1$$
$$= \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'+p} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}]_{>j} \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes 1$$
$$+ \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'+p} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}]_{<j} \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes 1$$
$$= \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'+p} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes 1.$$

On en déduit que

$$C_p + B_{p,1,5} = -C'_{p,1}. \tag{2.7.1.5}$$

Par conséquent, on a

$$(b'_{p+1} \circ t_p)(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j) = A'_{p,1} + A'_{p,2} + B'_{p,1} + B'_{p,2} + C'_{p,1} + C'_{p,2}$$

et

$$(t_{p-1} \circ b'_p)(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j) = A_p + B_{p,1} + B_{p,2} + B_{p,3} + C_p$$

avec $B_{p,1} = B_{p,1,1} + B_{p,1,2} + B_{p,1,3} + B_{p,1,4} + B_{p,1,5} + B_{p,1,6}$.

D'après (2.7.1.1), (2.7.1.2), (2.7.1.3), (2.7.1.4) et (2.7.1.5), on a

$$\begin{aligned}
&(b'_{p+1} \circ t_p + t_{p-1} \circ b'_p)(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j) \\
&\quad = A'_{p,1} + A'_{p,2} + B'_{p,1} + B'_{p,2} + C'_{p,1} + C'_{p,2} \\
&\qquad + A_p + B_{p,1} + B_{p,2} + 0 + C_p \\
&\quad = A'_{p,1} + A'_{p,2} + B'_{p,1} + B'_{p,2} + C'_{p,1} + C'_{p,2} \\
&\qquad + A_p + B_{p,1,1} + B_{p,1,2} + B_{p,1,3} + B_{p,1,4} + B_{p,1,5} + B_{p,1,6} + B_{p,2} + C_p \\
&\quad = A'_{p,1} + A'_{p,2} + B'_{p,1} + B'_{p,2} + [-C_p - B_{p,1,5}] + [-B_{p,2} - B_{p,1,2} - B_{p,1,3}] \\
&\qquad + [-A'_{p,1}] + [-B'_{p,1}] + B_{p,1,2} + B_{p,1,3} + 0 + B_{p,1,5} + [-A'_{p,2}] + B_{p,2} + C_p \\
&\quad = B'_{p,2} \\
&\quad = \mathrm{id}(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j).
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}} \in \mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes F_1(\mathcal{A})$, on a

$$(b'_{p+1} \circ t_p^{(1)} + t_{p-1} \circ b'_p)(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) = \mathrm{id}(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}).$$

2.7.2 Cas où $p \geq 1$, $j < i_1$ et $s \geq 1$

Dans la partie précédente, on a montré que la restriction de $b'_{p+1} t_p + t_{p-1} b'_p$ à $\mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes F_1(\mathcal{A})$ est égale à id. On procède donc sur le degré filtran s de $\underline{x}^{\underline{\ell}}$.

Supposons à présent que pour $s \geq 2$, la restriction de $b'_{p+1} t_p + t_{p-1} b'_p$ à $\mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes F_{s-1}(\mathcal{A})$ soit égale à id, c'est-à-dire on ait

$$b'_{p+1} t_p^{(s-1)} + t_{p-1} b'_p = \mathrm{id}. \tag{2.7.2.1}$$

Montrons que cette égalité subsiste sur $\mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes F_s(\mathcal{A})$ pour $j < i_1$.

Soit un monôme de $\mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes F_s(\mathcal{A})$ de la forme $1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}$ avec $j < i_1$, $\ell_j \neq 0$, $\underline{x}^{\underline{\ell}} \in F_s(\mathcal{A})$ et $|\ell| = \ell_j + \cdots + \ell_n = s$. D'après 4)$c$) de la définition 2.1.6, on a

$(b'_{p+1} \circ t_p^{(s)})(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) =$

$$b'_{p+1}\Big((-1)^{p+1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big)$$
$$+ (b'_{p+1} \circ t_p^{(s-1)})\Big(\sum_{k=1}^{p} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge [x_{i_k}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big)$$
$$+ (b'_{p+1} \circ t_p^{(s-1)})\Big(\sum_{k=1}^{p} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \ldots$$
$$\cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, x_j^{\ell_j - 1} \ldots x_{i_k}^{\ell_{i_k}}]_c \, x_{i_k+1}^{\ell_{i_k+1}} \ldots x_n^{\ell_n}\Big)$$
$$+ (b'_{p+1} \circ t_p^{(s-1)})\Big(x_j \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big).$$

Or, les mônomes $\underline{x}^{\underline{\ell}'}$ et $[x_{i_k}, x_j^{\ell_j-1} \ldots x_{i_k}^{\ell_{i_k}}]_c \, x_{i_k+1}^{\ell_{i_k+1}} \ldots x_n^{\ell_n}$ appartiennent à $F_{s-1}(\mathcal{A})$. Par l'hypothèse de récurrence (2.7.2.1), on a

$(b'_{p+1} \circ t_p^{(s)})(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) =$

$$b'_{p+1}\Big((-1)^{p+1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big) + \Big(\mathrm{id} - t_{p-1} \circ b'_p\Big)\Big(D_{p,1} + D_{p,2} + D_{p,3}\Big)$$

où

$$D_{p,1} = \sum_{k=1}^{p} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge [x_{i_k}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}$$

$$D_{p,2} = \sum_{k=1}^{p} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, x_j^{\ell_j-1} \ldots x_{i_k}^{\ell_{i_k}}]_c \, x_{i_k+1}^{\ell_{i_k+1}} \ldots x_n^{\ell_n}$$

et

$$D_{p,3} = x_j \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}.$$

Or, par définition de la différentielle b', on a

$$b'_{p+1}\Big((-1)^{p+1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big) = A'_p + B'_p + C'_p$$

avec

$$A'_p = A'_{p,1} + A'_{p,2} \quad , \quad B'_p = B'_{p,1} + B'_{p,2}) \quad , \quad C'_p = C'_{p,1} + C'_{p,2}$$

et où on a posé

$$A'_{p,1} = (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'},$$

$$A'_{p,2} = (-1)^{p+1}(-1)^{p+2} x_j \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'},$$

$$B'_{p,1} = -(-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes x_{i_k} \underline{x}^{\underline{\ell}'},$$

$$B'_{p,2} = -(-1)^{p+1}(-1)^{p+2} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j \underline{x}^{\underline{\ell}'},$$

$$C'_{p,1} = (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}$$

and

$$C'_{p,2} = (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+(p+1)} \otimes [x_{i_k}, x_j] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}.$$

On remarque que

$$D_{p,3} = -A'_{p,2} \tag{2.7.2.2}$$

et

$$D_{p,1} = -C'_{p,2}. \tag{2.7.2.3}$$

Puisque $l = j \leq j < i_1$, d'après la proposition 2.1.7, on a $t_p(C'_{p,1}) = 0$. Par ailleurs, $C'_{p,1}$ est composé de mônomes pour lesquels on peut appliquer le résultat de la section 2.5. On a donc

$$(t_{p-1} \circ b'_p + b'_{p+1} \circ t_p)(C'_{p,1}) = C'_{p,1}.$$

Et, par conséquent, on a

$$t_{p-1} \circ b'_p(C'_{p,1}) = C'_{p,1}.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} b'_p(C'_{p,1}) = {} & C'_{p-1,1,1} + C'_{p-1,1,2} + C'_{p-1,1,3} + C'_{p-1,1,4} + C'_{p-1,1,5} + C'_{p-1,1,6} \\ & + C'_{p-1,1,7} + C'_{p-1,1,8} + C'_{p-1,1,9} \end{aligned}$$

où

$$C'_{p-1,1,1} = \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{p+k+k'+1} [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'},$$

$$\begin{aligned} C'_{p-1,1,2} = {} & \sum_{1 \leq q < k < k' \leq p} (-1)^{p+k+k'+q+1} x_{i_q} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_q} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\ & + \sum_{1 \leq k < q < k' \leq p} (-1)^{p+k+k'+q} x_{i_q} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_q} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\ & + \sum_{1 \leq k < k' < q \leq p} (-1)^{p+k+k'+q+1} x_{i_q} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_q} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}, \end{aligned}$$

$$C'_{p-1,1,3} = \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'} x_j \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'},$$

$$C'_{p-1,1,4} = \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{p+k+k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \ \underline{x}^{\underline{\ell}'},$$

$$\begin{aligned} C'_{p-1,1,5} = & \sum_{1 \leq q < k < k' \leq p} (-1)^{p+k+k'+q} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_q} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes x_{i_q} \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\ & + \sum_{1 \leq k < q < k' \leq p} (-1)^{p+k+k'+q+1} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_q} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes x_{i_q} \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\ & + \sum_{1 \leq k < k' < q \leq p} (-1)^{p+k+k'+q} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_q} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes x_{i_q} \underline{x}^{\underline{\ell}'}, \end{aligned}$$

$$C'_{p-1,1,6} = \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'+1} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j \underline{x}^{\underline{\ell}'},$$

$$C'_{p-1,1,7} = \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [[x_{i_k}, x_{i_{k'}}], x_j] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'},$$

$$\begin{aligned} C'_{p-1,1,8} = & \sum_{1 \leq q < k < k' \leq p} (-1)^{k+k'+q} \otimes [x_{i_q}, x_j] \wedge [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_q} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\ & + \sum_{1 \leq k < q < k' \leq p} (-1)^{k+k'+q+1} \otimes [x_{i_q}, x_j] \wedge [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_q} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\ & + \sum_{1 \leq k < k' < q \leq p} (-1)^{k+k'+q} \otimes [x_{i_q}, x_j] \wedge [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_q} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C'_{p-1,1,9} = & \sum_{1 \leq \ell < \ell' < k < k' \leq p} (-1)^{k+k'+\ell+\ell'} \otimes [x_{i_\ell}, x_{\ell'}] \wedge [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \dots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell'}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\ & + \sum_{1 \leq \ell < k < \ell' < k' \leq p} (-1)^{k+k'+\ell+\ell'-1} \otimes [x_{i_\ell}, x_{i_{\ell'}}] \wedge [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \dots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell'}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{1\leq k<\ell<\ell'<k'\leq p} (-1)^{k+k'+\ell+\ell'} \otimes [x_{i_\ell}, x_{i_{\ell'}}] \wedge [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \ldots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell'}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell'}} \\
&+ \sum_{1\leq k<\ell<k'<\ell'\leq p} (-1)^{k+k'+\ell+\ell'-1} \otimes [x_{i_\ell}, x_{i_{\ell'}}] \wedge [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \ldots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell'}} \\
&+ \sum_{1\leq k<k'<\ell<\ell'\leq p} (-1)^{k+k'+\ell+\ell'} \otimes [x_{i_\ell}, x_{i_{\ell'}}] \wedge [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \ldots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes \underline{x}^{\underline{\ell'}}.
\end{aligned}
$$

Puisque $l = j \leq j < i_1$, la proposition 2.1.7 fournit

$$t_{p-1}(C'_{p-1,1,1}) = t_{p-1}(C'_{p-1,1,2}) = t_{p-1}(C'_{p-1,1,9}) = 0.$$

Par ailleurs, posons

$b'_p(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) = E'_{p-1} + F'_{p-1} + G'_{p-1}$ avec

$$E'_{p-1} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}},$$

$$F'_{p-1} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k} \underline{x}^{\underline{\ell}}$$

et

$$G'_{p-1} = \sum_{1\leq k<k'\leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}.$$

On remarque que

$$G'_{p-1} = -C'_{p-1,1,6}$$

donc

$$t_{p-1}(G'_{p-1}) = -t_{p-1}(C'_{p-1,1,6}). \tag{2.7.2.4}$$

Calculons à présent $b'_p(D_{p,1})$. On a

$$
\begin{aligned}
b'_p(D_{p,1}) &= A''_{p-1} + B''_{p-1} + C''_{p-1} \\
&= (A''_{p-1,1} + A''_{p-1,2}) + (B''_{p-1,1} + B''_{p-1,2}) + (C''_{p-1,1} + C''_{p-1,2} + C''_{p-1,3})
\end{aligned}
$$

où

$$A''_{p-1,1} = \sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{k'=1}^{k-1}(-1)^{k'+1}x_{i_{k'}} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge [x_{i_k}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big)$$
$$+ \sum_{k'=k+1}^{p}(-1)^{k'+1}x_{i_{k'}} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge [x_{i_k}, x_j] \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big)\Big),$$

$$A''_{p-1,2} = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}[x_{i_k}, x_j] \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'},$$

$$B''_{p-1,1} = \sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{k'=1}^{k-1}(-1)^{k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge [x_{i_k}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}}\underline{x}^{\underline{\ell}'}$$
$$+ \sum_{k'=k+1}^{p}(-1)^{k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge [x_{i_k}, x_j] \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}}\underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big),$$

$$B''_{p-1,2} = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, x_j]\ \underline{x}^{\underline{\ell}'},$$

$$C''_{p-1,1} = \sum_{k=2}^{p}\Big(\sum_{k'=1}^{k-1}(-1)^{k'+k} \otimes [x_{i_{k'}}, [x_{i_k}, x_j]] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big),$$

$$C''_{p-1,2} = \sum_{k=1}^{p-1}\Big(\sum_{k'=k+1}^{p}(-1)^{k'+k} \otimes [[x_{i_k}, x_j], x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big)$$

et

$$C''_{p-1,3} = \sum_{1 \leq k < k' < q \leq p}(-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \ldots$$
$$\cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{q-1}} \wedge [x_{i_q}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}$$
$$+ \sum_{1 \leq k < q < k' \leq p}(-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \ldots$$
$$\cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_{q-1}} \wedge [x_{i_q}, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}$$
$$+ \sum_{1 \leq q < k < k' \leq p}(-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \ldots$$
$$\cdots \wedge x_{i_{q-1}} \wedge [x_{i_q}, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}.$$

En échangeant les variables k et k' dans la sommation, on a

$$C''_{p-1,1} = \sum_{1 \leq k' < k \leq p}(-1)^{k'+k} \otimes [x_{i_{k'}}, [x_{i_k}, x_j]] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big)$$
$$= \sum_{1 \leq k < k' \leq p}(-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, [x_{i_{k'}}, x_j]] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}$$

L'identité de Jacobi fournit

$$C''_{p-1,1} + C''_{p-1,2} - C'_{p-1,1,7} = 0.$$

D'où

$$t_p(C''_{p-1,1} + C''_{p-1,2} - C'_{p-1,1,7}) = 0. \qquad (2.7.2.5)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} C''_{p-1,3} = & \sum_{1\leq k<k'<q\leq p} (-1)^{k+k'+q} \otimes [x_{i_q}, x_j] \wedge [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_q} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\ & + \sum_{1\leq k<q<k'\leq p} (-1)^{k+k'+q+1} \otimes [x_{i_q}, x_j] \wedge [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \\ & \qquad , \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_q} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\ & + \sum_{1\leq k<k'<q\leq p} (-1)^{k+k'+q} \otimes [x_{i_q}, x_j] \wedge [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \\ & \qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{i_q} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\ & = C'_{p-1,1,8}. \end{aligned}$$

D'où, on a

$$t_{p-1}(C''_{p-1,3}) = t_{p-1}(C'_{p-1,1,8}). \qquad (2.7.2.6)$$

Pour $j \leq k \leq n$, on introduit la troncature à droite et à gauche de $\underline{x}^{\underline{\ell}} = x_j^{\ell_j} \dots x_n^{\ell_n}$ définie par

$$T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}}) = x_j^{\ell_j} \dots x_k^{\ell_k} \quad \text{et} \quad T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}}) = x_{k+1}^{\ell_{k+1}} \dots x_n^{\ell_n}.$$

On a donc

$$\underline{x}^{\underline{\ell}} = x_j^{\ell_j} \dots x_n^{\ell_n} = T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}}) T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}}),$$

$$\underline{x}^{\underline{\ell}'} = x_j^{\ell_j-1} x_{j+1}^{\ell_{j+1}} \dots x_n^{\ell_n} = T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})$$

et

$$[x_k, x_j^{\ell_j-1} \dots x_k^{\ell_k}]_c \, x_{k+1}^{\ell_{k+1}} \dots x_n^{\ell_n} = [x_k, T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c \, T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}).$$

Avec ces notations, on a $D_{p,2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c \, T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})$.

Calculons à présent $b'_p(D_{p,2})$. On a

$$\begin{aligned} b'_p(D_{p,2}) &= A^{(3)}_{p-1} + B^{(3)}_{p-1} + C^{(3)}_{p-1} \\ &= (A^{(3)}_{p-1,1} + A^{(3)}_{p-1,2}) + (B^{(3)}_{p-1,1} + B^{(3)}_{p-1,2}) + (C^{(3)}_{p-1,1} + C^{(3)}_{p-1,2} + C^{(3)}_{p-1,3}) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A^{(3)}_{p-1,1} = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{k'=1}^{k-1} (-1)^{k'+1} x_{i_{k'}} \otimes x_{i_1} \wedge \dots \\ \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c \, T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \Big) \\ + \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{k'=k+1}^{p} (-1)^{k'+1} x_{i_{k'}} \otimes x_{i_1} \wedge \dots \\ \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c \, T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \Big), \end{aligned}$$

$$A^{(3)}_{p-1,2} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_j \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c \, T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}),$$

$$\begin{aligned} B^{(3)}_{p-1,1} = -\sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{k'=1}^{k-1} (-1)^{k'+1} \otimes x_{i_1} \wedge \dots \\ \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}} [x_{i_k}, T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c \, T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \Big) \\ - \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{k'=k+1}^{p} (-1)^{k'+1} \otimes x_{i_1} \wedge \dots \\ \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}} [x_{i_k}, T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c \, T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \Big), \end{aligned}$$

$$B^{(3)}_{p-1,2} = -\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_j [x_{i_k}, T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c \, T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}),$$

$$\begin{aligned} C^{(3)}_{p-1,1} = \sum_{k=2}^{p} \Big(\sum_{k'=1}^{k-1} (-1)^{k'+k} \otimes [x_{i_{k'}}, x_j] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \\ \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c \, T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{(3)}_{p-1,2} = \sum_{k=1}^{p-1} \Big(\sum_{k'=k+1}^{p} (-1)^{k'+k} \otimes [x_j, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \\ \dots \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c \, T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \Big) \end{aligned}$$

et

$$C^{(3)}_{p-1,3} = \sum_{1\leq k<k'<q\leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots$$
$$\cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{q-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_q}, T'_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c T''_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'})$$
$$+ \sum_{1\leq k<q<k'\leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots$$
$$\cdots \wedge x_{i_{q-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_q}, T'_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c T''_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'})$$
$$+ \sum_{1\leq q<k<k'\leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{q-1}} \wedge x_j \wedge \dots$$
$$\cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_q}, T'_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c T''_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'}).$$

Or, on a

$$C'_{p-1,1,5} = \sum_{1\leq q<k<k'\leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{q-1}} \wedge x_j \wedge \dots$$
$$\cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_q}\underline{x}^{\underline{\ell}'}$$
$$+ \sum_{1\leq k<q<k'\leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots$$
$$\cdots \wedge x_{i_{q-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \otimes x_{i_q}\underline{x}^{\underline{\ell}'}$$
$$+ \sum_{1\leq k<k'<q\leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots$$
$$\cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{q-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_q}\underline{x}^{\underline{\ell}'}.$$

On en déduit

$$C'_{p-1,1,5} - C^{(3)}_{p-1,3}$$
$$= \sum_{1\leq q<k<k'\leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{q-1}} \wedge x_j \wedge \dots$$
$$\cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes T'_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'})\, x_{i_q} T''_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'})$$
$$+ \sum_{1\leq k<q<k'\leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots$$
$$\cdots \wedge x_{i_{q-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes T'_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'})\, x_{i_q} T''_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'})$$
$$+ \sum_{1\leq k<k'<q\leq p} (-1)^{k+k'} \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots$$
$$\cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{q-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes T'_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'})\, x_{i_q} T''_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'}).$$

Puisque

$$T'_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'})\, x_{i_q} T''_q(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) = x_j^{\ell_j - 1} \dots x_{q-1}^{\ell_{q-1}} x_q^{\ell_q} x_{q+1}^{\ell_{q+1}} \dots x_n^{\ell_n}$$

est un mônome de la base PBW. Puisque $l = j \leq j < i_1$, d'après la proposition 2.1.7, on a donc

$$t_{p-1}(C'_{p-1,1,5} - C^{(3)}_{p-1,3}) = 0. \tag{2.7.2.7}$$

De plus, on a $b'_p(D_{p,3}) = b'_p(x_j \otimes x_{i_1} \wedge \dots x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}) = A^{(4)}_{p-1} + B^{(4)}_{p-1} + C^{(4)}_{p-1}$ où

$A^{(4)}_{p-1} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_j x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}$,

$B^{(4)}_{p-1} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k} x_j \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k} \underline{x}^{\underline{\ell}'}$

et

$C^{(4)}_{p-1} = \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+k'} x_j \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \dots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}$.

On remarque que $C^{(4)}_{p-1} = C'_{p-1,1,3}$. On a donc

$$t_{p-1}(C^{(4)}_{p-1}) = t_{p-1}(C'_{p-1,1,3}). \tag{2.7.2.8}$$

En échangeant les variables k et k' dans la sommation, on a

$$\begin{aligned} A''_{p-1,1} = & \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+1} x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge [x_{i_{k'}}, x_j] \wedge \dots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\ & + \sum_{1 \leq k' < k \leq p} (-1)^{k+1} x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge [x_{i_{k'}}, x_j] \wedge \dots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A^{(3)}_{p-1,1} = & \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{k+1} x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots \\ & \qquad \dots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge x_j \wedge \dots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_{k'}}, T'_{k'}(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c T''_{k'}(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \\ & + \sum_{1 \leq k' < k \leq p} (-1)^{k+1} x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge x_j \wedge \dots \\ & \qquad \dots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots \wedge x_{i_{p+1}} \otimes [x_{i_{k'}}, T'_{k'}(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c T''_{k'}(\underline{x}^{\underline{\ell}'}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $A''_{p-1,2} = A''_{p-1,2,1} + A''_{p-1,2,2}$ avec

$A''_{p-1,2,1} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} [x_{i_k}, x_j]_c \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}$

et

$A''_{p-1,2,2} = -\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} f(x_{i_k}, x_j) \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \dots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}$.

D'après la formule 4)c) de la défintion 2.1.6, on a

$$t_{p-1}(E'_{p-1}) = -A'_{p,1} + t_{p-1}(A''_{p-1,1}) + t_{p-1}(A^{(3)}_{p-1,1}) + t_{p-1}(A''_{p-1,2,1} + A^{(4)}_{p-1}). \quad (2.7.2.9)$$

De plus, on a $B^{(3)}_{p-1,1} = B^{(3)}_{p-1,1,1} + B^{(3)}_{p-1,1,2}$ avec

$$\begin{aligned}
B^{(3)}_{p-1,1,1} = &\sum_{1\leq k'<k\leq p} (-1)^{k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}} x_{i_k} T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \\
&+ \sum_{1\leq k<k'\leq p} (-1)^{k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}} x_{i_k} T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \\
= &\sum_{1\leq k'<k\leq p} (-1)^{k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}} x_{i_k} \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\
&+ \sum_{1\leq k<k'\leq p} (-1)^{k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}} x_{i_k} \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\
= &\sum_{1\leq k<k'\leq p} (-1)^{k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k} x_{i_{k'}} \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\
&+ \sum_{1\leq k<k'\leq p} (-1)^{k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}} x_{i_k} \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\
= &\sum_{1\leq k<k'\leq p} (-1)^{k}(-1)^{p+k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes x_{i_k} x_{i_{k'}} \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\
&+ \sum_{1\leq k<k'\leq p} (-1)^{k'}(-1)^{p+k+1} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes x_{i_{k'}} x_{i_k} \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\
= &\sum_{1\leq k<k'\leq p} (-1)^{p+k+k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes [x_{i_k}, x_{i_{k'}}]_c \, \underline{x}^{\underline{\ell}'}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
B^{(3)}_{p-1,1,2} = &\sum_{1\leq k'<k\leq p} (-1)^{k'+1} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}} T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) x_{i_k} T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \\
&+ \sum_{1\leq k<k'\leq p} (-1)^{k'+1} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}} T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) x_{i_k} T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \\
= &\sum_{1\leq k'<k\leq p} (-1)^{k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}} T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) x_{i_k} T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \\
&+ \sum_{1\leq k<k'\leq p} (-1)^{k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_{k'}} T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) x_{i_k} T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}).
\end{aligned}$$

L'élément $f(x_{i_k}, x_{i_{k'}})\underline{x}^{\underline{\ell}'}$ est dans la base PBW de $\mathcal{A}$. Puisque $l = j \leq j < i_1$, d'après la proposition 2.1.7, on a

$$t_{p-1}\Big(\sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^{p+k+k'} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \wedge x_j \otimes f(x_{i_k}, x_{i_{k'}})\underline{x}^{\underline{\ell}'} \Big) = 0.$$

D'où, on a

$$t_{p-1}(B^{(3)}_{p-1,1,1}) = t_{p-1}(C'_{p-1,1,4}). \tag{2.7.2.10}$$

Par ailleurs, on a $B''_{p-1,2} = B''_{p-1,2,1} + B''_{p-1,2,2}$ avec

$$B''_{p-1,2,1} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes [x_{i_k}, x_j]_c \, \underline{x}^{\underline{\ell}'}$$

et

$$B''_{p-1,2,2} = -\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_{p+1}} \otimes f(x_{i_k}, x_j) \, \underline{x}^{\underline{\ell}'}.$$

On remarque que

$$B''_{p-1,2,2} = -A''_{p-1,2,2}$$

alors

$$t_{p-1}(B''_{p-1,2,2}) = -t_{p-1}(A''_{p-1,2,2}). \tag{2.7.2.11}$$

Dans la base de PBW de $\mathcal{A}$, on a

$$F'_{p-1} - B''_{p-1,2,1} - B^{(3)}_{p-1,2} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}}) x_{i_k} T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}})$$

$$B^{(4)}_{p-1} + A^{(3)}_{p-1,2} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^k x_j \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) x_{i_k} T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})$$

et

$$B'_{p,1} + D_{p,2} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p+k+1} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k-1}} \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) x_{i_k} T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'})$$

En échangeant les variables k et k' dans la sommation, on a

$$\begin{aligned} B''_{p-1,1} = & \sum_{1 \leq k < k' \leq p} (-1)^k \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge [x_{i_{k'}}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k} \underline{x}^{\underline{\ell}'} \\ & + \sum_{1 \leq k' < k \leq p} (-1)^k \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge [x_{i_{k'}}, x_j] \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes x_{i_k} \underline{x}^{\underline{\ell}'}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&B''_{p-1,1} + C^{(3)}_{p-1,1} + C^{(3)}_{p-1,2} \\
&\quad = \sum_{1\leq k<k'\leq p} (-1)^k \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge [x_{i_{k'}}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) x_{i_k} T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) \\
&\quad + \sum_{1\leq k'<k\leq p} (-1)^k \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'-1}} \wedge [x_{i_{k'}}, x_j] \cdots \wedge \widehat{x}_{i_k} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes T'_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}) x_{i_k} T''_k(\underline{x}^{\underline{\ell}'}).
\end{aligned}$$

D'après la formule 4)c) de la défintion 2.1.6.4)c), on a donc

$$\begin{aligned}
t_{p-1}(F'_{p-1} - B''_{p-1,2,1} - B^{(3)}_{p-1,2}) = -\big(B'_{p,1} + D_{p,2}\big)& \\
+t_{p-1}(B''_{p-1,1} + C^{(3)}_{p-1,1} + C^{(3)}_{p-1,2})& \\
+t_{p-1}(B^{(3)}_{p-1,1,2} + 0)& \\
+t_{p-1}(B^{(4)}_{p-1} + A^{(3)}_{p-1,2}).&
\end{aligned}$$

D'après 2.7.2.2 à 2.7.2.11, on a

$$\begin{aligned}
&(b'_{p+1} \circ t_p)(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) + (t_{p-1} + b'_p)(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) \\
&\quad = b'_{p+1}(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) + D_{p,1} + D_{p,2} + D_{p,3} \\
&\qquad -(t_{p-1} + b'_p)(D_{p,1} + D_{p,2} + D_{p,3}) \\
&\qquad +t_{p-1}(E'_{p-1}) \\
&\qquad +t_{p-1}(F'_{p-1}) \\
&\qquad +t_{p-1}(G'_{p-1}) \\
&\quad = A'_{p,1} + A'_{p,2} + B'_{p,1} + B'_{p,2} \\
&\qquad +t_{p-1}(C'_{p-1,1,1} + C'_{p-1,1,2} + C'_{p-1,1,3} + C'_{p-1,1,4} + C'_{p-1,1,5} + C'_{p-1,1,6} + C'_{p-1,1,7} + C'_{p-1,1,8} \\
&\qquad\quad + C'_{p-1,1,9}) \\
&\qquad +C'_{p,2} + D_{p,1} + D_{p,2} + D_{p,3} \\
&\qquad -t_{p-1}(A''_{p-1,1} + A''_{p-1,2,1} + A''_{p-1,2,2} + B''_{p-1,1} + B''_{p-1,2,1} + B''_{p-1,2,2} + C''_{p-1,1} + C''_{p-1,2} \\
&\qquad\quad + C''_{p-1,3}) \\
&\qquad -t_{p-1}(A^{(3)}_{p-1,1} + A^{(3)}_{p-1,2} + B^{(3)}_{p-1,1,1} + B^{(3)}_{p-1,1,2} + B^{(3)}_{p-1,2} + C^{(3)}_{p-1,1} + C^{(3)}_{p-1,2} + C^{(3)}_{p-1,3}) \\
&\qquad -t_{p-1}(A^{(4)}_{p-1} + B^{(4)}_{p-1} + C^{(4)}_{p-1}) \\
&\qquad +t_{p-1}(E'_{p-1}) \\
&\qquad +t_{p-1}(F'_{p-1}) \\
&\qquad +t_{p-1}(G'_{p-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A'_{p,1} + [-D_{p,3}] + B'_{p,1} + B'_{p,2} \\
&\quad +t_{p-1}(0 + 0 + [C^{(4)}_{p-1}] + [B^{(3)}_{p-1,1,1}] + [C^{(3)}_{p-1,3}] + [-G'_{p-1}] + C'_{p-1,1,7} + [C''_{p-1,3}]) \\
&\quad +[-D_{p,1}] + D_{p,1} + D_{p,2} + D_{p,3} \\
&\quad -t_{p-1}(A''_{p-1,1} + A''_{p-1,2,1} + A''_{p-1,2,2} + B''_{p-1,1} + B''_{p-1,2,1} + [-A''_{p-1,2,2}] + [C'_{p-1,1,7}] \\
&\qquad +C''_{p-1,3}) \\
&\quad -t_{p-1}(A^{(3)}_{p-1,1} + A^{(3)}_{p-1,2} + B^{(3)}_{p-1,1,1} + B^{(3)}_{p-1,1,2} + B^{(3)}_{p-1,2} + C^{(3)}_{p-1,1} + C^{(3)}_{p-1,2} + C^{(3)}_{p-1,3}) \\
&\quad -t_{p-1}(A^{(4)}_{p-1} + B^{(4)}_{p-1} + C^{(4)}_{p-1}) \\
&\quad -A'_{p,1} + t_{p-1}(A''_{p-1,1}) + t_{p-1}(A^{(3)}_{p-1,1}) + t_{p-1}(A''_{p-1,2,1} + A^{(4)}_{p-1}) \\
&\quad +t_{p-1}(B''_{p-1,2,1} + B^{(3)}_{p-1,2}) - \left(B'_{p,1} + D_{p,2}\right) + t_{p-1}(B''_{p-1,1} + C^{(3)}_{p-1,1} + C^{(3)}_{p-1,2} + B^{(3)}_{p-1,1,2}) \\
&\qquad +t_{p-1}(B^{(4)}_{p-1} + A^{(3)}_{p-1,2}) + t_{p-1}(G'_{p-1}) \\
&= B'_{p,2} \\
&= \mathrm{id}(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}).
\end{aligned}
$$

Conclusion :

On a montré

$$b'_{p+1} \circ t_p(1 \otimes x_i \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) + t_{p-1} \circ b'_p(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) = \mathrm{id}(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}})$$

pour $\underline{x}^{\underline{\ell}} \in F_s(\mathcal{A})$, ce qui achève la récurrence.
Par conséquent, on a

$$b'_{p+1} \circ t_p(1 \otimes x_i \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) + t_{p-1} \circ b'_p(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) = \mathrm{id}(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}})$$

pour tout $\underline{x}^{\underline{\ell}} \in \mathcal{A}$.
Montrons à présent la partie b) du lemme 2.1.8.

Supposons $j \geq i_1$. L'application t_* est nulle. Soit $1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}} \in \mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ avec $j \geq i_1$. On a

$$
\begin{aligned}
(t_{p+1} \circ t_p)(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) &= t_{p+1}(0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Supposons $j < i_1$. Montrons l'égalité

$$t_{p+1} t_p = 0.$$

Soit $s=1$. Soit $1\otimes x_{\underline{i}}\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}\in \mathcal{A}\otimes\Lambda^p\mathfrak{g}\otimes F_1(\mathcal{A})$ avec $\underline{x}^{\underline{\ell}}=1+x_j$. On a

$$\begin{aligned}
(t_{p+1}\circ t_p^{(1)})(1\otimes x_{\underline{i}}\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) &= (t_{p+1}\circ t_p^{(0)})(1\otimes x_{\underline{i}}\otimes 1)+(t_{p+1}\circ t_p^{(1)})(1\otimes x_{\underline{i}}\otimes x_j)\\
&= t_{p+1}(0)+t_{p+1}^{(0)}(1\otimes x_{\underline{i}}\wedge x_j\otimes 1)\\
&= 0+0\\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a donc $t_{p+1}t_p^{(1)}=0$ pour $\underline{x}^{\underline{\ell}}\in F_1(\mathcal{A})$. On procède par récurrence sur le degré filtrant de $\underline{x}^{\underline{\ell}}$.

Soit $s\geq 2$. Supposons qu'on ait l'égalité

$$t_{p+1}\circ t_p^{(s-1)}=0.$$

Montrons qu'on a l'égalité pour $\underline{x}^{\underline{\ell}}\in F_s(\mathcal{A})$. On a

$$\begin{aligned}
&(t_{p+1}\circ t_p^{(s)})(1\otimes x_{i_1}\wedge\ldots x_{i_p}\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}})\\
&\quad = t_{p+1}\Big((-1)^{p+1}\otimes x_{i_1}\wedge\ldots x_{i_p}\wedge x_j\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big)\\
&\quad +(t_{p+1}\circ t_p^{(s-1)})\Big(\sum_{k=1}^{p}1\otimes x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_{k-1}}\wedge[x_{i_k},x_j]\wedge\ldots x_{i_p}\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big)\\
&\quad +(t_{p+1}\circ t_p^{(s-1)})\Big(\sum_{k=1}^{p}1\otimes x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_{k-1}}\wedge x_j\wedge\ldots x_{i_p}\otimes[x_{i_k},T_k'(\underline{x}^{\underline{\ell}'})]_c T_k''(\underline{x}^{\underline{\ell}'})\Big)\\
&\quad +(t_{p+1}\circ t_p^{(s-1)})\Big(x_j\otimes x_{i_1}\wedge\ldots x_{i_p}\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big).
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a $t_{p+1}t_p^{(s-1)}=0$. D'où, on a

$$(t_{p+1}\circ t_p^{(s)})(1\otimes x_{i_1}\wedge\ldots x_{i_p}\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}})=t_{p+1}\Big((-1)^{p+1}\otimes x_{i_1}\wedge\ldots x_{i_p}\wedge x_j\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big).$$

Puisque $l=j\leq j<i_1$, d'après la proposition 2.1.7, on a

$$t_{p+1}\Big((-1)^{p+1}\otimes x_{i_1}\wedge\ldots x_{i_p}\wedge x_j\otimes \underline{x}^{\underline{\ell}'}\Big)=0.$$

Par conséquent, on a $t_{p+1}t_p^{(s)}=0$.

2.8 Construction du morphisme de complexes

A partir de l'homotopie t_*, on construit par récurrence un morphisme de complexes

$$\eta_*':\Big(\overline{\mathrm{Bar}}_*(\mathcal{A}),b_*^{\mathrm{bar}}\Big)\to\Big(L_*'(\mathcal{A}),b_*'\Big)$$

de source la résolution bar, à valeurs dans la résolution de Kassel.
On définit pas à pas η'_p

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes p+1} \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "b_p^{\mathrm{bar}}"] \arrow[d, "\eta'_p"] & \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes p-1} \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \arrow[d, "\eta'_{p-1}"] \\
\mathcal{A} \otimes \Lambda^{p+1} \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} & \mathcal{A} \otimes \Lambda^{p} \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} \arrow[l, "t_p"]
\end{tikzcd}$$

en posant

$$\eta'_p = t_{p-1}\eta'_{p-1} b_p^{\mathrm{bar}}. \tag{2.8.0.1}$$

Proposition 2.8.1. *On a*

$$b'_* \eta'_* = \eta'_{*-1} b_*^{\mathrm{bar}}. \tag{2.8.0.2}$$

Démonstration. Pour $p = 0$, on a $\eta'_0 = t_{-1} \circ \mathrm{id} \circ b_0^{\mathrm{bar}}$. D'où,

$$\begin{array}{rcl} b'_0 \circ \eta'_0 & = & b'_0 \circ t_{-1} \circ \mathrm{id} \circ b_0^{\mathrm{bar}} \\ & = & \mathrm{id} \circ b_0^{\mathrm{bar}}. \end{array}$$

Supposons qu'on ait l'égalité $b'_{j-1} \circ \eta'_{j-1} = \eta'_{j-2} \circ b_{j-1}^{\mathrm{bar}}$ pour $j \geq 1$. Montrons l'égalité

$$b'_j \circ \eta'_j = \eta'_{j-1} \circ b_j^{\mathrm{bar}}.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} b'_j \circ \eta'_j & = & b'_j \circ t_{j-1} \circ \eta'_{j-1} \circ b_j^{\mathrm{bar}} \\ & = & \eta'_{j-1} \circ b_j^{\mathrm{bar}} - t_{j-2} \circ b'_{j-1} \circ \eta'_{j-1} \circ b_j^{\mathrm{bar}} \\ & = & \eta'_{j-1} \circ b_j^{\mathrm{bar}} - t_{j-2} \circ \eta'_{j-2} \circ b_{j-1}^{\mathrm{bar}} \circ b_j^{\mathrm{bar}} \\ & = & \eta'_{j-1} \circ b_j^{\mathrm{bar}}. \end{array}$$

□

Le morphisme de $\mathcal{A}^e$-modules η'_* défini par la formule 2.8.0.1 est un morphisme de complexes. Donnons une formule explicite pour ce morphisme de complexes.

L'élément $1 \otimes 1 \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ est une $\mathcal{A}^e$-base de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. On a

$$\begin{array}{rcl} \eta'_0(1 \otimes 1) & = & t_{-1} \circ b_0^{\mathrm{bar}}(1 \otimes 1) \\ & = & t_{-1}(1) \\ & = & 1 \otimes 1 \end{array}$$

ce qui montre $\eta'_0 = \mathrm{id}$.

Soit $1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}} \otimes 1$ un élément de la base PBW de $\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A}$. On a

$$\begin{aligned}
\eta'_1(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}} \otimes 1) &= (t_0 \circ \mathrm{id} \circ b_1^{\mathrm{bar}})(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}} \otimes 1) \\
&= t_0(\underline{x}^{\underline{\ell}} \otimes 1 - 1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) \\
&= -t_0(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}).
\end{aligned}$$

La formule 2 de la définition 2.1.6 fournit

$$\eta'_1(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}} \otimes 1) = -t_0(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}}) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{r=1}^{\ell_k} x_1^{\ell_1} \dots x_k^{r-1} \otimes x_k \otimes x_k^{\ell_k - r} \dots x_n^{\ell_n} \Big).$$

Les notations $\underline{\ell}^1, \dots, \underline{\ell}^p$ sont des multi-indices de $\mathbb{N}^n$, dont on note les éléments sous la forme

$$\underline{x}^{\underline{\ell}^j} = x_1^{\ell_1^j} \dots x_n^{\ell_n^j}$$

avec $1 \leq j \leq p$.

Soient $\underline{x}^{\underline{\ell}^1}, \underline{x}^{\underline{\ell}^2}, \dots, \underline{x}^{\underline{\ell}^p}$ des éléments dans la base PBW de $\overline{\mathcal{A}}$. Supposons que η'_p soit de la forme

$$\eta'_p(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^1} \otimes \dots \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^p} \otimes 1) = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} t_{p-1}\Big(t_{p-2}\Big(\dots t_1\Big(t_0(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^1})\underline{x}^{\underline{\ell}^2}\Big) \dots \underline{x}^{\underline{\ell}^{p-1}}\Big)\underline{x}^{\underline{\ell}^p}\Big).$$

Trouvons la forme de η'_{p+1}. On a

$$\begin{aligned}
&\eta'_{p+1}\Big(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^1} \otimes \dots \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^{p+1}} \otimes 1\Big) \\
&= t_p\Big(\eta'_p\Big(b_{p+1}^{bar}\Big(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^1} \otimes \dots \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^{p+1}} \otimes 1\Big)\Big)\Big) \\
&= t_p\Big(\eta'_p\Big(\underline{x}^{\underline{\ell}^1} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^2} \otimes \dots \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^{p+1}} \otimes 1\Big)\Big) \\
&\quad + t_p\Big(\eta'_p\Big(\sum_{k=1}^{p}(-1)^k 1 \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^1} \otimes \dots \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^k}\underline{x}^{\underline{\ell}^{k+1}} \otimes \dots \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^{p+1}} \otimes 1\Big)\Big) \\
&\quad + t_p\Big(\eta'_p\Big((-1)^{p+1} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^1} \otimes \dots \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^p} \otimes \underline{x}^{\underline{\ell}^{p+1}}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

$$= t_p\Big((-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\ t_{p-1}\Big[t_{p-2}\Big(\dots t_1\Big(t_0(\underline{x}^{\ell^1}\otimes\underline{x}^{\ell^2}\Big)\underline{x}^{\ell^3}\Big)\dots\underline{x}^{\ell^p}\Big)\underline{x}^{\ell^{p+1}}\Big]\Big)$$

$$+t_p\Big((-1)^{\frac{p(p+1)}{2}+k}\ t_{p-1}\Big[t_{p-2}\Big(\dots t_{k-1}\Big(\dots t_1\Big(t_0(1\otimes\underline{x}^{\ell^1}\Big)\underline{x}^{\ell^2}\Big)\dots\underline{x}^{\ell^k}\underline{x}^{\ell^{k+1}}\Big)\dots\underline{x}^{\ell^p}\Big)\underline{x}^{\ell^{p+1}}\Big]\Big)$$

$$+\ t_p\Big((-1)^{\frac{p(p+1)}{2}+p+1}\ t_{p-1}\Big[t_{p-2}\Big(\dots t_1\Big(t_0(1\otimes\underline{x}^{\ell^1}\Big)\underline{x}^{\ell^2}\Big)\dots\underline{x}^{\ell^{p-1}}\Big)\underline{x}^{\ell^p}\Big]\underline{x}^{\ell^{p+1}}\Big)$$

$$= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\ t_p\circ t_{p-1}\Big[t_{p-2}\Big(\dots t_1\Big(t_0(\underline{x}^{\ell^1}\otimes\underline{x}^{\ell^2}\Big)\underline{x}^{\ell^3}\Big)\dots\underline{x}^{\ell^p}\Big)\underline{x}^{\ell^{p+1}}\Big]$$

$$+(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}+k}\ t_p\circ t_{p-1}\Big[t_{p-2}\Big(\dots t_{k-1}\Big(\dots t_1\Big(t_0(1\otimes\underline{x}^{\ell^1}\Big)\underline{x}^{\ell^2}\Big)\dots\underline{x}^{\ell^k}\underline{x}^{\ell^{k+1}}\Big)\dots\underline{x}^{\ell^p}\Big)\underline{x}^{\ell^{p+1}}\Big]$$

$$+\ (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}+p+1}\ t_p\Big(t_{p-1}\Big[t_{p-2}\Big(\dots t_1\Big(t_0(1\otimes\underline{x}^{\ell^1}\Big)\underline{x}^{\ell^2}\Big)\dots\underline{x}^{\ell^{p-1}}\Big)\underline{x}^{\ell^p}\Big]\underline{x}^{\ell^{p+1}}\Big)$$

Or, d'après le lemme 2.1.8, on a $t_p\circ t_{p-1}=0$. D'où, on a

$$\eta'_{p+1}\Big(1\otimes\underline{x}^{\ell^1}\otimes\cdots\otimes\underline{x}^{\ell^{p+1}}\otimes 1\Big)$$
$$= (-1)^{\frac{(p+1)(p+2)}{2}}\ t_p\Big(t_{p-1}\Big(t_{p-2}\Big(\dots t_1\Big(t_0(1\otimes\underline{x}^{\ell^1}\Big)\underline{x}^{\ell^2}\Big)\dots\underline{x}^{\ell^{p-1}}\Big)\underline{x}^{\ell^p}\Big)\underline{x}^{\ell^{p+1}}\Big).$$

En conclusion, on a montré

Proposition 2.8.2. *Soit p un entier compris entre 1 et n. Posons $\underline{x}^{\ell^{\otimes p}}=\underline{x}^{\ell^1}\otimes\cdots\otimes\underline{x}^{\ell^p}\in\overline{\mathcal{A}}^{\otimes p}$. L'application*

$$\eta'_p:\Big(\overline{\mathrm{Bar}}_p(\mathcal{A}),b_p^{\mathrm{bar}}\Big)\to\Big(L'_p(\mathcal{A}),b'_p\Big)$$

définie par

$$\eta'_p\Big(1\otimes\underline{x}^{\ell^{\otimes p}}\otimes 1\Big)=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}t_{p-1}\Big(t_{p-2}\Big(\dots t_1\Big(t_0(1\otimes\underline{x}^{\ell^1}\Big)\underline{x}^{\ell^2}\Big)\dots\underline{x}^{\ell^{p-1}}\Big)\underline{x}^{\ell^p}\Big)$$

est un morphisme de complexes de source la résolution bar, à valeurs dans la résolution de Kassel.

Corollaire 2.8.3. *Soient x_{k_1}, ..., x_{k_p} des éléments de $\mathfrak{g}$. On a*

$$\begin{aligned}\eta'_p(1\otimes x_{k_1}\otimes\cdots\otimes x_{k_p}\otimes 1) &= 1\otimes x_{k_1}\wedge\cdots\wedge x_{k_p}\otimes 1 \quad \text{si } k_1>\cdots>k_p\\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ailleurs.}\end{aligned}$$

Chapitre 3

Le produit cup

Soit toujours $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n, de base $(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $f \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$ un 2-cocycle de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à coefficients triviaux et soit $\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de Sridharan associée à f. On pose

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}),$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$$

et

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathbb{K}.$$

Durant ce chapitre, on introduit le produit cup sur la cohomologie de l'algèbre $\mathcal{A}$. Soit p un entier compris entre 1 et n. On rappelle que I_p désigne l'ensemble des p-multi-indices ordonnés :

$$I_p = \{ \underline{i} = (i_1, \ldots, i_p) \in [\![1, n]\!]^p \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n \}.$$

Pour $\underline{i} \in I_p$, on fixe les éléments $x_{\underline{i}} \in \Lambda^p(\mathfrak{g}), x^*_{\underline{i}} \in \Lambda^p(\mathfrak{g}^*)$ et $x^{\otimes}_{\underline{i}} \in \mathfrak{g}^{\otimes p}$ par

$$x_{\underline{i}} := x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p},$$

$$x^*_{\underline{i}} := x^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge x^*_{i_p}$$

et

$$x^{\otimes}_{\underline{i}} := x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_p}.$$

Remarque 3.0.1. *Les familles $(x_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I_p}$ et $(x^*_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I_p}$ sont des bases respectives de $\Lambda^p(\mathfrak{g})$ et $\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)$.*

3.1 Quelques structures de modules

Introduisons les structures de modules que nous utiliserons dans la suite de ce texte.

Définition 3.1.1. *L'application*

$$\mathcal{A}^e \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

définie pour $\alpha \otimes \beta^{\mathrm{op}} \in \mathcal{A}^e$ *et* $a \in \mathcal{A}$ *par*

$$(\alpha \otimes \beta^{\mathrm{op}})a = \alpha a \beta$$

munit $\mathcal{A}$ *d'une structure de* $\mathcal{A}^e$*-modules à gauche.*

Définition 3.1.2. *Soient* $(a \otimes b^{\mathrm{op}})$ *et* $(\alpha \otimes \beta^{\mathrm{op}})$ *deux éléments de* $\mathcal{A}^e$*. La structure de* $\mathcal{A}^e$*-module à gauche de* $\mathcal{A}^e$ *est donnée par*

$$(\alpha \otimes \beta^{\mathrm{op}})(a \otimes b^{\mathrm{op}}) = \alpha a \otimes (b\beta)^{\mathrm{op}}.$$

Proposition 3.1.3 ([24], p. 540)**.** *Soit* $\Delta : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}^e$ *l'application* $\mathbb{K}$*-linéaire définie pour* $x \in \mathfrak{g}$ *par*

$$\Delta(x) = \iota_f(x) \otimes 1 - 1 \otimes \iota_f(x)^{\mathrm{op}}.$$

Cette application induit un morphisme d'algèbres, toujours noté Δ

$$\Delta : \mathcal{U} \to \mathcal{A}^e.$$

Démonstration. Montrons que Δ est "bien définie". Notons $\Delta^{\otimes} : \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}^e$ le prolongement de Δ à $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$. Pour que $\Delta : \mathcal{U} \to \mathcal{A}^e$ soit bien définie, il faut vérifier

$$\Delta^{\otimes}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = 0.$$

Soient x et y deux éléments de $\mathfrak{g}$. On a

$$\begin{aligned}
&\Delta^{\otimes}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) \\
&= \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x) - \Delta([x, y]) \\
&= (\iota_f(x) \otimes 1 - 1 \otimes \iota_f(x))(\iota_f(y) \otimes 1 - 1 \otimes \iota_f(y)) \\
&\ - (\iota_f(y) \otimes 1 - 1 \otimes \iota_f(y))(\iota_f(x) \otimes 1 - 1 \otimes \iota_f(x)) \\
&\ - (\iota_f([x, y]) \otimes 1 - 1 \otimes \iota_f([x, y])) \\
&= (\iota_f(x)\iota_f(y) - \iota_f(y)\iota_f(x) - \iota_f([x, y])) \otimes 1 - 1 \otimes (\iota_f(x)\iota_f(y) - \iota_f(y)\iota_f(x) - \iota_f([x, y])) \\
&= f(x, y) \otimes 1 - 1 \otimes f(x, y) = 0\ .
\end{aligned}$$

Il est clair que l'application Δ ainsi définie est un homomorphsime de $\mathbb{K}$-algèbres. $\square$

Corollaire 3.1.4. *Le module* $\mathcal{A}^e$ *est un* $\mathcal{U}$*-module à gauche et à droite via* Δ*.*

3.2 Cohomologie d'une algèbre de Lie à valeurs dans la représentation adjointe

La représentation adjointe $\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ est le $\mathcal{U}$-module à gauche $\mathcal{A}$ défini pour $x \in \mathfrak{g}$ et $a \in \mathcal{A}$ par

$$x.a = xa - ax,$$

qu'on prolonge sur $\mathcal{U}$ par la règle $(ux).a = u.(x.a)$ pour $u \in \mathcal{U}$, $x \in \mathfrak{g}$ et a dans $\mathcal{A}$. Cette structure de $\mathcal{U}$-module de $\mathcal{A}$ s'obtient donc en composant la structure de $\mathcal{A}^e$-module de $\mathcal{A}$ et le morphisme Δ. D'une manière générale, pour $u \in \mathcal{U}$, on a

$$u.a = \Delta(u)a$$

où Δ est la diagonale introduite dans la proposition 3.1.3.

Remarque 3.2.1. *On prendra garde que via la multiplication $\rho : \mathcal{U}^e \to \mathcal{U}$, l'application $\Delta \circ \rho$ n'induit pas de structure de $\mathcal{U}^e$-module sur $\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$. . En effet, pour x, y et z dans $\mathfrak{g}$ et $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$, on a*

$$(\Delta \circ \rho)(x \otimes y^{\mathrm{op}})\Big((\Delta \circ \rho)(1 \otimes z^{\mathrm{op}})a\Big) \neq (\Delta \circ \rho)(x \otimes (zy)^{\mathrm{op}})a.$$

Définition 3.2.2 ([2], p. 270)**.** *La cohomologie et l'homologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ sont respectivement définies par*

$$H^*_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) := \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$$

et

$$H^{Lie}_*(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) := \mathrm{Tor}^{\mathcal{U}}_*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}).$$

Définition 3.2.3. *Soit $x_{\underline{i}} \in \Lambda^p(\mathfrak{g})$ et soit $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$. Dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U} \otimes \Lambda^p(\mathfrak{g}), \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$, le symbole de Kronecker $\delta^a_{x_{\underline{i}}}$ est défini par $\delta^a_{x_{\underline{i}}}(1 \otimes x_{\underline{i}}) = a$ et $\delta^a_{x_{\underline{i}}}(1 \otimes x_{\underline{j}}) = 0$ pour $\underline{j} \neq \underline{i}$.*

Posons

$$L^p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) := \Lambda^p(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}.$$

L'isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}), \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \cong L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$$

induit un isomorphisme de complexes

$$\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}), \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), ({d'}^*_{CE})^t\Big) \cong \Big(L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^*\Big)$$

où la différentielle
$$d^p : L^p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \to L^{p+1}(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$$
est définie pour $x^*_{\underline{i}} \otimes a \in L^p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ par

$$\begin{aligned}
d^p(x^*_{\underline{i}} \otimes a) &= \sum_{\underline{j} \in I_{p+1}} \Big(x^*_{\underline{j}} \otimes \delta^a_{\underline{i}} \Big(d'^p_{CE}(1 \otimes x_{\underline{j}}) \Big) \Big) \\
&= \sum_{\underline{j} \in I_{p+1}} \Big(x^*_{\underline{j}} \otimes \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \Delta(x_{j_k}) \delta^a_{\underline{i}} (1 \otimes x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{j_k} \wedge \cdots \wedge x_{j_{p+1}}) \Big) \\
&\quad + \sum_{\underline{j} \in I_{p+1}} \Big(x^*_{\underline{j}} \otimes \sum_{1 \leq k < k' \leq p+1} (-1)^{k+k'} \delta^a_{\underline{i}} (1 \otimes [x_{j_k}, x_{j_{k'}}] \wedge \ldots \\
&\qquad\qquad \cdots \wedge \widehat{x}_{j_k} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{j_{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{j_{p+1}} \Big)
\end{aligned}$$

où d'^p_{CE} est la différentielle du complexe de Chevalley-Eilenberg $(\mathcal{U} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}), d'^*_{CE})$ introduite dans la section 1.6.

Proposition 3.2.4. *Le complexe $\Big(L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^* \Big)$ calcule donc $H^*_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$.*

Dans ce chapitre, on montre que ce complexe calcule la cohomologie de Hochschild $H^*(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$.

3.3 Enoncé du résultat

Théorème 3.3.1. *Soit $\overline{C}^*_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\overline{A}^{\otimes *}, A)$ le complexe de Hochschild normalisé réduit de $\mathcal{A} = \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$. On pose $\Big(L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^* \Big) = \Big(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}, d^* \Big)$.*
Pour $x^*_{\underline{i}} \otimes a \in \Lambda^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ et $x^*_{\underline{j}} \otimes a' \in \Lambda^q \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$, on pose

$$(x^*_{\underline{i}} \otimes a) \cup_{Lie} (x^*_{\underline{j}} \otimes a') = x^*_{\underline{i}} \wedge x^*_{\underline{j}} \otimes aa'$$

où aa' est le produit dans l'algèbre $\mathcal{A}$. Il existe un quasi-isomorphisme

$$\varphi^* : \Big(\overline{C}^*_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}), b^* \Big) \to \Big(L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^* \Big)$$

induisant un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives

$$\Phi^* : (H^*(\mathcal{A}, \mathcal{A}), \cup) \to (H^*_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), \cup_{Lie}).$$

3.4 L'isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Dans cette section, on montre que l'application

$$\Big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\overline{\mathcal{A}}^{\otimes *}, \mathcal{A}), b^*\Big) \to \Big(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}, d^*\Big)$$

est un quasi-isomorphisme de complexes.
La bar résolution normalisée $\Big(\overline{\mathrm{Bar}}_*(\mathcal{A}), b_*^{\mathrm{bar}}\Big)$ et la résolution de Kassel $\Big(L'_*(\mathcal{A}), b'_*\Big)$ ont été respectivement définies dans les sections 1.1 et 1.8.

Lemme 3.4.1. *Il existe des quasi-isomorphismes explicites*

$$\Big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\overline{\mathcal{A}}^{\otimes *}, \mathcal{A}), b^*\Big) \underset{\psi^*}{\overset{\varphi^*}{\rightleftarrows}} \Big(L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^*\Big)$$

entre le complexe de Hochschild de $\mathcal{A}$ et le complexe de Kassel de $\mathcal{A}$. De plus, les applications φ^* et ψ^* satisfont les trois définitions suivantes :

1. *Pour $f \in \overline{C}^p_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, on a*

$$\varphi^p(f) = \sum_{\underline{i} \in I_p} \Big(x^*_{\underline{i}} \otimes f\Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(x_{i_1})} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(x_{i_p})}\Big)\Big).$$

2. *Pour $(x_{j_1} \otimes \cdots \otimes x_{j_p}) \in \mathfrak{g}^{\otimes p} = F_1(\overline{\mathcal{A}})^{\otimes p}$ et $x^*_{\underline{i}} \otimes a \in L^p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$, on a*

$$\begin{aligned} \psi^p(x^*_{\underline{i}} \otimes a)(x_{j_1} \otimes \cdots \otimes x_{j_p}) &= \delta^a_{x_{\underline{i}}}(1 \otimes x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_p}) \quad \text{si } j_1 > \cdots > j_p \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ailleurs.} \end{aligned}$$

3. *On a $\varphi^* \circ \psi^* = \mathrm{id}_{L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})}$.*

La suite de cette section est consacrée à la démonstration du lemme ci-dessus.
Les isomorphismes φ^* et ψ^* sont obtenus comme les composées suivantes
$\varphi^* = {}^4\varphi^* \circ {}^3\varphi^* \circ {}^2\varphi^* \circ {}^1\varphi^*$ et $\psi^* = {}^1\psi^* \circ {}^2\psi^* \circ {}^3\psi^* \circ {}^4\psi^*$avec

$$\Big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\overline{\mathcal{A}}^{\otimes *}, \mathcal{A}), b^*\Big) \underset{{}^1\psi^*}{\overset{{}^1\varphi^*}{\rightleftarrows}} \Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(\overline{\mathrm{Bar}}_*(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big), (b_*^{\mathrm{bar}})^t\Big);$$

$$\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(\overline{\mathrm{Bar}}_*(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big), (b_*^{\mathrm{bar}})^t\Big) \underset{{}^2\psi^*}{\overset{{}^2\varphi^*}{\rightleftarrows}} \Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(L'_*(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big), (b'_*)^t\Big);$$

$$\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(L'_*(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big), (b'_*)^t\Big) \underset{{}^3\psi^*}{\overset{{}^3\varphi^*}{\rightleftarrows}} \Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\Big(\mathcal{U} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}), \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}\Big), (d'^*_{CE})^t\Big);$$

$$\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\Big(\mathcal{U}\otimes\Lambda^*(\mathfrak{g}),\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}\Big),(d'^{*}_{CE})^t\Big)\underset{{}^4\psi^*}{\overset{{}^4\varphi^*}{\rightleftarrows}}\Big(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\mathrm{ad}},d^*\Big).$$

Etape 1 : Construction de ${}^1\varphi^*$ et ${}^1\psi^*$.

Elle est bien connue. Nous la rappelons pour la commodité de la lecture.

Proposition 3.4.2 ([18], corol 2.2, p. 282)**.** *Soient* $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\overline{\mathcal{A}}^{\otimes p},\mathcal{A})$ *et* $a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_p\otimes a_{p+1}\in\overline{\mathrm{Bar}}_p(\mathcal{A})$.

1. *L'application*
$$^1\varphi^p:\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\overline{\mathcal{A}}^{\otimes p},\mathcal{A})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\overline{\mathrm{Bar}}_p(\mathcal{A}),\mathcal{A})$$
définie par
$$^1\varphi^p(f)(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_p\otimes a_{p+1})=a_0f(a_1\otimes\cdots\otimes a_p)a_{p+1}$$
est un isomorphisme de complexes d'inverse l'application
$$^1\psi^p:\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\overline{\mathrm{Bar}}_p(\mathcal{A}),\mathcal{A})\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\overline{\mathcal{A}}^{\otimes p},\mathcal{A}).$$
Pour $g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\overline{\mathrm{Bar}}_p(\mathcal{A}),\mathcal{A})$*, l'application* ${}^1\psi^p$ *est définie par*
$$^1\psi^p(g)(a_1\otimes\cdots\otimes a_p)=g(1\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_p\otimes 1).$$

2. *L'application*
$$^1\Phi^p:H^p\Big(\overline{C}^*(\mathcal{A},\mathcal{A}),b^*\Big)\to H^p\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(\overline{\mathrm{Bar}}_*(\mathcal{A}),\mathcal{A}\Big),(b_*^{\mathrm{bar}})^t\Big)$$
induite par ${}^1\varphi^p$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels d'inverse* ${}^1\Psi^p:=H^*({}^1\psi^p)$.

Etape 2 : Construction de ${}^2\varphi^*$ et ${}^2\psi^*$.

La construction de ${}^2\varphi^*$ est due à Kassel. La construction de ${}^2\psi^*$ est délicate et nécessite d'introduire le morphisme de comparaison η'_* construit à la section 2.8. L'application ${}^2\varphi^*$ est induite par l'application

$$\varphi'_p:\Big(L'_p(\mathcal{A}),b'_p\Big)\to\Big(\overline{\mathrm{Bar}}_p(\mathcal{A}),b_p^{\mathrm{bar}}\Big)\tag{3.4.0.1}$$

construite par Kassel([15], lemme 9 et corol 6, p. 243-244). Cette application φ'_p est donnée pour $1\otimes x_{\underline{i}}\otimes 1=1\otimes x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_p}\otimes 1\in L'_p(\mathcal{A})$ par

$$\varphi'_p(1\otimes x_{\underline{i}}\otimes 1)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}}\varepsilon(\sigma)\,(1\otimes x_{\sigma(i_1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(i_p)}\otimes 1).$$

Pour $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(\overline{\operatorname{Bar}}_p(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big)$, on pose

$$^2\varphi_p(f) := f \circ \varphi'_p \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(L'_*(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big).$$

Soit

$$\eta'_p : \Big(\overline{\operatorname{Bar}}_p(\mathcal{A}), b_p^{\text{bar}}\Big) \to \Big(L'_p(\mathcal{A}), b'_p\Big)$$

le morphisme de complexes construit à la section 2.8.

Lemme 3.4.3. *On a*

$$\eta'_p \circ \varphi'_p = \operatorname{id}_{L'_p(\mathcal{A})}.$$

Démonstration. Soit $\underline{i} \in I_p$. Soit $1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1 \in L'_p(\mathcal{A})$. On a

$$\begin{aligned}
(\eta'_p \circ \varphi'_p)(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) &= (\eta'_p \circ \varphi'_p)(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1) \\
&= (\eta'_p \circ \varphi'_p)\Big((-1)^{\frac{(p-1)p}{2}} \otimes x_{i_p} \wedge \cdots \wedge x_{i_1} \otimes 1\Big) \\
&= (-1)^{\frac{(p-1)p}{2}} \eta'_p\Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\sigma)\, 1 \otimes x_{\sigma(i_p)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_1)} \otimes 1\Big).
\end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.8.3, on a

$$\begin{aligned}
(\eta'_p \circ \varphi'_p)(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) &= (-1)^{\frac{(p-1)p}{2}} \otimes x_{i_p} \wedge \cdots \wedge x_{i_1} \otimes 1 \\
&= (-1)^{\frac{(p-1)p}{2}} (-1)^{\frac{(p-1)p}{2}} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1 \\
&= \operatorname{id}(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1).
\end{aligned}$$

□

Pour $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(L'_p(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big)$, on pose

$$^2\psi_p(g) := g \circ \eta'_p \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(\overline{\operatorname{Bar}}_p(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big).$$

Montrons que

$$^2\varphi_p \circ {}^2\psi_p = \operatorname{id}_{L'(\mathcal{A})}.$$

On a $^2\varphi_p \circ {}^2\psi_p(g) = {}^2\varphi_p(g \circ \eta'_p) = g \circ \eta'_p \circ \varphi'_p$. D'après le lemme 3.4.3, on obtient $^2\varphi_p \circ {}^2\psi_p(g) = g$.

Proposition 3.4.4. *L'application*

$$^2\Phi^p : H^p\Big(\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(\overline{\operatorname{Bar}}_*(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big), b_*^{\text{bar}}\Big) \to H^p\Big(\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(L'_*(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big), (b'_*)^t\Big)$$

induite par $^2\varphi^p$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels d'inverse $^2\Psi^p := H^*(^2\psi^p)$.

Etape 3 : Construction de ${}^3\varphi^*$ et ${}^3\psi^*$.
Kassel a montré([15], corol. 5, p. 241-242) que l'homologie de Hochschild de $\mathcal{A}$ est l'homologie du complexe $\Big(\mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}), d_*\Big)$. Nous montrons un résultat analogue en cohomologie. La cohomologie de Hochschild de $\mathcal{A}$ est la cohomologie du complexe $\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\Big(\mathcal{U} \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}\Big), (d'^*_{CE})^t\Big)$. Ce résultat est peut être bien connu mais pour la commodité de la lecture, nous en donnons une démonstration.

Proposition 3.4.5. *Soient $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(L'_p(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big)$ et $u \otimes x_{\underline{i}} \in \mathcal{U} \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}$. L'application*

$$ {}^3\varphi^p : \Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(L'_p(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big), (b'_*)^t\Big) \to \Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\Big(\mathcal{U} \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}\Big), (d'^*_{CE})^t\Big) $$

définie par

$$ {}^3\varphi^p(f)(u \otimes x_{\underline{i}}) = \Delta(u) f(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) $$

est un isomorphisme de complexes. L'inverse est l'application

$$ {}^3\psi^p : \Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\Big(\mathcal{U} \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}\Big), (d'^p_{CE})^t\Big) \to \Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(L'_p(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big), (b'_p)^t\Big) $$

définie pour $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\Big(\mathcal{U} \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}\Big)$ et $(a \otimes x_{\underline{i}} \otimes a') \in L'_p(\mathcal{A})$ par

$$ {}^3\psi^p(g)\Big(a \otimes x_{\underline{i}} \otimes a'\Big) = (a \otimes a'^{\mathrm{op}}) g(1 \otimes x_{\underline{i}}). $$

Démonstration. Dans un premier temps, montrons que ${}^3\varphi^p(f)$ est $\mathcal{U}$-linéaire à gauche. Soit $u' \in \mathcal{U}$, on a

$$ \begin{aligned} {}^3\varphi^p(f)\Big(u'u \otimes x_{\underline{i}}\Big) &= \Delta(u'u) f(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) \\ &= \Delta(u')\Big(\Delta(u) f(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1)\Big) \\ &= \Delta(u')\,{}^3\varphi^p(f)\Big(u \otimes x_{\underline{i}}\Big) \\ &= u'.\Big({}^3\varphi^p(f)\Big(u \otimes x_{\underline{i}}\Big)\Big). \end{aligned} $$

Montrons que ${}^3\psi^p(g)$ est $\mathcal{A}^e$-linéaire à gauche. Soit $b \otimes b'^{\mathrm{op}} \in \mathcal{A}^e$, on a

$$ \begin{aligned} {}^3\psi^p(g)\Big((b \otimes b'^{\mathrm{op}})(a \otimes x_{\underline{i}} \otimes a')\Big) &= {}^3\psi^p(g)\Big(ba \otimes x_{\underline{i}} \otimes a'b'\Big) \\ &= (ba \otimes (a'b')^{\mathrm{op}}) g(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) \\ &= \Big((b \otimes b'^{\mathrm{op}})(a \otimes a'^{\mathrm{op}})\Big) g(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) \\ &= (b \otimes b'^{\mathrm{op}})\Big((a \otimes a'^{\mathrm{op}}) g(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1)\Big) \\ &= (b \otimes b'^{\mathrm{op}})\,{}^3\psi^p(g)(a \otimes x_{\underline{i}} \otimes a') \end{aligned} $$

Dans un deuxième temps, montrons que les applications de ${}^3\psi^p$ et ${}^3\phi^p$ sont inverses l'une de l'autre. On a

$$\begin{array}{rcl}({}^3\psi^p \circ {}^3\varphi^p)(f)(a \otimes x_{\underline{i}} \otimes a') & = & (a \otimes a'^{\mathrm{op}})^3\varphi^p(f)(1 \otimes x_{\underline{i}}) \\ & = & (a \otimes a'^{\mathrm{op}})f(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) \\ & = & f(a \otimes x_{\underline{i}} \otimes a')\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}({}^3\varphi^p \circ {}^3\psi^p)(g)(u \otimes x_{\underline{i}}) & = & \Delta(u)^4\psi^p(g)(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) \\ & = & \Delta(u)g(1 \otimes x_{\underline{i}}) \\ & = & g(u \otimes x_{\underline{i}}).\end{array}$$

Dans un troisième temps, montrons que ${}^3\varphi$ est un morphisme de complexes. Soit $u \otimes x_{\underline{i}} \in V_{p+1}(\mathfrak{g})$, on a

$$\begin{aligned}
&{}^3\varphi^{p+1} \circ (b'_p)^t(f)(u \otimes x_{\underline{i}}) \\
&= \Delta(u)(b'_p)^t(f)(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) \\
&= \Delta(u)f\Big(b'_{p+1}(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1)\Big) \\
&= \Delta(u)f\Big(\sum_{\ell=1}^{p+1}(-1)^{\ell+1}x_{i_\ell} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge x_{i_{p+1}} \otimes 1\Big) \\
&- \Delta(u)f\Big(\sum_{\ell=1}^{p+1}(-1)^{\ell+1} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge x_{i_{p+1}} \otimes x_{i_l}\Big) \\
&+ \Delta(u)f\Big(\sum_{1 \leq \ell < \ell' \leq p+1}(-1)^{\ell+\ell'} \otimes [x_{i_\ell}, x_{i_{\ell'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{p+1}} \otimes 1\Big) \\
&= \Delta(u)f\Big(\sum_{\ell=1}^{p+1}(-1)^{\ell+1}\Delta(x_{i_\ell})(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge x_{i_{p+1}} \otimes 1)\Big) \\
&+ \Delta(u)f\Big(\sum_{1 \leq \ell < \ell' \leq p+1}(-1)^{\ell+\ell'} \otimes [x_{i_\ell}, x_{i_{\ell'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{p+1}} \otimes 1\Big) \\
&= \Big(\Delta(u)\Delta(x_{i_\ell})\Big)^3\varphi^p(f)\Big(\sum_{\ell=1}^{p+1}(-1)^{\ell+1}1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge x_{i_{p+1}}\Big) \\
&+ \Delta(u)^3\varphi^p(f)\Big(\sum_{1 \leq \ell < \ell' \leq p+1}(-1)^{\ell+\ell'} \otimes [x_{i_\ell}, x_{i_{\ell'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{p+1}}\Big) \\
&= {}^3\varphi^p(f)(\sum_{\ell=1}^{p+1}(-1)^{\ell+1}ux_{i_\ell} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge x_{i_{p+1}}) \\
&+ {}^3\varphi^p(f)(\sum_{1 \leq \ell < \ell' \leq p+1}(-1)^{\ell+\ell'}u \otimes [x_{i_\ell}, x_{i_{\ell'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{p+1}}) \\
&= {}^3\varphi^p(f)\Big(d'^{p+1}_{CE}(u \otimes x_{\underline{i}})\Big) \\
&= \Big((d'^p_{CE})^t \circ {}^3\varphi^p(f)\Big)\Big(u \otimes x_{\underline{i}}\Big).
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.4.6. *L'application*

$$^3\Phi^p : H^p\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}\Big(L'_*(\mathcal{A}), \mathcal{A}\Big), (b'_*)^t\Big) \to H^p\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\Big(\mathcal{U} \otimes \Lambda^*\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}\Big), (d'^*_{CE})^t\Big)$$

induite par $^3\varphi^p$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels d'inverse* $^3\Psi^p := H^*(^3\psi^p)$.

Etape 4 : Construction de $^4\varphi^*$ et $^4\psi^*$

Rappelons que dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U} \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$, le symbole de Kronecker $\delta^a_{x_{\underline{i}}}$ est défini pour $\underline{i} \in I_p$ et $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ par $\delta^a_{x_{\underline{i}}}(1 \otimes x_{\underline{i}}) = a$ et $\delta^a_{x_{\underline{i}}}(1 \otimes x_{\underline{j}}) = 0$ pour $\underline{j} \neq \underline{i}$.

Proposition 3.4.7. *Soit* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\Big(\mathcal{U} \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}\Big)$. *L'application*

$$^4\varphi^p : \Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\Big(\mathcal{U} \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}\Big), (d'^p_{CE})^t\Big) \to \Big(L^p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^p\Big)$$

définie par

$$^4\varphi^p(f) = \sum_{\underline{i} \in I_p} x^*_{\underline{i}} \otimes f(1 \otimes x_{\underline{i}})$$

est un isomorphisme de complexes. L'inverse est l'application

$$^4\psi^p : \Big(L^p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^p\Big) \to \Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\Big(\mathcal{U} \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}\Big), (d'^p_{CE})^t\Big)$$

définie pour $x^*_{\underline{i}} \otimes a \in L^p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ *par*

$$^4\psi^p(x^*_{\underline{i}} \otimes a) = \delta^a_{\underline{i}}.$$

Proposition 3.4.8. *L'application*

$$^4\Phi^p : H^p\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\Big(\mathcal{U} \otimes \Lambda^*\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}\Big), (d'^*_{CE})^t\Big) \to H^p\Big(L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^*\Big)$$

induite par $^4\varphi^p$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels d'inverse* $^4\Psi^p := H^*(^4\psi^p)$.

Etape 5 : Construction de l'isomorphisme φ^* et ψ^*

On pose $\varphi^* = {}^4\varphi^* \circ {}^3\varphi^* \circ {}^2\varphi^* \circ {}^1\varphi^*$ et $\psi^* = {}^1\psi^* \circ {}^2\psi^* \circ {}^3\psi^* \circ {}^4\psi^*$. Les applications

$$\Big(\overline{C}^*_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}), b^*\Big) \underset{\psi^*}{\overset{\varphi^*}{\rightleftarrows}} \Big(L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^*\Big)$$

sont des morphismes de complexes tels que $\varphi^* \circ \psi^* = \mathrm{id}_{L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})}$. En effet, pour $i \neq 2$, les applications $^i\varphi^*$ et $^i\psi^*$ sont des isomorphismes réciproques l'une de l'autre. Pour $i = 2$, on a $^2\varphi^* \circ {}^2\psi^* = \mathrm{id}_{L'_*(\mathcal{A})}$ donc $\varphi^* \circ \psi^* = \mathrm{id}_{L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})}$.

Corollaire 3.4.9.

1. *L'application* Φ^p *induite par* φ^p

$$\Phi^p : H^p\Big(\overline{C}^*_{\mathbb{K}}(\mathcal{A},\mathcal{A}), b^*\Big) \to H^p\Big(L^*(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^*\Big)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.*

2. *L'application* Ψ^p *induite par* ψ^p

$$\Psi^p : H^p\Big(L^*(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^*\Big) \to H^p\Big(\overline{C}^*_{\mathbb{K}}(\mathcal{A},\mathcal{A}), b^*\Big)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.*

Remarque 3.4.10.

1. *Pour* $f \in \overline{C}^p_{\mathbb{K}}(\mathcal{A},\mathcal{A})$*, on a*

$$\varphi^p(f) = \sum_{\underline{i}\in I_p}\left(x^*_{\underline{i}} \otimes f\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\sigma)\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})}\Big)\right).$$

2. *Pour* $x^*_{\underline{i}} \otimes a \in L^p(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ *et* $a_1\otimes\cdots\otimes a_p \in \mathcal{A}^{\otimes p}$*, on a*

$$\psi^p(x^*_{\underline{i}}\otimes a)(a_1\otimes\cdots\otimes a_p) = {}^3\psi^p(\delta^a_{x_{\underline{i}}})\Big(\eta'_p(1\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_p\otimes 1)\Big).$$

3. *Pour* $(x_{j_1}\otimes\cdots\otimes x_{j_p}) \in F_1(\overline{\mathcal{A}})^{\otimes p} = \mathfrak{g}^{\otimes p}$*, on a*

$$\begin{aligned}\psi^p(x^*_{\underline{i}}\otimes a)(x_{k_1}\otimes\cdots\otimes x_{k_p}) &= \delta^a_{x_{\underline{i}}}(1\otimes x_{k_1}\wedge\cdots\wedge x_{k_p}) && \text{si } k_1>\cdots>k_p\\ &= 0 && \text{ailleurs.}\end{aligned}$$

3.5 Construction du produit cup $\cup_{Lie}$ sur les cochaines

Pour $\underline{i} \in I_p$, soit $\mathfrak{S}_{\underline{i}}$ le groupe des permutations de $\mathrm{Supp}(\underline{i}) = \{i_1,\ldots,i_p\}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}$, on pose

$$x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} = x_{\sigma(i_1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(i_p)}.$$

Introduisons quelques définitions.

Définition 3.5.1. *Le produit*

$$\circledast : \Big(\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\otimes p}\Big)\otimes\Big(\Lambda^q(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\otimes q}\Big)\to\Lambda^{p+q}(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\otimes p+q}$$

est défini pour $(x^*_{\underline{i}}\otimes\underline{u})\in\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\otimes p}$ *et* $(x^*_{\underline{j}}\otimes\underline{v})\in\Lambda^q(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\otimes q}$ *par*

$$\Big(x^*_{\underline{i}}\otimes\underline{u}\Big)\circledast\Big(x^*_{\underline{j}}\otimes\underline{v}\Big)=x^*_{\underline{i}}\wedge x^*_{\underline{j}}\otimes(\underline{u}\otimes\underline{v}).$$

On vérifie immédiatement que le produit $\circledast$ est associatif.

Définition 3.5.2. *Pour* $1\leq p\leq n$*, on définit l'élément* S_p *de* $\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\otimes p}$ *par*

$$S_p=\sum_{\underline{i}\in I_p}\Big(x^*_{\underline{i}}\otimes\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}}\varepsilon(\sigma)\,x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})}\Big).$$

Soit $\underline{\ell}=(\ell_1,\ldots,\ell_{q+1})$ un élément de I_{q+1} et soit $\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}$ le groupe des permutations de $\mathrm{Supp}(\underline{\ell})=\{\ell_1,\ldots,\ell_{q+1}\}$. Pour h entier compris entre 1 et $q+1$, on introduit le stabilisateur $\mathfrak{S}_{\underline{\ell},h}$ de $\{\ell_h\}$ dans $\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}$:

$$\mathfrak{S}_{\underline{\ell},h}=\Big\{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}\,|\,\tau(\ell_h)=\ell_h\Big\}.$$

Posons $\mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{\ell}}=\Big\{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}\,|\,\sigma(\ell_1)=\ell_h\Big\}$. De la réunion disjointe

$$\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}=\coprod_{h=1}^{q+1}\mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{\ell}},$$

on déduit que pour l'élément S_{q+1} de $\Lambda^{q+1}(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{U}^{\otimes q+1}$, on a l'égalité

$$S_{q+1}=\sum_{\underline{\ell}\in I_{q+1}}\Big(x^*_{\underline{\ell}}\otimes\sum_{h=1}^{q+1}\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{\ell}}}\varepsilon(\sigma)\,u_{\ell_h}\otimes u_{\sigma(\ell_2)}\cdots\otimes u_{\sigma(\ell_{q+1})}\Big)\Big).\tag{3.5.0.1}$$

Remarque 3.5.3. *Soit* h *un entier compris entre* 1 *et* $q+1$ *et soit* σ_h *la permutation circulaire* $\sigma_h=(\ell_h,\ell_{h-1},\ldots,\ell_2,\ell_1)\in\mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{\ell}}$*. Si* τ *est un élément de* $\mathfrak{S}_{\underline{\ell},h}$ *alors* $\tau\circ\sigma_h$ *appartient à* $\mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{\ell}}$ *avec* $\varepsilon(\tau\circ\sigma_h)=\varepsilon(\tau)(-1)^{h-1}$.

Lemme 3.5.4. *Pour* $p+q\leq n$*, le produit* $\circledast$ *satisfait la relation*

$$S_p\circledast S_q=S_{p+q}.$$

Démonstration. Montrons dans un premier temps la relation $S_1 \circledast S_1 = S_2$. On a

$$\begin{aligned}
S_1 \circledast S_1 &= \Big(\sum_{\underline{i}\in I_1} x_i^* \otimes x_i\Big) \circledast \Big(\sum_{\underline{j}\in I_1} x_j^* \otimes x_j\Big) \\
&= \Big(\sum_{1\le i\le n} x_i^* \otimes x_i\Big) \circledast \Big(\sum_{1\le j\le n} x_j^* \otimes x_j\Big) \\
&= \sum_{1\le i<j\le n} x_i^* \wedge x_j^* \otimes (x_i \otimes x_j) + \sum_{1\le j<i\le n} x_i^* \wedge x_j^* \otimes (x_i \otimes x_j) \\
&= \sum_{1\le i<j\le n} x_i^* \wedge x_j^* \otimes (x_i \otimes x_j) - \sum_{1\le j<i\le n} x_j^* \wedge x_i^* \otimes (x_i \otimes x_j) \\
&= \sum_{1\le i<j\le n} x_i^* \wedge x_j^* \otimes (x_i \otimes x_j) - \sum_{1\le i<j\le n} x_i^* \wedge x_j^* \otimes (x_j \otimes x_i) \\
&= S_2.
\end{aligned}$$

Montrons à présent la relation $S_1 \circledast S_q = S_{1+q}$. Fixons un entier $q \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
S_1 \circledast S_q &= \Bigg(\sum_{\underline{i}\in I_1} x_{i_1}^* \otimes x_{i_1}\Bigg) \circledast \sum_{\underline{j}\in I_q} \Bigg(x_{\underline{j}}^* \otimes \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\, x_{\tau(\underline{j})}^{\otimes}\Bigg) \\
&= \sum_{1\le i_1\le n} \Bigg(\sum_{\underline{j}\in I_q} \Bigg(x_{i_1}^* \wedge x_{\underline{j}}^* \otimes \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\, x_{i_1} \otimes x_{\tau(\underline{j})}^{\otimes}\Bigg)\Bigg).
\end{aligned}$$

Posons $S_1 \circledast S_q = \sum_{h=1}^{q+1} A_h$ avec

$$A_1 = \sum_{1\le i_1<j_1<\cdots<j_q\le n} \Bigg(x_{i_1}^* \wedge x_{\underline{j}}^* \otimes \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\, x_{i_1} \otimes x_{\tau(\underline{j})}^{\otimes}\Bigg),$$

pour $2 \leq h \leq q$,

$$A_h = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_{h-1}<i_1<j_h<\cdots<j_q\le n} \Bigg(x_{i_1}^* \wedge x_{\underline{j}}^* \otimes \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\, x_{i_1} \otimes x_{\tau(\underline{j})}^{\otimes}\Bigg)$$

et

$$A_{q+1} = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_q<i_1\le n} \Bigg(x_{i_1}^* \wedge x_{\underline{j}}^* \otimes \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\, x_{i_1} \otimes x_{\tau(\underline{j})}^{\otimes}\Bigg).$$

Calcul de A_1 :
Posons $\ell_1 = i_1$ et $\ell_s = j_{s-1}$ pour $2 \leq s \leq q+1$. Soit $\underline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_{q+1})$ et soit $\underline{\ell'} = (\ell_2, \dots, \ell_{q+1}) = \underline{j}$. On a donc

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_{q+1} \leq n} \Big(x^*_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge x^*_{\ell_{q+1}} \otimes \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{\ell'}}} \varepsilon(\tau)\, x_{\ell_1} \otimes x_{\tau(\ell_2)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau(\ell_{q+1})} \Big) \\ &= \sum_{\underline{\ell} \in I_{q+1}} \Big(x^*_{\underline{\ell}} \otimes \sum_{\tau' \in \mathfrak{S}_{\underline{\ell},1}} \varepsilon(\tau')\, x_{\ell_1} \otimes x_{\tau'(\ell_2)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau'(\ell_{q+1})} \Big) \\ &= \sum_{\underline{\ell} \in I_{q+1}} \Big(x^*_{\underline{\ell}} \otimes \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^{(1)}_{\underline{\ell}}} \varepsilon(\sigma)\, x_{\ell_1} \otimes x_{\sigma(\ell_2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(\ell_{q+1})} \Big). \end{aligned}$$

Calcul de A_h pour $2 \leq h \leq q$:
Pour $1 \leq s < h$, posons $\ell_s = j_s$, $\ell_h = i_1$, et pour $h < s \leq q+1$, posons $\ell_s = j_{s-1}$. Posons $\underline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_{q+1}) = (j_1, \dots, j_{h-1}, i_1, j_h, \dots, j_q)$ où $\underline{\ell}$ est un élément de I_{q+1}. On a

$$x^*_{i_1} \wedge x^*_{\underline{j}} = x^*_{\ell_h} \wedge x^*_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}^*_{\ell_h} \wedge \cdots \wedge x^*_{\ell_{q+1}} = (-1)^{h-1}\, x^*_{\ell_1} \wedge x^*_{\ell_2} \wedge \cdots \wedge x^*_{\ell_{q+1}} = (-1)^{h-1}\, x^*_{\underline{\ell}}.$$

Pour $\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{j}}$, on a

$$x_{i_1} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})} = x_{\ell_h} \otimes x_{\tau(\ell_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau(\ell_{h-1})} \otimes x_{\tau(\ell_{h+1})} \otimes \dots x_{\tau(\ell_{q+1})}.$$

Posons $\underline{\ell'} = (\ell_1, \dots, \ell_{h-1}, \ell_{h+1}, \dots, \ell_{q+1}) = \underline{j}$. Il existe un isomorphsime de groupe

$$\gamma : \mathfrak{S}_{\underline{\ell'}} \to \mathfrak{S}_{\underline{\ell},h}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} x_{i_1} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})} &= x_{i_1} \otimes x_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau(j_{h-1})} \otimes x_{\tau(j_h)} \otimes \dots x_{\tau(j_q)} \\ &= x_{\ell_h} \otimes x_{\tau(\ell_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau(\ell_{h-1})} \otimes x_{\tau(\ell_{h+1})} \otimes \dots x_{\tau(\ell_{q+1})} \\ &= x_{\tau'(\ell_h)} \otimes x_{\tau'(\ell_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau'(\ell_{h-1})} \otimes x_{\tau'(\ell_{h+1})} \otimes \dots x_{\tau'(\ell_{q+1})} \text{ où } \tau' \in \mathfrak{S}_{\underline{\ell},h} \\ &= \tau' \cdot (x_{\ell_h} \otimes x_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes x_{\ell_{h-1}} \otimes x_{\ell_{h+1}} \otimes \dots x_{\ell_{q+1}}) \\ &= \Big(\tau' \circ \sigma_h\Big) \cdot (x_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes x_{\ell_h} \otimes \dots x_{\ell_{q+1}}) \text{ avec } \tau' \circ \sigma_h \in \mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{\ell}} \\ &= \Big(\tau' \circ \sigma_h\Big) \cdot x^{\otimes}_{\underline{\ell}}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
A_h &= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_{h-1}<i_1<j_h<\cdots<j_q\le n} \left(x_{i_1}^* \wedge x_{\underline{j}}^* \otimes \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\, x_{i_1} \otimes x_{\tau(\underline{j})}^{\otimes} \right) \\
&= \sum_{1\le \ell_1<\cdots<\ell_{q+1}\le n} \left((-1)^{h-1}\, x_{\underline{\ell}}^* \otimes \sum_{\tau'\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell},h}} \varepsilon(\tau') \left((\tau'\circ\sigma_h)\cdot x_{\underline{\ell}}^{\otimes} \right) \right) \\
&= \sum_{\underline{\ell}\in I_{q+1}} \left(x_{\underline{\ell}}^* \otimes \sum_{\tau'\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell},h}} (-1)^{h-1}\varepsilon(\tau') \left((\tau'\circ\sigma_h)\cdot x_{\underline{\ell}}^{\otimes} \right) \right).
\end{aligned}$$

Or, d'après la remarque 3.5.3, on a

$$(-1)^{h-1}\varepsilon(\tau')\Big((\tau'\circ\sigma_h)\cdot x_{\underline{\ell}}^{\otimes}\Big) = \varepsilon(\sigma)(\sigma\cdot x_{\underline{\ell}}^{\otimes}) = \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(\underline{\ell})}^{\otimes} \quad \text{avec } \sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}^{(h)}.$$

On a donc

$$A_h = \sum_{\underline{\ell}\in I_{q+1}} \left(x_{\underline{\ell}}^* \otimes \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}^{(h)}} \varepsilon(\sigma)\, x_{\ell_h} \otimes x_{\sigma(\ell_2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(\ell_{q+1})} \right).$$

<u>Calcul de A_{q+1} :</u>
D'une manière analogue, on a

$$\begin{aligned}
A_{q+1} &= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_q<i_1\le n} \left(x_{i_1}^* \wedge x_{\underline{j}}^* \otimes \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\, x_{i_1} \otimes x_{\tau(\underline{j})}^{\otimes} \right) \\
&= \sum_{\underline{\ell}\in I_{q+1}} \left(x_{\underline{\ell}}^* \otimes \sum_{\tau'\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell},q+1}} (-1)^{q}\varepsilon(\tau') \left((\tau'\circ\sigma_{q+1})\cdot x_{\underline{\ell}}^{\otimes} \right) \right) \\
&= \sum_{\underline{\ell}\in I_{q+1}} \left(x_{\underline{\ell}}^* \otimes \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}^{(q+1)}} \varepsilon(\sigma) x_{\ell_{q+1}} \otimes x_{\sigma(\ell_2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(\ell_{q+1})} \right).
\end{aligned}$$

<u>Calcul de $S_1 \circledast S_q$:</u>
On a

$$\begin{aligned}
S_1 \circledast S_q &= \sum_{\underline{\ell}\in I_{q+1}} \Big(x^*_{\underline{\ell}} \otimes \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}^{(1)}_{\underline{\ell}}} \varepsilon(\sigma)\, x_{\ell_1} \otimes x_{\sigma(\ell_2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(\ell_{q+1})} \Big) \\
&+ \sum_{h=1}^{q+1} \Big(\sum_{\underline{\ell}\in I_{q+1}} \Big(x^*_{\underline{\ell}} \otimes \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{\ell}}} \varepsilon(\sigma)\, x_{\ell_h} \otimes x_{\sigma(\ell_2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(\ell_{q+1})} \Big)\Big) \\
&+ \sum_{\underline{\ell}\in I_{q+1}} \Big(x^*_{\underline{\ell}} \otimes \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}^{(q+1)}_{\underline{\ell}}} \varepsilon(\sigma) x_{\ell_{q+1}} \otimes x_{\sigma(\ell_2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(\ell_{q+1})} \Big).
\end{aligned}$$

La réunion disjointe $\mathfrak{S}_{\underline{\ell}} = \coprod_{h=1}^{q+1} \mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{\ell}}$ et l'égalité (3.5.0.1) fournit

$$\begin{aligned}
S_1 \circledast S_q &= \sum_{\underline{\ell}\in I_{q+1}} x^*_{\underline{\ell}} \otimes \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(\ell_1)} \otimes x_{\sigma(\ell_2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(\ell_{q+1})} \\
&= \sum_{\underline{\ell}\in I_{q+1}} x^*_{\underline{\ell}} \otimes \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}} \varepsilon(\sigma)\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{\ell})} \\
&= S_{q+1}
\end{aligned}$$

La relation $S_p \circledast S_q = S_{p+q}$ en résulte par récurrence grâce à l'associativité de $\circledast$:

$$S_{p+1} \circledast S_q = S_{1+p} \circledast S_q = (S_1 \circledast S_p) \circledast S_q = S_1 \circledast (S_p \circledast S_q) = S_1 \circledast S_{p+q} = S_{p+q+1}.$$

□

Définition 3.5.5. *Fixons deux entiers p et q avec $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq n$. Posons $r = p + q$ et supposons $r \leq n$. Soient $\underline{i} \in I_p$ et $\underline{j} \in I_q$ deux multi-indices à supports disjoints.*

1. *On désigne par $\underline{i}\#\underline{j}$ la liste ordonnée des éléments de $\mathrm{Supp}(\underline{i}) \cup \mathrm{Supp}(\underline{j})$.*
2. *Le nombre $\alpha(\underline{i},\underline{j}) \in \{1,-1\}$ est défini par $x_{\underline{i}} \wedge x_{\underline{j}} = \alpha(\underline{i},\underline{j})\, x_{\underline{i}\#\underline{j}}$.*
3. *Pour $\underline{\ell} \in I_r$, on définit*

$$I^{\underline{\ell}}_{p,q} = \Big\{ (\underline{i},\underline{j}) \in I_p \times I_q \,|\, \mathrm{Supp}(\underline{i}) \cap \mathrm{Supp}(\underline{j}) = \varnothing \,\mathrm{et}\, \underline{i}\#\underline{j} = \underline{\ell} \Big\}.$$

Remarque 3.5.6. *Pour tous entiers p, q et r avec $r = p+q$, on a la réunion disjointe*

$$\Big\{ (\underline{i},\underline{j}) \in I_p \times I_q \,|\, \mathrm{Supp}(\underline{i}) \cap \mathrm{Supp}(\underline{j}) = \varnothing \Big\} = \cup_{\underline{\ell}\in I_r} I^{\underline{\ell}}_{p,q}.$$

En effet, pour $\underline{\ell}' \neq \underline{\ell}$ dans I_{p+q}, on a $I^{\underline{\ell}'}_{p,q} \cap I^{\underline{\ell}}_{p,q} = \varnothing$.

Corollaire 3.5.7. *Dans $\Lambda^{p+q}(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^{\otimes p+q}$, On a l'égalité*

$$\sum_{\underline{i}\in I_p}\sum_{\underline{j}\in I_q}\Big(x^*_{\underline{i}} \wedge x^*_{\underline{j}} \otimes (x^{\otimes}_{\underline{i}} \otimes x^{\otimes}_{\underline{j}})\Big) = \sum_{\underline{\ell}\in I_{p+q}}\Big(x^*_{\underline{\ell}} \otimes \Big(\sum_{(\underline{i},\underline{j})\in I^{\underline{\ell}}_{p,q}} \alpha(\underline{i},\underline{j})\, x^{\otimes}_{\underline{i}} \otimes x^{\otimes}_{\underline{j}}\Big)\Big).$$

Démonstration. D'après la remarque 3.5.6, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{i}\in I_p}\sum_{\underline{j}\in I_q}\Big(x^*_{\underline{i}} \wedge x^*_{\underline{j}} \otimes (x^{\otimes}_{\underline{i}} \otimes x^{\otimes}_{\underline{j}})\Big) &= \sum_{\underline{\ell}\in I_{p+q}}\ \sum_{(\underline{i},\underline{j})\in I^{\underline{\ell}}_{p,q}}\Big(x^*_{\underline{i}} \wedge x^*_{\underline{j}} \otimes (x^{\otimes}_{\underline{i}} \otimes x^{\otimes}_{\underline{j}})\Big)\\
&= \sum_{\underline{\ell}\in I_{p+q}}\ \sum_{(\underline{i},\underline{j})\in I^{\underline{\ell}}_{p,q}}\Big(\alpha(\underline{i},\underline{j})\, x^*_{\underline{\ell}} \otimes (x^{\otimes}_{\underline{i}} \otimes x^{\otimes}_{\underline{j}})\Big)\\
&= \sum_{\underline{\ell}\in I_{p+q}}\Big(x^*_{\underline{\ell}} \otimes \Big(\sum_{(\underline{i},\underline{j})\in I^{\underline{\ell}}_{p,q}} \alpha(\underline{i},\underline{j})\, x^{\otimes}_{\underline{i}} \otimes x^{\otimes}_{\underline{j}}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.5.8. *Pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathcal{A}^{\otimes p+q}, \mathcal{A}\big)$, on a l'égalité*

$$\sum_{\underline{i}\in I_p}\sum_{\underline{j}\in I_q} x^*_{\underline{i}} \wedge x^*_{\underline{j}} \otimes f\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})}\Big) = \sum_{\underline{k}\in I_{p+q}} x^*_{\underline{k}} \otimes f\Big(\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{\underline{k}}} \varepsilon(\tau)\, x^{\otimes}_{\pi(\underline{k})}\Big).$$

Démonstration. D'après le corollaire 3.5.7, on a

$$\begin{aligned}
&S_p \circledast S_q\\
&= \sum_{\underline{i}\in I_p}\Big(x^*_{\underline{i}} \otimes \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\sigma)\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})}\Big) \circledast \sum_{\underline{j}\in I_q}\Big(x^*_{\underline{j}} \otimes \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\, x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})}\Big)\\
&= \sum_{\underline{i}\in I_p}\ \sum_{\underline{j}\in I_q}\Big(x^*_{\underline{i}} \wedge x^*_{\underline{j}} \otimes \Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})}\Big)\Big)\\
&= \sum_{\underline{\ell}\in I_{p+q}}\ \sum_{(\underline{i},\underline{j})\in I^{\underline{\ell}}_{p,q}}\Big(\alpha(\underline{i},\underline{j}) x^*_{\underline{\ell}} \otimes \Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})}\Big)\Big)\\
&= \sum_{\underline{\ell}\in I_{p+q}}\Big(x^*_{\underline{\ell}} \otimes \Big(\sum_{(\underline{i},\underline{j})\in I^{\underline{\ell}}_{p,q}}\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\alpha(\underline{i},\underline{j})\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Mais, d'après le lemme 3.5.4, on a $S_p \circledast S_q = S_{p+q}$. D'où,

$$\sum_{\underline{\ell}\in I_{p+q}} x^*_{\underline{\ell}} \otimes \Big(\sum_{(\underline{i},\underline{j})\in I^{\underline{\ell}}_{p,q}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\alpha(\underline{i},\underline{j})\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})} \Big) = \sum_{\underline{\ell}\in I_{p+q}} x^*_{\underline{\ell}} \otimes \Big(\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}} \varepsilon(\pi)\, x^{\otimes}_{\pi(\underline{\ell})} \Big).$$

Or, $\left\{ x^*_{\underline{\ell}},\, \underline{\ell} \in I_r \right\}$ est une base de $\Lambda^r(\mathfrak{g}^*)$ donc

$$\sum_{(\underline{i},\underline{j})\in I^{\underline{\ell}}_{p,q}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\alpha(\underline{i},\underline{j})\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})} = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}} \varepsilon(\pi)\, x^{\otimes}_{\pi(\underline{\ell})}.$$

Par conséquent,

$$f\Big(\sum_{(\underline{i},\underline{j})\in I^{\underline{\ell}}_{p,q}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\alpha(\underline{i},\underline{j})\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})} \Big) = f\Big(\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}} \varepsilon(\pi)\, x^{\otimes}_{\pi(\underline{\ell})} \Big)$$

et par suite

$$x^*_{\underline{\ell}} \otimes f\Big(\sum_{(\underline{i},\underline{j})\in I^{\underline{\ell}}_{p,q}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\alpha(\underline{i},\underline{j})\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})} \Big) = x^*_{\underline{\ell}} \otimes f\Big(\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}} \varepsilon(\pi)\, x^{\otimes}_{\pi(\underline{\ell})} \Big).$$

On déduit que

$$\sum_{\underline{\ell}\in I_{p+q}} x^*_{\underline{\ell}} \otimes f\Big(\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}} \varepsilon(\pi)\, x^{\otimes}_{\pi(\underline{\ell})} \Big)$$

$$= \sum_{\underline{\ell}\in I_{p+q}} x^*_{\underline{\ell}} \otimes f\Big(\sum_{(\underline{i},\underline{j})\in I^{\underline{\ell}}_{p,q}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\alpha(\underline{i},\underline{j})\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})} \Big)$$

$$= \sum_{\underline{\ell}\in I_{p+q}} \sum_{(\underline{i},\underline{j})\in I^{\underline{\ell}}_{p,q}} \alpha(\underline{i},\underline{j}) x^*_{\underline{\ell}} \otimes f\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})} \Big)$$

$$= \sum_{\underline{i}\in I_p} \sum_{\underline{j}\in I_q} x^*_{\underline{i}} \wedge x^*_{\underline{j}} \otimes f\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})} \Big).$$

□

Définition 3.5.9. *Pour p et q entiers positifs, définissons le produit*

$$\cup_{Lie} : L^p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \otimes L^q(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \to L^{p+q}(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \tag{3.5.0.2}$$

par la formule suivante. Soient $\underline{i} \in I_p$, $\underline{j} \in I_q$, $x^*_{\underline{i}} \in \Lambda^p \mathfrak{g}^*$, $x^*_{\underline{j}} \in \Lambda^q \mathfrak{g}^*$, $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ et $a' \in \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$. On pose

$$(x^*_{\underline{i}} \otimes a) \cup_{Lie} (x^*_{\underline{j}} \otimes a') = x^*_{\underline{i}} \wedge x^*_{\underline{j}} \otimes aa'$$

où aa' est le produit dans l'algèbre $\mathcal{A}$.

Proposition 3.5.10. *Soit $\varphi^* : \left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\overline{\mathcal{A}}^{\otimes *}, \mathcal{A}), b^*\right) \to \left(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}, d^*\right)$ l'application construite dans la section 3.4. Soient p et q deux entiers positifs avec $p + q \leq n$. Soit $f \in \overline{C}^p_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ et soit $g \in \overline{C}^q_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$. On a la relation*

$$\varphi^p(f) \cup_{Lie} \varphi^q(g) = \varphi^{p+q}(f \cup g).$$

Démonstration. On a

$$\varphi^p(f) = \sum_{\underline{i} \in I_p} \left(x^*_{\underline{i}} \otimes f\Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\sigma)\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \Big) \right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\varphi^p(f) \cup_{Lie} \varphi^q(g) \\
&= \sum_{\underline{i} \in I_p} \left(x^*_{\underline{i}} \otimes f\Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\sigma)\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \Big) \right) \cup_{Lie} \sum_{\underline{j} \in I_q} \left(x^*_{\underline{j}} \otimes \Big(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\, x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})} \Big) \right) \\
&= \sum_{\underline{i} \in I_p} \sum_{\underline{j} \in I_q} \left(x^*_{\underline{i}} \wedge x^*_{\underline{j}} \otimes \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\, f(x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})}) g(x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})}) \Big) \right)
\end{aligned}$$

D'après la définition du produit cup rappelée en 1.3.1.1, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\varphi^p(f) \cup_{Lie} \varphi^q(g) \\
&= \sum_{\underline{i} \in I_p} \sum_{\underline{j} \in I_q} \left(x^*_{\underline{i}} \wedge x^*_{\underline{j}} \otimes \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\, (f \cup g)\big(x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})} \big) \Big) \right) \\
&= \sum_{\underline{i} \in I_p} \sum_{\underline{j} \in I_q} \left(x^*_{\underline{i}} \wedge x^*_{\underline{j}} \otimes (f \cup g)\Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\, x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{j})} \Big) \right).
\end{aligned}$$

Or, d'après le corollaire 3.5.8, on a

$$\begin{aligned}\varphi^p(f)\cup_{Lie}\varphi^q(g) &= \sum_{\underline{\ell}\in I_{p+q}} x^*_{\underline{\ell}}\otimes(f\cup g)\Big(\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{\underline{\ell}}}\varepsilon(\pi)\,x^{\otimes}_{\pi(\underline{\ell})}\Big)\\ &= \varphi^{p+q}(f\cup g).\end{aligned}$$

□

Proposition 3.5.11. *Soient p et q des entiers naturels. Soient $(x_{\underline{i}}\otimes u)\in L^p(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ et $(x^*_{\underline{j}}\otimes v)\in L^q(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$. On a*

$$d^{p+q}\Big((x^*_{\underline{i}}\otimes u)\cup_{Lie}(x^*_{\underline{j}}\otimes v)\Big)=d^p(x^*_{\underline{i}}\otimes u)\cup_{Lie}(x^*_{\underline{j}}\otimes v)+(-1)^p(x^*_{\underline{i}}\otimes u)\cup_{Lie}d^q(x^*_{\underline{j}}\otimes v).$$

Démonstration. Cette formule est une conséquence immédiate de la formule analogue 1.3.1.2 pour le produit cup $\cup$, de la relation $\varphi^*\circ\psi^*=\mathrm{id}_{L^*(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})}$ du lemme 3.4.1 et de la formule $\varphi^p(f)\cup_{Lie}\varphi^q(g)=\varphi^{p+q}(f\cup g)$ de la proposition 3.5.10.

□

3.6 Définition du $\cup_{Lie}$ en cohomologie

Soient p et q deux entiers naturels. Définissons le produit cup :

$$\cup_{Lie}: H^p_{Lie}(\mathfrak{g},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})\otimes H^q_{Lie}(\mathfrak{g},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})\to H^{p+q}_{Lie}(\mathfrak{g},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}).$$

Pour $\alpha'\in H^p_{Lie}(\mathfrak{g},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ et $\beta'\in H^q_{Lie}(\mathfrak{g},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$, le produit cup $\alpha'\cup_{Lie}\beta'\in H^{p+q}_{Lie}(\mathfrak{g},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ est défini sur les cochaînes à partir du produit également notée $\cup_{Lie}$

$$\cup_{Lie}: L^p(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})\otimes L^q(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})\to L^{p+q}(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}).$$

Ecrivons α' et β' sous la forme $\alpha'=\mathrm{cl}(x^*_{\underline{i}}\otimes u)$ et $\beta'=\mathrm{cl}(x^*_{\underline{j}}\otimes v)$ où $x^*_{\underline{i}}\otimes u\in L^p(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ et $x^*_{\underline{j}}\otimes v\in L^q(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ sont des d^*-cocyles. D'après le lemme 3.5.11, la formule

$$d^{p+q}\Big(x^*_{\underline{i}}\otimes u\cup_{Lie}x^*_{\underline{j}}\otimes v\Big)=d^p(x^*_{\underline{i}}\otimes u)\cup_{Lie}x^*_{\underline{j}}\otimes v+(-1)^p x^*_{\underline{i}}\otimes u\cup_{Lie}d^q(x^*_{\underline{j}}\otimes v)$$

montre que $x^*_{\underline{i}}\otimes u\cup_{Lie}x^*_{\underline{j}}\otimes v$ est un d^*-cocycle dès que $x^*_{\underline{i}}\otimes u$ et $x^*_{\underline{j}}\otimes v$ le sont. On définit donc $\alpha'\cup_{Lie}\beta'\in H^{p+q}_{Lie}(\mathfrak{g},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ comme la classe de cohomologie du d^*-cocycle $x^*_{\underline{i}}\otimes u\cup_{Lie}x^*_{\underline{j}}\otimes v$.

Remarque 3.6.1. *Pour $\mathcal{A}=\mathcal{U}_{f=0}(\mathfrak{g})$, le produit cup $\cup_{Lie}$ coïncide avec le produit cup défini par Cartan et Eilenberg ([2], p. 276) à partir de la diagonale.*

Proposition 3.6.2. *Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $H^*(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ est une algèbre graduée commutative via le cup produit $\cup_{Lie}$.*

Démonstration. C'est une conséquence du résultat analogue pour $\Big(H^*(\mathcal{A}, \mathcal{A}), \cup\Big)$ et la proposition 3.5.10. Soient p et q deux entiers naturels avec $p+q \leq n$. Soient $\alpha' \in H^p_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ et $\beta' \in H^q_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$. Puisque Φ^* est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, il existe des éléments uniques $\alpha \in H^p(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ et $\alpha \in H^q(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ tels que $\alpha' = \Phi^p(\alpha)$ et $\beta' = \Phi^q(\beta)$. En prenant des représentant des éléments α et β et en utilisant la proposition 3.5.10, on a immédiatement $\Phi^p(\alpha) \cup_{Lie} \Phi^q(\beta) = \Phi^{p+q}(\alpha \cup \beta)$. Or, d'après le théorème 1.3.1, l'algèbre $\Big(H^*(\mathcal{A}, \mathcal{A}), \cup\Big)$ est une algèbre graduée commutative. Alors on a

$$\begin{aligned} \alpha' \cup_{Lie} \beta' &= \Phi^p(\alpha) \cup_{Lie} \Phi^q(\beta) \\ &= \Phi^{p+q}(\alpha \cup \beta) \\ &= \Phi^{p+q}((-1)^{pq} \beta \cup \alpha) \\ &= (-1)^{pq}\, \Phi^q(\beta) \cup_{Lie} \Phi^p(\alpha). \\ &= (-1)^{pq}\, \beta' \cup_{Lie} \alpha', \end{aligned}$$

ce qui montre que la $\mathbb{K}$-algèbre $\Big(H^*_{Lie}(\mathfrak{g}, A^{\mathrm{ad}}) \,,\, \cup_{Lie}\Big)$ est une algèbre graduée commutative. □

En conclusion, on a montré :

Théorème 3.6.3. *L'application*

$$\Phi^* : \Big(H^*(\mathcal{A}, \mathcal{A}), \cup\Big) \;\cong\; \Big(H^*_{Lie}(\mathfrak{g}, A^{\mathrm{ad}}) \,,\, \cup_{Lie}\Big)$$

est un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives.

Chapitre 4

Le crochet de Gerstenhaber

Dans ce chapitre, nous allons donner une formule explicite pour le crochet de Gerstenhaber pour la cohomologie de $\mathcal{A}$.

Soit p un entier compris entre 1 et n. On rappelle que I_p désigne l'ensemble des p-multi-indices ordonnés :

$$I_p = \{\, \underline{i} = (i_1, \dots, i_p) \in [\![1, n]\!]^p \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n \}\,.$$

4.1 Réecriture du crochet de Gerstenhaber

En 2015, C. Negron et S. Witherspoon ont proposé une construction du crochet de Gerstenhaber à partir d'une résolution de l'algèbre qui n'est pas nécessairement la résolution bar.

Afin d'introduire cette nouvelle expression du crochet, quelques définitions sont nécessaires.

On introduit la coalgèbre tensorielle graduée

$$\mathrm{T}(\overline{\mathcal{A}}) = \oplus_{p\geq 0}\mathrm{T}^p(\overline{\mathcal{A}})$$

avec $\mathrm{T}^p(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}^{\otimes p}$. Le coproduit de cette coalgèbre

$$\Delta_T : \mathrm{T}(\overline{\mathcal{A}}) \to \mathrm{T}(\overline{\mathcal{A}}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{T}(\overline{\mathcal{A}})$$

est l'application $\mathbb{K}$-linéaire définie par

$$\Delta_T(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p) = \sum_{k=0}^{p}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes 1) \otimes (1 \otimes a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_p)$$

où $a_1, \dots, a_p \in \overline{\mathcal{A}}$.

Introduisons le $\mathcal{A}^e$-module $\overline{\mathrm{Bar}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \mathrm{T}(\overline{\mathcal{A}}) \otimes \mathcal{A}$, avec $\overline{\mathrm{Bar}}_r(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes r} \otimes \mathcal{A}$ pour tout entier $r \geq 0$. Pour alléger les notations, on pose

$$B := \overline{\mathrm{Bar}}(\mathcal{A}) \quad \text{avec} \quad B_r := \overline{\mathrm{Bar}}_r(\mathcal{A})$$

et

$$B \otimes_{\mathcal{A}} B := \overline{\mathrm{Bar}}(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \overline{\mathrm{Bar}}(\mathcal{A}) \quad \text{avec} \quad (B \otimes_{\mathcal{A}} B)_r := \oplus_{p+q=r} B_p \otimes_{\mathcal{A}} B_q.$$

Soit $\Delta_B : B \to B \otimes_{\mathcal{A}} B$ l'application induite par le coproduit Δ_T. La diagonale Δ_B est donnée par

$$\begin{aligned}
&\Delta_B\Big(a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) \otimes a_{r+1}\Big) \qquad (4.1.0.1)\\
&= \Big(a_0 \otimes 1\Big) \otimes_{\mathcal{A}} \Big(1 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) \otimes a_{r+1}\Big)\\
&\quad + \sum_{\substack{p+q=r\\ p>0,\, q>0}} (a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_p) \otimes 1\Big) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes (a_{p+1} \otimes \cdots \otimes a_{p+q}) \otimes a_{r+1}\Big)\\
&\quad + \Big(a_0 \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) \otimes 1\Big) \otimes_{\mathcal{A}} \Big(1 \otimes a_{r+1}\Big).
\end{aligned}$$

Proposition 4.1.1. *La diagonale Δ_B est co-associative, c'est-à-dire que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\Delta_B"] \arrow[d, "\Delta_B"'] & B \otimes_{\mathcal{A}} B \arrow[d, "\mathrm{id}_B \otimes_{\mathcal{A}} \Delta_B"] \\
B \otimes_{\mathcal{A}} B \arrow[r, "\Delta_B \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{id}_B"'] & B \otimes_{\mathcal{A}} B \otimes_{\mathcal{A}} B
\end{tikzcd}$$

commute.

La vérification de la proposition ci-dessus est immédiate. Il sera commode d'avoir les notations suivantes :

Notation 4.1.2. *Soit $z_r \in \overline{\mathcal{A}}^{\otimes r}$ un mônome homogène de degré r et soient u et v deux éléments de $\mathcal{A}$. On pose $\omega_r = u \otimes z_r \otimes v \in B_r$. La diagonale Δ_B s'écrit sous la forme*

$$\Delta_B(\omega_r) = \Delta_B(u \otimes z_r \otimes v) = \sum_{\substack{p+q=r\\ z_p \otimes z_q = z_r}} (u \otimes z_p \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes z_q \otimes v).$$

Proposition 4.1.3. *Soit $b^{\text{bar}} \otimes_{\mathcal{A}} 1 + 1 \otimes_{\mathcal{A}} b^{\text{bar}} : B \otimes_{\mathcal{A}} B \to B \otimes_{\mathcal{A}} B$ l'application définie par*

$$(b^{\text{bar}} \otimes_{\mathcal{A}} 1 + 1 \otimes_{\mathcal{A}} b^{\text{bar}})(\omega_p \otimes_{\mathcal{A}} \omega_q) = b_p^{\text{bar}}(\omega_p) \otimes \omega_q - (-1)^p \omega_p \otimes b_q^{\text{bar}}(\omega_q).$$

alors

1. *L'application $b^{\text{bar}} \otimes_{\mathcal{A}} 1 + 1 \otimes_{\mathcal{A}} b^{\text{bar}}$ est une différentielle sur $B \otimes_{\mathcal{A}} B$.*
2. *L'application $\Delta_B : (B, b^{\text{bar}}) \to (B \otimes_{\mathcal{A}} B, b^{\text{bar}} \otimes_{\mathcal{A}} 1 + 1 \otimes_{\mathcal{A}} b^{\text{bar}})$ est un quasi-isomorphisme de complexes.*

On pose

$$\Delta_B^{(2)} := (\text{id}_B \otimes_{\mathcal{A}} \Delta_B) \circ \Delta_B.$$

Remarque 4.1.4. *Soit $\omega_r = u \otimes z_r \otimes v \in B_r$ un mônome homogène. On a*

$$\begin{aligned}
\Delta_B^{(2)}(\omega_r) &= (\text{id}_B \otimes_{\mathcal{A}} \Delta_B) \circ \Delta_B(\omega_r) \\
&= (\text{id}_B \otimes_{\mathcal{A}} \Delta_B)\Big(\sum_{\substack{p+q=r \\ z_p \otimes z_q = z_r}} (u \otimes z_p \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes z_q \otimes v)\Big) \\
&= \sum_{\substack{p+q+l=r \\ z_p \otimes z_q \otimes z_l = z_r}} (u \otimes z_p \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes z_q \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes z_l \otimes v).
\end{aligned}$$

Définition 4.1.5. *Soit $q \geq 0$ et soit $g : \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes q} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ une application $\mathcal{A}^e$-linéaire. Pour $r \geq q$, définissons l'application*

$$1 \otimes g \otimes 1 : (B \otimes_{\mathcal{A}} B \otimes_{\mathcal{A}} B)_r \to (B \otimes B)_{r-q}$$

par les conditions suivantes :

1. *Pour $l \neq q$ et $i + l + j = r$, on pose*

$$(1 \otimes g \otimes 1)/_{B_i \otimes_{\mathcal{A}} B_\ell \otimes_{\mathcal{A}} B_j} = 0.$$

2. *Pour $l = q$ et $i + j = r - q$, on écrit un mônome homogène $\omega_r \in B_i \otimes_{\mathcal{A}} B_q \otimes_{\mathcal{A}} B_j$ sous la forme $\omega_r = (u \otimes z_i \otimes v) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes z_q \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (w \otimes z_j \otimes t)$ et on définit $1 \otimes g \otimes 1$ sur $B_i \otimes_{\mathcal{A}} B_q \otimes_{\mathcal{A}} B_j$ par*

$$(1 \otimes g \otimes 1)(\omega_r) = (-1)^{qi}\Big(u \otimes z_i \otimes vg(1 \otimes z_q \otimes 1)\Big) \otimes_{\mathcal{A}} \Big(w \otimes z_j \otimes t\Big).$$

Définition 4.1.6 ([19], p. 4)**.** *L'homotopie de Gerstenhaber est l'application*

$$G : (B \otimes_{\mathcal{A}} B)_r \to B_{r+1}$$

définie par

$$G\Big((u \otimes z_i \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (v \otimes z_j \otimes w)\Big) = (-1)^i u \otimes (z_i \otimes v \otimes z_j) \otimes w.$$

Remarque 4.1.7. *L'homotopie de Gerstenhaber est une homotopie*

$$\mu \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes_{\mathcal{A}} \mu \sim 0,$$

c'est-à-dire que dans le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(B \otimes_{\mathcal{A}} B, B)$*, on a*

$$G \circ (b^{\mathrm{bar}} \otimes_{\mathcal{A}} 1 + 1 \otimes_{\mathcal{A}} b^{\mathrm{bar}}) + b^{\mathrm{bar}} \circ G = \mu \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes_{\mathcal{A}} \mu.$$

Lemme 4.1.8 ([19], p. 6)**.** *Soient* $f \in \overline{C}^p(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ *et* $g \in \overline{C}^q(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ *des cochaînes normalisées de Hochschild. Le produit* $\circ_G$ *de Gerstenhaber de* f *et* g *est donné par*

$$f \circ_G g = f \circ G \circ (1 \otimes g \otimes 1) \circ \Delta_B^{(2)}.$$

Démonstration. Posons $r = p + q - 1$. Soit $\omega \in B_r = \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes r} \otimes \mathcal{A}$ un mônome homogène. On écrit $\omega = u \otimes z_r \otimes v = u \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) \otimes v$. On a

$$\Delta_B^{(2)}(w) = \sum_{i+j=r-q} (u \otimes z_i \otimes 1) \otimes (1 \otimes z_q \otimes 1) \otimes (1 \otimes z_j \otimes v) + R$$

avec $R = \sum_{\substack{i+l+j=r \\ l \neq q}} \omega_i \otimes \omega_l \otimes \omega_j$ tel que $(1 \otimes g \otimes 1)(R) = 0$. On a donc

$$(1 \otimes g \otimes 1) \circ \Delta_B^{(2)}(w) = \sum_{i+j=r-q} (-1)^{qi} \Big(u \otimes z_i \otimes g(1 \otimes z_q \otimes 1)\Big) \otimes \Big(1 \otimes z_j \otimes v\Big),$$

$$G \circ (1 \otimes g \otimes 1) \circ \Delta_B^{(2)}(w) = \sum_{i+j=r-q} (-1)^{qi+i} u \otimes z_i \otimes g(1 \otimes z_q \otimes 1) \otimes z_j \otimes v$$

et

$$f \circ G \circ (1 \otimes g \otimes 1) \circ \Delta_B^{(2)}(w) = \sum_{i+j=r-q} (-1)^{i(q-1)} f\Big(u \otimes (z_i \otimes g(1 \otimes z_q \otimes 1) \otimes z_j) \otimes v\Big).$$

Mais $i + j = r - q = p - 1$, c'est-à-dire $j = p - 1 - i$, d'où

$f \circ G \circ (1 \otimes g \otimes 1) \circ \Delta_B^{(2)}(w)$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i(q-1)} f\Big(u \otimes (z_i \otimes g(1 \otimes z_q \otimes 1) \otimes z_j) \otimes v\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{(i-1)(q-1)} f\Big(u \otimes (z_{i-1} \otimes g(1 \otimes z_q \otimes 1) \otimes z_j) \otimes v\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{(i-1)(q-1)} f\Big(u \otimes \Big((a_1 \otimes \dots a_{i-1}) \otimes g(1 \otimes a_i \otimes \dots$$

$$\dots a_{i+q-1} \otimes 1) \otimes (a_{i+q} \otimes \dots \otimes a_{p+q-1}) \otimes v\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{(i-1)(q-1)} f \circ_i g\Big(u \otimes a_1 \otimes \dots a_{i-1} \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_{i+q-1} \otimes a_{i+q} \otimes \dots \otimes a_{p+q-1} \otimes v\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} f \circ_i g(\omega). \qquad \square$$

Corollaire 4.1.9. *Soient $f \in \overline{C}^p(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ et $g \in \overline{C}^q(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ des p et q cochaines normalisées de Hochschild. Le crochet de Gerstenhaber $[\ ,\ ]_G$ est donné par :*

$$[f, g]_G = f \circ G \circ (1 \otimes g \otimes 1) \circ \Delta_B^{(2)} - (-1)^{(p-1)(q-1)} g \circ G \circ (1 \otimes f \otimes 1) \circ \Delta_B^{(2)}.$$

A partir de cette nouvelle expression du crochet de Gerstenhaber, C. Negron et S. Witherspoon parviennent, sous certaines hypothèses ci-dessous, à exprimer le crochet de Gerstenhaber à partir d'une "petite" résolution de $\mathcal{A}$ qui n'est pas la résolution bar.

Théorème 4.1.10 ([19], p. 11)**.** *Soit (K_*, b'_*) une $\mathcal{A}^e$-résolution projective de $\mathcal{A}$. On suppose les deux hypothèses suivantes satisfaites :*

1. *il existe des morphismes de complexes $(K_*, b'_*) \underset{\pi}{\overset{i}{\rightleftharpoons}} (B, b^{\text{bar}})$ tels que $\pi \circ i = \mathrm{id}_K$.*
2. *Il existe un quasi-isomorphisme*

$$\Delta_K : (K_*, b'_*) \to (K_* \otimes_{\mathcal{A}} K_*, b'_* \otimes_{\mathcal{A}} 1 + 1 \otimes_{\mathcal{A}} b'_*)$$

satisfaisant $(i \otimes_{\mathcal{A}} i) \circ \Delta_K = \Delta_B \circ i$.

On pose $\Delta_K^{(2)} = (\Delta_K \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{id}_K) \circ \Delta_K$ et $G_K := \pi \circ G \circ (i \otimes_{\mathcal{A}} i)$. Soient $f : K_p \to \mathcal{A}$ un p-cocycle et $g : K_q \to \mathcal{A}$ un q-cocycle. On pose

$$f \circ_K g := f \circ G_K \circ (1 \otimes g \otimes 1) \circ \Delta_K^{(2)}$$

et

$$[f, g]_K := f \circ_K g - (-1)^{(|f|-1)(|g|-1)} g \circ_K f.$$

Alors

1. *Le crochet* $[f,,g]_K$ *est un* $(b'_*)^t$*-cocycle.*
2. *Si* f *ou* g *est un* $(b'_*)^t$*-cobord, alors* $[f,g]_K$ *est un* $(b'_*)^t$*-cobord.*
3. *Posons* $\alpha = \mathrm{cl}(f) \in H^p(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(K_*, \mathcal{A}), (b'_*)^t)$*,* $\beta = \mathrm{cl}(g) \in H^q(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(K_*, \mathcal{A}), (b'_*)^t)$ *et* $[\alpha, \beta]_K := \mathrm{cl}([f,g]_K)$*. L'isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels*
$$\begin{array}{ccc} H^*\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(K_*, \mathcal{A})\Big) & \stackrel{\pi^*}{\to} & H^*\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(B_*, \mathcal{A})\Big) \\ \alpha = \mathrm{cl}(f) & \mapsto & \pi^*(\alpha) = \mathrm{cl}(f \circ \pi) \end{array}$$
satisfait
$$\pi^*([\alpha, \beta]_K) = [\pi^*(\alpha), \pi^*(\beta)]_G,$$
c'est-à-dire π^* *est un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées.*

4.2 Crochet de Gerstenhaber pour les algèbres enveloppantes

Pour appliquer le théorème de Negron-Witherspoon 4.1.10 aux algèbres enveloppantes de Sridharan $\mathcal{A} = \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ et à la résolution de Kassel
$$(K_*, b'_*) := (\mathcal{A} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}, b'_*),$$
il faut vérifier les hypothèses 1 et 2 de ce théorème. Les morphismes $(K_*, b'_*) \underset{\eta'_*}{\overset{\varphi'_*}{\rightleftarrows}} (B, b^{\mathrm{bar}})$ construits en 2.8.2 et 3.4.0.1, satisfont $\eta'_* \circ \varphi'_* = \mathrm{id}_{K_*}$(voir lemme 3.4.3), ce qui montre que l'hypothèse 1 est satisfaite.

Définition 4.2.1. *La diagonale*
$$\Delta_K : (K_*, b'_*) \to (K_* \otimes_{\mathcal{A}} K_*, b'_* \otimes 1 + 1 \otimes b'_*)$$
est définie par
$$\Delta_K = (\eta' \otimes_{\mathcal{A}} \eta') \circ \Delta_B \circ \varphi'.$$

Remarque 4.2.2. *Puisque* Δ_B*,* η' *et* φ' *sont des quasi-isomorphismes, il en est de même pour* Δ_K*.*

Il est commode d'introduire les notations suivantes.

Soit k un entier compris entre 1 et p. Soient $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_p) \in I_p$. On note $\mathfrak{S}_{\underline{i}}$ le groupe des permutations du support $\{i_1, \ldots, i_p\}$ de $\underline{i}$.

On désigne par $\mathfrak{S}_{\underline{i}}^{(k,p-k)}$ le sous groupe des permutations de battages $\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}$ qui satisfont la propriété

$$\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \cdots < \sigma(i_k) \quad \text{et} \quad \sigma(i_{k+1}) < \sigma(i_{k+2}) < \cdots < \sigma(i_p).$$

Proposition 4.2.3. *L'application Δ_K est donnée par*

$$\Delta_K(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1)$$
$$= \sum_{k=0}^{p} \Big(\sum_{\sigma_k \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}^{(k,p-k)}} \varepsilon(\sigma_k)(1 \otimes x_{\sigma_k(i_1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma_k(i_k)} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes x_{\sigma_k(i_{k+1})} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma_k(i_p)} \otimes 1) \Big).$$

Démonstration. Soit $1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1 = 1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes 1$. D'après l'expression de φ' donnée en 3.4.0.1, on a

$$\varphi'_p(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\sigma)\,(1 \otimes x_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_p)} \otimes 1).$$

Or, d'après la définition de Δ_B donnée en 4.1.0.1, on a

$$\Delta_B \circ \varphi'_p(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\sigma)\,(1 \otimes x_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_k)} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes x_{\sigma(i_{k+1})} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_p)} \otimes 1).$$

Soit τ_k la permutation telle que

$$\tau_k(i_1) = i_k \;,\; \tau_k(i_2) = i_{k-1} \;,\; \ldots \;,\; \tau_k(i_k) = i_1$$

et

$$\tau_k(i_{k+1}) = i_p \;,\; \tau_k(i_{k+2}) = i_{p-1} \;,\; \ldots \;,\; \tau_k(i_p) = i_{k+1}.$$

La signature de τ_k est $\varepsilon(\tau_k) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}(-1)^{\frac{(p-k)(p-k-1)}{2}}$. On a donc

$$\Delta_B \circ \varphi'_p(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1)$$
$$= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\sigma)\,(1 \otimes x_{\sigma(\tau(i_k))} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(\tau(i_1))} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes x_{\sigma(\tau(i_p))} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(\tau(i_{k+1}))} \otimes 1).$$

Posons $\pi_k = \sigma \circ \tau_k$. On a $\pi_k \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}$ avec $\varepsilon(\pi_k) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau_k)$. D'où,

$$\Delta_B \circ \varphi'_p(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1)$$
$$= \sum_{k=0}^{p} \varepsilon(\tau_k) \sum_{\pi_k \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\pi_k)\,(1 \otimes x_{\pi_k(i_k)} \otimes \cdots \otimes x_{\pi_k(i_1)} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes x_{\pi_k(i_p)} \otimes \cdots \otimes x_{\pi_k(i_{k+1})} \otimes 1).$$

L'expression de η' donnée dans le corollaire 2.8.3 fournit la simplification

$$(\eta'_k \otimes_{\mathcal{A}} \eta'_{p-k}) \circ \Delta_B \circ \varphi'_p(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \varepsilon(\tau_k) \sum_{\pi_k} \varepsilon(\pi_k)\,(1 \otimes x_{\pi_k(i_k)} \wedge \cdots \wedge x_{\pi_k(i_1)} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes x_{\pi_k(i_p)} \wedge \cdots \wedge x_{\pi_k(i_{k+1})} \otimes 1).$$

où la somme est étendue aux permutations $\pi_k \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}$ qui satisfont

$$\pi_k(i_k) > \pi_k(i_{k-1}) > \cdots > \pi_k(i_1) \quad \text{et} \quad \pi_k(i_p) > \pi_k(i_{p-1}) > \cdots > \pi_k(i_{k+1}).$$

Or, on a $\varepsilon(\tau_k) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}(-1)^{\frac{(p-k)(p-k-1)}{2}}$. En réordonnant les éléments, on obtient donc

$$(\eta'_k \otimes_{\mathcal{A}} \eta'_{p-k}) \circ \Delta_B \circ \varphi'_p(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\pi_k \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}^{(k,p-k)}} \varepsilon(\pi_k)\,(1 \otimes x_{\pi_k(i_1)} \wedge \cdots \wedge x_{\pi_k(i_k)} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes x_{\pi_k(i_{k+1})} \wedge \cdots \wedge x_{\pi_k(i_p)} \otimes 1)$$

$$= \Delta_K(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1).$$ □

Soit k un entier avec $0 \leq k \leq p$. Soit $\sigma = \sigma_{k,p-k} \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}^{(k,p-k)}$ une permutation de battage sur l'ensemble $\{i_1, \ldots, i_p\}$. Soit $\mathfrak{S}_k^{\sigma}$ le groupe de permutations de l'ensemble $S_k^{\sigma} = \{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k)\}$ et soit $\mathfrak{S}_{\sigma}^{p-k}$ le groupe de permutations de l'ensemble $S_{\sigma}^{p-k} = \{\sigma(i_{k+1}), \ldots, \sigma(i_p)\}$. On a des isomorphismes de groupes $\mathfrak{S}_k^{\sigma} \cong \mathfrak{S}_k$ et $\mathfrak{S}_{\sigma}^{p-k} \cong \mathfrak{S}_{p-k}$.

Lemme 4.2.4. *Soit $\pi \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}$ et soit k un entier $0 \leq k \leq p$. Il existe un unique triplet $(\tau_k, \tau^{p-k}, \sigma)$ où $\sigma = \sigma_{k,p-k} \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}^{(k,p-k)}$ est une permutation de battage sur l'ensemble $\{i_1, \ldots, i_p\}$, $\tau_k \in \mathfrak{S}_k^{\sigma}$ est une permutation de l'ensemble $\{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k)\}$ et $\tau^{p-k} \in \mathfrak{S}_{\sigma}^{p-k}$ est une permutation de l'ensemble $\{\sigma(i_{k+1}), \ldots, \sigma(i_p)\}$ tel que on ait la relation*

$$\pi = \tau_k \circ \tau^{p-k} \circ \sigma.$$

Démonstration. On découpe l'ensemble $\{\pi(i_1), \ldots, \pi(i_p)\}$ en deux en posant $A = \{\pi(i_1), \ldots, \pi(i_k)\}$ et $B = \{\pi(i_{k+1}), \ldots, \pi(i_p)\}$. Il existe une unique permutation τ_k qui ordonne les éléments de A dans l'ordre croissant et une unique permutation τ^{p-k} qui ordonne les éléments de B dans l'ordre croissant. On pose $\sigma := \tau_k \circ \tau^{p-k} \circ \pi$ et on vérifie que σ est une permutation de battage. □

Corollaire 4.2.5. *On a*

$$(\varphi' \otimes_{\mathcal{A}} \varphi') \circ \Delta_K = \Delta_B \circ \varphi'.$$

Démonstration. On a

$$\Delta_B \circ \varphi'_p(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1)$$
$$= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\pi) \left(1 \otimes x_{\pi(i_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\pi(i_k)} \otimes 1\right) \otimes_{\mathcal{A}} \left(1 \otimes x_{\pi(i_{k+1})} \otimes \cdots \otimes x_{\pi(i_p)} \otimes 1\right).$$

D'après le lemme 4.2.4, on a

$$\Delta_B \circ \varphi'_p(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1)$$
$$= \sum_{k=0}^{p} \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}^{(k,p-k)}} \sum_{\tau_k \in \mathfrak{S}_k^{\sigma}} \sum_{\tau^{p-k} \in \mathfrak{S}_{\sigma}^{p-k}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau_k)\varepsilon(\tau^{p-k})$$
$$(1 \otimes x_{\tau_k \circ \sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau_k \circ \sigma(i_k)} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes x_{\tau^{p-k} \circ \sigma(i_{k+1})} \otimes \cdots \otimes x_{\tau^{p-k} \circ \sigma(i_p)} \otimes 1)\Big)$$
$$= \sum_{k=0}^{p} \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}^{(k,p-k)}} \varepsilon(\sigma) \varphi'_k(1 \otimes x_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_k)} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} \varphi'_{p-k}(1 \otimes x_{\sigma(i_{k+1})} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_p)} \otimes 1)\Big)$$
$$= (\varphi'_k \otimes_{\mathcal{A}} \varphi'_{p-k}) \Big(\sum_{k=0}^{p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}^{(k,p-k)}} \varepsilon(\sigma)(1 \otimes x_{\sigma(i_1)} \otimes \dots$$
$$\cdots \otimes x_{\sigma(i_k)} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes x_{\sigma(i_{k+1})} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_p)} \otimes 1)\Big)$$
$$= (\varphi'_k \otimes_{\mathcal{A}} \varphi'_{p-k}) \circ \Delta_K(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1).$$

□

Ceci montre que la diagonale $\Delta_K = (\eta' \otimes_{\mathcal{A}} \eta') \circ \Delta_B \circ \varphi'$ satisfait l'hypothèse 2 du théorème de C. Negron et S.Witherspoon([19], p.11). On en déduit

Théorème 4.2.6. *Soient $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(K_p, \mathcal{A})$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(K_q, \mathcal{A})$. On pose*

$$G_K = \eta' \circ G \circ (\varphi' \otimes_{\mathcal{A}} \varphi')$$

et

$$f \circ_K g := f \circ G_K \circ (\mathrm{id} \otimes_{\mathcal{A}} g \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{id}) \circ \Delta_K^{(2)}.$$

L'expression

$$[f, g]_K := f \circ_K g + (-1)^{(p-1)(q-1)} g \circ_K f$$

définit le crochet de Gerstenhaber pour les algèbres enveloppantes de Sridharan à partir de la résolution de Kassel (K_*, b'_*).

Il nous reste à écrire le crochet $[\ ,\ ]_K$ via l'isomorphisme de complexes

$$\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(K_p,\mathcal{A}),(b')^t\right)\to\left(\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\mathrm{ad}},d'\right)$$

décrit dans la section 3.4.

Dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(K_p,\mathcal{A})$, on introduit le symbole de Kronecker $\delta^a_{x_{\underline{i}}}$ défini pour $\underline{i}\in I_p$ et $a\in\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ par $\delta^a_{x_{\underline{i}}}(1\otimes x_{\underline{i}}\otimes 1)=a$ et $\delta^a_{x_{\underline{i}}}(1\otimes x_{\underline{j}}\otimes)=0$ pour $\underline{j}\neq\underline{i}$.

Théorème 4.2.7. *Soit $\mathcal{A}=\mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ une algèbre enveloppante de Sridharan. Soient p et q deux entiers tels que $p+q\leq n+1$. Pour $x^*_{\underline{i}}\otimes a\in\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ et $x^*_{\underline{j}}\otimes b\in\Lambda^q(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$, on pose*

$$[x^*_{\underline{i}}\otimes a, x^*_{\underline{j}}\otimes b]_\Lambda:=\sum_{\underline{k}\in I_{p+q-1}}x^*_{\underline{k}}\otimes[\delta^a_{x_{\underline{i}}},\delta^b_{x_{\underline{j}}}]_K(1\otimes x_{\underline{k}}\otimes 1).$$

Alors la classe de cohomologie du crochet $[\ ,\ ]_\Lambda$ définit le crochet de Gerstenhaber de $H^*(\mathcal{A},\mathcal{A})$ à partir du complexe $\left(\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\mathrm{ad}},d'\right)$.

Démonstration. On a vu à la section 3.4 que les applications

$${}^4\varphi^*\circ{}^3\varphi^*:\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}\left(L'_*(\mathcal{A}),\mathcal{A}\right),(b'_*)^t\right)\to\left(\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\mathrm{ad}},d'\right)$$

et

$${}^3\psi^*\circ{}^4\psi^*:\left(\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\mathrm{ad}},d'\right)\to\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}\left(L'_*(\mathcal{A}),\mathcal{A}\right),(b'_*)^t\right)$$

sont des isomorphismes de complexes. Or, d'après le théorème 4.2.6, le crochet $[\,,]_K$ définit le crochet de Gerstenhaber à partir de la résolution de Kassel (K_*,b'_*). Par transport de structures, le crochet

$$[\ ,\ ]_\Lambda:={}^4\varphi^*\circ{}^3\varphi^*\circ[\,,]_K\circ\left(({}^3\psi^*\circ{}^4\psi^*)\otimes({}^3\psi^*\circ{}^4\psi^*)\right)$$

définit le crochet de Gerstenhaber pour les algèbres enveloppantes de Sridharan à partir de la résolution $\left(L^*(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}),d^*\right)=\left(\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)\otimes\mathcal{A}^{\mathrm{ad}},d'\right)$. On a

$${}^3\psi^p\circ{}^4\psi^p(x^*_{\underline{i}}\otimes a)=\delta^a_{x_{\underline{i}}}$$

et

$${}^3\psi^q\circ{}^4\psi^q(x^*_{\underline{j}}\otimes b)=\delta^b_{x_{\underline{j}}}.$$

On a donc

$$[\ ,\ ]_K\circ\left(({}^3\psi^p\circ{}^4\psi^p)\otimes({}^3\psi^q\circ{}^4\psi^q)\right)\left((x^*_{\underline{i}}\otimes a)\otimes(x^*_{\underline{j}}\otimes b)\right)=[\,\delta^a_{x_{\underline{i}}}\,,\,\delta^b_{x_{\underline{j}}}\,]_K.$$

D'où, on a

$$\begin{aligned}
{}^4\varphi^{p+q-1} \circ {}^3\varphi^{p+q-1}\Big([\ \delta^a_{x_{\underline{i}}}\ ,\ \delta^b_{x_{\underline{j}}}\ ]_K\Big) &= {}^4\varphi^{p+q-1}\bigg({}^3\varphi^{p+q-1}\Big([\ \delta^a_{x_{\underline{i}}}\ ,\ \delta^b_{x_{\underline{j}}}\ ]_K\Big)\bigg) \\
&= \sum_{k\in I_{p+q-1}} x^*_{\underline{k}} \otimes \bigg({}^3\varphi^{p+q-1}\Big([\ \delta^a_{x_{\underline{i}}}\ ,\ \delta^b_{x_{\underline{j}}}\ ]_K\Big)(1\otimes x_{\underline{k}})\bigg) \\
&= \sum_{k\in I_{p+q-1}} x^*_{\underline{k}} \otimes \bigg([\ \delta^a_{x_{\underline{i}}}\ ,\ \delta^b_{x_{\underline{j}}}\ ]_K(1\otimes x_{\underline{k}}\otimes 1)\bigg),
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$[x^*_{\underline{i}}\otimes a, x^*_{\underline{j}}\otimes b]_\Lambda = \sum_{\underline{k}\in I_{p+q-1}} x^*_{\underline{k}} \otimes [\ \delta^a_{x_{\underline{i}}}\ ,\ \delta^b_{x_{\underline{j}}}\ ]_K(1\otimes x_{\underline{k}}\otimes 1).$$

□

Pour le calcul explicite du crochet de Gerstenhaber sur les exemples, nous avons besoin de l'expression de l'homotopie G_K.

Proposition 4.2.8. *Soient p et q deux entiers positifs. L'homotopie*

$$G_K : (K\otimes_{\mathcal{A}} K)_{p+q} \to K_{p+q+1}$$

est donnée pour $1\otimes x_{\underline{i}}\otimes 1 = 1\otimes x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_p}\otimes 1 \in K_p$ et $1\otimes x_{\underline{j}}\otimes 1 = 1\otimes x_{j_1}\wedge\cdots\wedge x_{j_q}\otimes 1\in K_q$ par

$$\begin{aligned}
&G_K\Big((1\otimes x_{\underline{i}}\otimes 1)\otimes_{\mathcal{A}}(a\otimes x_{\underline{j}}\otimes 1)\Big) \\
&\quad = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{pq}(-1)^{\frac{(q+1)(q+2)}{2}} t_{p+q}\Big(\ldots t_{p+1}\,(\,t_p(\,1\otimes x_{\underline{i}}\otimes a\,)x_{\sigma(j_1)}\,)\ldots x_{\sigma_{(i_q)}}\Big).
\end{aligned}$$

Démonstration. Montrons que

$$G_K = \eta'\circ G\circ(\varphi'\otimes_{\mathcal{A}}\varphi')$$

où G est l'homotopie de Gerstenhaber définie dans 4.1.6. L'expression de φ' donnée en 3.4.0.1 conduit à

$$(\varphi'_p \otimes_{\mathcal{A}} \varphi'_q)\Big((1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (a \otimes x_{\underline{j}} \otimes 1)\Big)$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)\Big((1 \otimes x_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_p)} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (a \otimes x_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau(j_q)} \otimes 1)\Big).$$

D'après la définition de G donnée en 4.1.6, on a

$$G \circ (\varphi'_p \otimes_{\mathcal{A}} \varphi'_q)\Big((1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (a \otimes x_{\underline{j}} \otimes 1)\Big)$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)(-1)^i 1 \otimes x_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_p)} \otimes a \otimes x_{\tau(j_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau(j_q)} \otimes 1.$$

L'expression de η' introduite dans la proposition 2.8.2 conduit à

$$\eta'_{p+q+1} \circ G \circ (\varphi'_p \otimes_{\mathcal{A}} \varphi'_q)\Big((1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (a \otimes x_{\underline{j}} \otimes 1)\Big)$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)(-1)^p(-1)^{\frac{(p+q+1)(p+q+2)}{2}}$$
$$t_{p+q}(t_{p+q-1}(\ldots t_p\,(t_{p-1}(\ldots t_0\,(1 \otimes x_{\sigma(i_1)}\,)\ldots x_{\sigma(i_p)}\,)\,a\,)x_{\tau(j_1)}\ldots)x_{\tau(j_q)}\,).$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)(-1)^p(-1)^{\frac{(p+q+1)(p+q+2)}{2}}(-1)^{\frac{(p)(p+1)}{2}}$$
$$t_{p+q}(t_{p+q-1}(\ldots t_p\,\Big(\eta'_p(1 \otimes x_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_p)} \otimes a)\Big)x_{\tau(j_1)}\ldots)x_{\tau(j_q)}\,).$$
$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)(-1)^p(-1)^{\frac{(p+q+1)(p+q+2)}{2}}(-1)^{\frac{(p)(p+1)}{2}}$$
$$t_{p+q}(t_{p+q-1}(\ldots t_p\,\Big(\eta'_p(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\sigma)1 \otimes x_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_p)} \otimes a)\Big)x_{\tau(j_1)}\ldots)x_{\tau(j_q)}\,).$$
$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)(-1)^p(-1)^{\frac{(p+q+1)(p+q+2)}{2}}(-1)^{\frac{(p)(p+1)}{2}}$$
$$t_{p+q}(t_{p+q-1}(\ldots t_p\,\Big(\eta'_p\varphi'_p(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes a)\Big)x_{\tau(j_1)}\ldots)x_{\tau(j_q)}\,).$$

Or, on a $\eta'_* \circ \varphi'_* = \mathrm{id}_{K_*}$(voir 3.4.3), d'où

$$\eta'_{p+q+1} \circ G \circ (\varphi'_p \otimes_{\mathcal{A}} \varphi'_q)\Big((1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (a \otimes x_{\underline{j}} \otimes 1)\Big)$$
$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{j}}} \varepsilon(\tau)(-1)^p(-1)^{\frac{(p+q+1)(p+q+2)}{2}}(-1)^{\frac{(p)(p+1)}{2}}$$
$$t_{p+q}(t_{p+q-1}(\ldots t_p(1 \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \otimes a)x_{\tau(j_1)}\ldots)x_{\tau(j_q)}\,).$$

Or, on a $(p+q+1)(p+q+2)+(p)(p+1)+2p = 2p(p+1)+2pq+4p+(q+1)(q+2)$. D'où,

$$(-1)^p(-1)^{\frac{(p+q+1)(p+q+2)}{2}}(-1)^{\frac{(p)(p+1)}{2}} = (-1)^{pq}(-1)^{\frac{(q+1)(q+2)}{2}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&\eta'_{p+q+1}\circ G\circ(\varphi'_p\otimes_{\mathcal{A}}\varphi'_q)\Big((1\otimes x_{\underline{i}}\otimes 1)\otimes_{\mathcal{A}}(a\otimes x_{\underline{j}}\otimes 1)\Big)\\
&=\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{j}}}\varepsilon(\tau)(-1)^{pq}(-1)^{\frac{(q+1)(q+2)}{2}}t_{p+q}(t_{p+q-1}(\dots t_p(1\otimes x_{i_1}\wedge\dots\wedge x_{i_p}\otimes a)x_{\tau(j_1)}\dots)x_{\tau(j_q)})\\
&=\Delta_K\Big((1\otimes x_{\underline{i}}\otimes 1)\otimes_{\mathcal{A}}(a\otimes x_{\underline{j}}\otimes 1)\Big).
\end{aligned}$$

□

Remarque 4.2.9. *Pour $\underline{i}\in I_p$, $\underline{j}\in I_q$ et $a\in\mathbb{K}$, on a*

$$G_K\Big((1\otimes x_{\underline{i}}\otimes 1)\otimes_{\mathcal{A}}(a\otimes x_{\underline{j}}\otimes 1)\Big)=0.$$

Cette remarque sera très utile lors des calculs de la section 6.3.

Chapitre 5

Le produit cap

5.1 Homologie d'une algèbre de Lie à valeurs dans la représentation adjointe

Rappelons que $H_*(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ est l'homologie de Hochschild de $\mathcal{A}$ à coefficients dans le $\mathcal{A}^e$-module $\mathcal{A}$.

Le complexe $\Big(\overline{C}_p^{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}), b_p\Big)$ est donnée par

$$\overline{C}_p^{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) := \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes p}.$$

La différentielle

$$b_p : \overline{C}_p^{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \to \overline{C}_{p-1}^{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$$

est donnée pour $a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \in \overline{C}_p^{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ par

$$\begin{aligned} b_p(a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p) &= aa_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_p \\ &+ \sum_{\ell=1}^{p-1} (-1)^\ell a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_\ell a_{\ell+1} \otimes \cdots \otimes a_p \\ &+ (-1)^p a_p a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p-1}. \end{aligned}$$

On a donc

$$H_*(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = H_*\Big(\overline{C}_*^{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}), b_*\Big).$$

Rappelons que la cohomologie et l'homologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ sont respectivement définies par

$$H^*_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) := \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$$

et

$$H_*^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) := \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{U}}(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}).$$

Le complexe de Kassel est le complexe $(L_*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d_*)$ avec

$$L_p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) := \mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g}.$$

La différentielle

$$d_p : L_p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \to L_{p-1}(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$$

est donnée pour $u \otimes x_{\underline{i}} = u \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \in \mathcal{A} \otimes \Lambda^p \mathfrak{g}$ par

$$\begin{aligned} d_p(u \otimes x_{\underline{i}}) = & \sum_{\ell=1}^{p} (-1)^{\ell+1} (u.x_{i_\ell}) \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \\ & + \sum_{1 \le \ell < \ell' \le p} (-1)^{\ell+\ell'} u \otimes [x_{i_\ell}, x_{i_{\ell'}}] \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_\ell} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}. \end{aligned}$$

Proposition 5.1.1 ([15], p. 241)**.** *On a*

$$H_p^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) = H_p(L_*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d_*).$$

5.2 Enoncé du résultat

Théorème 5.2.1. *Soit $\overline{C}_*^{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \overline{A}^{\otimes *}$ le complexe de Hochschild normalisé réduit de $\mathcal{A} = \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$. On pose $\Big(L_*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^*\Big) = \Big(\mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}), d_*\Big)$.*
Pour $(a \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}) \in L_p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ et $(x_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge x_{j_q}^* \otimes a') \in L^q(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$, on pose

$$(a \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}) \cap_{Lie} (x_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge x_{j_q}^* \otimes a') =$$

$$(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \sum_{1 \le \ell_1 < \cdots < \ell_q \le p} (-1)^{|\underline{\ell}|} \Big(x_{j_1}^*(x_{i_{\ell_1}}) \dots x_{j_q}^*(x_{i_{\ell_q}}) \Big) a a' \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell_q}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}$$

où $|\underline{\ell}| = \ell_1 + \cdots + \ell_q$. Il existe un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

$$\Psi_* : H_*\Big(L_*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d_*\Big) \to H_*\Big(\overline{C}_*^{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}), b_*\Big)$$

faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_p^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \otimes H_{Lie}^q(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) & \xrightarrow{\cap_{Lie}} & H_{p-q}^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi_p \otimes \Psi^q} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_{p-q}} \\ H_p(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \otimes H^q(\mathcal{A}, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\cap} & H_{p-q}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \end{array}$$

Pour $\omega' \in H_p^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ et $\alpha' \in H_{Lie}^q(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$, on a donc

$$\Psi_{p-q}(\omega' \cap_{Lie} \alpha') = \Psi_p(\omega') \cap \Psi^q(\alpha').$$

5.3 L'isomophisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Lemme 5.3.1. *Il existe des quasi-isomorphismes*

$$\left(\mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}), d_*\right) \underset{\varphi_*}{\overset{\psi_*}{\rightleftarrows}} \left(\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes *}, b_*\right)$$

entre le complexe de Hochschild de $\mathcal{A}$ et le complexe de Kassel de $\mathcal{A}$. Les applications φ_* et ψ_* satisfont les trois propriétés suivantes :

1. *Pour $a \otimes x_{\underline{i}} \in L_p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$, on a*

$$\psi_p(a \otimes x_{\underline{i}}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\sigma) a \otimes x_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_p)}.$$

2. *Pour $a \otimes x_{k_1} \otimes \cdots \otimes x_{k_p} \in \mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \otimes \mathfrak{g}^{\otimes p}$, on a*

$$\varphi_p(a \otimes x_{k_1} \otimes \cdots \otimes x_{k_p}) = a \otimes x_{k_1} \wedge \cdots \wedge x_{k_p} \quad \text{si} \quad k_1 > \cdots > k_p$$

$$\varphi_p(a \otimes x_{k_1} \otimes \cdots \otimes x_{k_p}) = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

3. *On a $\varphi_* \circ \psi_* = \mathrm{id}_{L_*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})}$.*

La suite de cette section est consacrée à la démonstration du lemme ci-dessus. Les isomorphismes φ_* et ψ_* sont obtenus comme les composées suivantes $\varphi_* = {}^3\varphi_* \circ {}^2\varphi_* \circ {}^1\varphi_*$ et $\psi^* = {}^1\psi_* \circ {}^2\psi_* \circ {}^3\psi_*$ avec

$$\left(\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes *}, b_*\right) \underset{{}^1\psi_*}{\overset{{}^1\varphi_*}{\rightleftarrows}} \left(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} \overline{\mathrm{Bar}}_*(\mathcal{A}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}^e} b_*^{\mathrm{bar}}\right);$$

$$\left(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} \overline{\mathrm{Bar}}_*(\mathcal{A}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}^e} b_*^{\mathrm{bar}}\right) \underset{{}^2\psi_*}{\overset{{}^2\varphi_*}{\rightleftarrows}} \left(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} L'_*(\mathcal{A}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}^e} b'_*\right);$$

$$\left(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} L'_*(\mathcal{A}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}^e} b'_*\right) \underset{{}^3\psi_*}{\overset{{}^3\varphi_*}{\rightleftarrows}} \left(\mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}), d_*\right).$$

Etape 1 : Construction de ${}^1\varphi_*$ et ${}^1\psi_*$.

Elle est bien connue. Nous la rappelons pour la commodité de la lecture.

Proposition 5.3.2 ([17], p. 13 et [18], p. 282)**.** *Soit $a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \in \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes p}$.*

1. *L'application*
$$^1\varphi_p : \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes p} \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} \overline{\mathrm{Bar}}_p(\mathcal{A})$$
définie par
$$^1\varphi_p(a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p) = a \otimes_{\mathcal{A}^e} (1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes 1)$$
est un isomorphisme de complexes d'inverse l'application
$$^1\psi_p : \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} \overline{\mathrm{Bar}}_p(\mathcal{A}) \to \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes p}.$$
Pour $a \otimes_{\mathcal{A}^e} (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes a_{p+1}) \in \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} \overline{\mathrm{Bar}}_p(\mathcal{A})$, *on définit l'application* $^1\psi_p$ *par*
$$^1\psi_p(a \otimes_{\mathcal{A}^e} (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes a_{p+1})) = a_{p+1}aa_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p.$$
2. *L'application*
$$^1\Phi_p : H_p\Big(\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes *}, b_*\Big) \to H_p\Big(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} \overline{\mathrm{Bar}}_*(\mathcal{A}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}^e} b_*^{bar}\Big)$$
induite par $^1\varphi_p$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels d'inverse* $^1\Psi_p := H_*(^1\psi_p)$.

<u>Etape 2 :</u> Construction de $^2\varphi_*$ et $^2\psi_*$.

La construction de $^2\varphi_*$ nécessite d'introduire le morphisme de comparaison
$$\eta'_p : \Big(\overline{\mathrm{Bar}}_p(\mathcal{A}), b_p^{\mathrm{bar}}\Big) \to \Big(L'_p(\mathcal{A}), b'_p\Big)$$
construit à la section 2.8. On pose

$$^2\varphi_* := \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}^e} \eta'_*.$$
Pour $a \otimes_{\mathcal{A}^e} (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes a_{p+1}) \in \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} \overline{\mathrm{Bar}}_p(\mathcal{A})$, on a
$$^2\varphi_p\Big(a \otimes_{\mathcal{A}^e} (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes a_{p+1})\Big) = a \otimes_{\mathcal{A}^e} \eta'_p(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes a_{p+1}).$$

La construction de $^2\psi^*$ est due à Kassel. L'application $^2\psi_*$ est induite par l'application
$$\varphi'_p : \Big(L'_p(\mathcal{A}), b'_p\Big) \to \Big(\overline{\mathrm{Bar}}_p(\mathcal{A}), b_p^{\mathrm{bar}}\Big)$$
construite par Kassel([15], lemme 9 et corol. 6, p. 243-244, voir 3.4.0.1 pour une expression explicite). On a

$$^2\psi_* := \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}^e} \varphi'_*.$$
Pour $a \otimes_{\mathcal{A}^e} (a_0 \otimes x_{\underline{i}} \otimes a_{p+1}) \in \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} L'_p(\mathcal{A})$, on a
$$^2\psi_p(a \otimes_{\mathcal{A}^e} (a_0 \otimes x_{\underline{i}} \otimes a_{p+1})) = a \otimes_{\mathcal{A}^e} \varphi'_p(a_0 \otimes x_{\underline{i}} \otimes a_{p+1}).$$

Remarque 5.3.3. *D'après le lemme 3.4.3, on a*

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}^e} \eta'_p) \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}^e} \varphi'_p) = \mathrm{id}_{\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} L'_*(\mathcal{A})}.$$

Proposition 5.3.4. *L'application*

$${}^2\Phi_p : H_p\Big(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} \overline{\mathrm{Bar}}_*(\mathcal{A}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}^e} b_*^{bar}\Big) \to H_p\Big(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} L'_*(\mathcal{A}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes b'_*\Big)$$

induite par ${}^2\varphi_p$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels d'inverse* ${}^2\Psi_p := H_*({}^2\psi_p)$.

Etape 3 : Construction de ${}^3\varphi_*$ et ${}^3\psi_*$.
Elle est due à C. Kassel, qui a montré([15], corol. 5, p. 241-242) que l'homologie du complexe

$$\Big(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} L'_*(\mathcal{A}), \mathrm{id} \otimes_{\mathcal{A}^e} b'_*\Big)$$

est l'homologie du complexe $\Big(\mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}), d_*\Big)$. Nous la rappelons pour la commodité de la lecture.

Proposition 5.3.5. *Soit* $a \otimes_{\mathcal{A}^e} (a_0 \otimes x_{\underline{i}} \otimes a_{p+1}) \in \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} L'_*(\mathcal{A})$*. L'application*

$${}^3\varphi_p : \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} L'_p(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \otimes \Lambda^p(\mathfrak{g})$$

définie par

$${}^3\varphi_p\Big(a \otimes_{\mathcal{A}^e} (a_0 \otimes x_{\underline{i}} \otimes a_{p+1})\Big) = a_{p+1} a a_0 \otimes x_{\underline{i}}$$

est un isomorphisme de complexes. L'inverse est l'application

$${}^3\psi_p : \mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \otimes \Lambda^p(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} L'_p(\mathcal{A})$$

définie pour $a \otimes x_{\underline{i}} \in \mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \otimes \Lambda^p(\mathfrak{g})$ *par*

$${}^3\psi_p(a \otimes x_{\underline{i}}) = a \otimes_{\mathcal{A}^e} (1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1).$$

Proposition 5.3.6. *L'application*

$${}^3\Phi_p : H_p\Big(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}^e} L'_p(\mathcal{A}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}^e} b'_*\Big) \to H_p\Big(\mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}), d_*\Big)$$

induite par ${}^3\varphi_p$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels d'inverse* ${}^3\Psi_p := H_*({}^3\psi_p)$.

Etape 4 : Construction de l'isomorphisme φ_* et ψ_*.

On pose $\varphi_* = {}^3\varphi_* \circ {}^2\varphi_* \circ {}^1\varphi_*$ et $\psi_* = {}^1\psi_* \circ {}^2\psi_* \circ {}^3\psi_*$. Les applications

$$\Big(\overline{C}_*^{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}), b_*\Big) \underset{\psi_*}{\overset{\varphi_*}{\rightleftarrows}} \Big(L_*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d_*\Big)$$

sont des morphismes de complexes telles que $\varphi_* \circ \psi_* = \mathrm{id}_{L_*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})}$. En effet, pour $i \neq 2$, Les applications ${}^i\varphi_*$ et ${}^i\psi_*$ sont des isomorphismes réciproques l'une de l'autre. Pour $i = 2$, on a ${}^2\varphi_* \circ {}^2\psi_* = \mathrm{id}_{L'_*(\mathcal{A})}$ donc $\varphi_* \circ \psi_* = \mathrm{id}_{L_*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})}$.

Corollaire 5.3.7. *1. L'application Φ_p induite par φ_p*

$$\Phi_p : H_p\Big(\overline{C}^{\mathbb{K}}_*(\mathcal{A},\mathcal{A}), b_*\Big) \to H_p\Big(L_*(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d_*\Big)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

2. L'application Ψ_p induite par ψ_p

$$\Psi_p : H_p\Big(L_*(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d_*\Big) \to H_p\Big(\overline{C}^{\mathbb{K}}_*(\mathcal{A},\mathcal{A}), b_*\Big)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Remarque 5.3.8.

1. *Pour $a\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_p \in \overline{C}^{\mathbb{K}}_p(\mathcal{A},\mathcal{A})$, on a*

$$\varphi_p(a\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_p) = {}^3\varphi_p\Big(a\otimes_{\mathcal{A}^e}\eta'(1\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_p\otimes 1)\Big).$$

2. *Pour $a\otimes x_{k_1}\otimes\cdots\otimes x_{k_p}\in\mathcal{A}\otimes\mathfrak{g}^{\otimes p}$, on a*

$$\varphi_p(a\otimes x_{k_1}\otimes\cdots\otimes x_{k_p}) = a\otimes x_{k_1}\wedge\cdots\wedge x_{k_p} \quad \text{si} \quad k_1>\cdots>k_p$$
$$\varphi_p(a\otimes x_{k_1}\otimes\cdots\otimes x_{k_p}) = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

3. *Pour $(a\otimes x_{\underline{i}})\in L_p(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$, on a*

$$\psi_p(a\otimes x_{\underline{i}}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\underline{i}}}\varepsilon(\sigma)a\otimes x_{\sigma(i_1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(i_p)}.$$

5.4 Construction du produit cap $\cap_{Lie}$ sur les (co)-chaines

Dans cette section, on introduit une structure de $L^*(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$-modules sur $L_*(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$. Cette structure est en relation avec le produit $\cap$ introduit dans la section 1.3. Dans un premier temps, on introduit le produit suivant :

Définition 5.4.1. *Soient p et q deux entiers positifs avec $q\le p\le n$. Le produit*

$$\cap_{Lie} : L_p(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})\otimes L^q(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \to L_{p-q}(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$$

est défini pour $(a\otimes x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_p})\in L_p(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ et $(x^*_{j_1}\wedge\cdots\wedge x^*_{j_q}\otimes a')\in L^q(\mathbb{K},\mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ par

$$(a\otimes x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_p})\cap_{Lie}(x^*_{j_1}\wedge\cdots\wedge x^*_{j_q}\otimes a') =$$
$$(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}\sum_{1\le\ell_1<\cdots<\ell_q\le p}(-1)^{|\underline{\ell}|}\Big(x^*_{j_1}(x_{i_{\ell_1}})\ldots x^*_{j_q}(x_{i_{\ell_q}})\Big)aa'\otimes x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{x}_{i_{\ell_1}}\wedge\cdots\wedge\widehat{x}_{i_{\ell_q}}\wedge\cdots\wedge x_{i_p}$$

où comme toujours $|\underline{\ell}| = \ell_1+\cdots+\ell_q$.

Rappelons quelques notations introduites dans le chapitre 3. Soit $\underline{i} = (i_1, \dots, i_p) \in I_p$ et soit h un entier avec $1 \leq h \leq p$.
Le stabilisateur $\mathfrak{S}_{\underline{i},h}$ de $\{i_h\}$ est défini par :

$$\mathfrak{S}_{\underline{i},h} = \left\{ \tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}} \,|\, \tau(i_h) = i_h \right\}.$$

Le groupe $\mathfrak{S}_{\underline{i}}^{(h)}$ est défini par

$$\mathfrak{S}_{\underline{i}}^{(h)} = \left\{ \sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}} \,|\, \sigma(i_1) = i_h \right\}.$$

La permutation σ_h est défini par

$$\sigma_h = (i_h, i_{h-1}, \dots, i_2, i_1).$$

Notation 5.4.2. *Soit $\underline{i} \in I_p$. Pour $i_h \in \mathrm{Supp}(\underline{i})$, on définit l'élément $\underline{i} \vee i_h$ de I_{p-1} par*

$$\underline{i} \vee i_h := (i_1, \dots, \check{i}_h, \dots, i_p)$$

et on désigne par $\mathfrak{S}_{\underline{i} \vee i_h}$ le groupe de permutation de $\mathrm{Supp}(\underline{i} \vee i_h)$.

Il est commode d'introduire les notations suivantes.

Soient p et q deux entiers positifs tels que $q \leq p$. Soit $\underline{i} = (i_1, \dots i_p) \in I_p$ un p-multi-indice ordonné et soit $\underline{j} = (j_1, \dots j_q) \in I_q$ un q-multi-indice ordonné de support contenu dans celui de $\underline{i}$. Posons donc $\underline{j} = (i_{k_1}, \dots, i_{k_q})$ où $\underline{k} = (k_1, \dots, k_q) \in I_q$. Pour s un entier compris entre 1 et q, on pose

$$\underline{k}_s := (k_{q-(s-1)}, \dots, k_q)$$

la liste de I_s des s-derniers éléments de la liste $\underline{k}$, avec pour convention

$$\underline{k}_0 := \underline{k}.$$

On a $\mathrm{Supp}(\underline{k}_s) \subset [\![1, p]\!]$ et $|\underline{k}_s| = k_{q-(s-1)} + \dots + k_q$.

Définition 5.4.3. *L'ensemble K_s est le complémentaire de* $\mathrm{Supp}(\underline{k}_s)$ *dans $[\![1, p]\!]$:*

$$K_s := \left\{ 1, \dots, k_{q-s}, \dots, \check{k}_{q-(s-1)}, \dots, \check{k}_q, \dots, p \right\}.$$

Remarque 5.4.4. *L'ensemble K_s possède $p - s$ éléments. On a l'égalité*

$$K_s = \{k_{q-s}\} \cup K_{s+1}.$$

Définition 5.4.5. *Soit* $0 \leq q \leq p$*, soit* $\underline{i} = I_p$ *et soit* $\underline{j} = I_q$ *avec* $\operatorname{Supp} \underline{j} \subset \operatorname{Supp} \underline{i}$*. Soit* $\underline{k}$ *l'élément de* I_q *définie par* $(j_1, \ldots, j_q) = (i_{k_1}, \ldots, i_{k_q})$*. Pour* s *un entier compris entre* 1 *et* q*, on désigne par* $\underline{i}_s$ *le* $(p-s)$*-multi-indice de* I_{p-s} *défini par*

$$\underline{i}_s := (i_1, \ldots, i_{k_{q-s}}, \ldots, \check{i}_{k_{q-(s-1)}}, \ldots, \check{i}_{k_q}, \ldots, i_p)$$

en convenant que pour $s = 0$*, on pose*

$$\underline{i}_0 := \underline{i} = (i_1, \ldots, i_p).$$

On a l'égalité

$$\underline{i}_s \vee i_{k_{q-s}} = \underline{i}_{s+1}.$$

Pour $h \in K_s$, l'élément $\underline{i}_s \vee i_h$ est un $(p-q-1)$-multi-indice. Si h et h' sont deux éléments distincts de K_s, on a $\underline{i}_s \vee i_h \neq \underline{i}_s \vee i_{h'}$. L'ensemble $\{\underline{i}_s \vee i_h, h \in K_s\}$ est donc constitué de $p-s-1$ éléments deux à deux distincts, chacun d'entre eux étant un $(p-s-1)$-multi-indice.
On a donc l'égalité

$$\{\underline{i}_s \vee i_h, h \in K_s\} = \left\{\underline{i}_s \vee i_{k_{q-s}}\right\} \cup \{\underline{i}_s \vee i_h, h \in K_{s+1}\}.$$

On a donc montré

Proposition 5.4.6. *Pour tout entier* s *tel que* $0 \leq s \leq q \leq p$*, on a :*

$$\{\underline{i}_s \vee i_h, h \in K_s\} = \{\underline{i}_{s+1}\} \cup \{\underline{i}_s \vee i_h, h \in K_{s+1}\}.$$

Notation 5.4.7. *Soit* s *un entier compris entre* 0 *et* p*. Soit* $\underline{i}_s \in I_{p-s}$*.*

1. *On note par* $\mathfrak{S}_{\underline{i}_s}$ *le groupe de permutation de* $\operatorname{Supp}(\underline{i}_s)$*.*
2. *On note*
$$x^{\otimes}_{\underline{i}_s} = x_{i_1} \otimes \cdots \otimes \check{x}_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes \cdots \otimes \check{x}_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_p}$$
où $\check{x}_{i_{k_*}}$ *signifie que le terme* $x_{i_{k_*}}$ *est supprimé dasns le produit tensoriel.*
3. *Pour* $\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_s}$*, on note*
$$x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i}_s)} = x_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes \check{x}_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes \cdots \otimes \check{x}_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i_p)}$$
où $\check{x}_{i_{k_*}}$ *signifie que le terme* $x_{i_{k_*}}$ *est supprimé dasns le produit tensoriel.*

Définition 5.4.8. *Soit* $h \in K_s$*. La permutation* $\sigma_{h,s} \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_s}$ *est définie par*

$$x^{\otimes}_{\sigma_{h,s}(\underline{i}_s)} = x_{i_h} \otimes x^{\otimes}_{\underline{i}_s \vee i_h}.$$

Les deux lemmes suivants sont nécessaires afin de mieux comprendre la démonstration du théorème 5.4.11.

Lemme 5.4.9. *Soit* $\underline{i} \in I_p$. *Soit* $\underline{i} \vee i_h := (i_1, \ldots, \check{i}_h, \ldots, i_p) \in I_{p-1}$ *où* $\mathfrak{S}_{\underline{i} \vee i_h}$ *est le groupe de permutation de* $\mathrm{Supp}(\underline{i} \vee i_h)$. *On a*

$$\sum_{h \in K_s} \Big(\sum_{\tau' \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_s \vee i_h}} \varepsilon(\tau')\varepsilon(\sigma_{h,s}) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes x_{i_h} \otimes x^{\otimes}_{\tau'(\underline{i}_s \vee i_h)} \Big)$$
$$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_s}} \varepsilon(\pi) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes x^{\otimes}_{\pi(\underline{i}_s)}.$$

Démonstration. On a

$$\sum_{h \in K_s} \Big(\sum_{\tau' \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_s \vee i_h}} \varepsilon(\tau')\varepsilon(\sigma_{h,s}) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes x_{i_h} \otimes x^{\otimes}_{\tau'(\underline{i}_s \vee i_h)} \Big)$$
$$= \sum_{h \in K_s} \Big(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_s, h}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma_{h,s}) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes x_{\tau(i_h)} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_s \vee i_h)} \Big)$$
$$= \sum_{h \in K_s} \Big(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_s, h}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma_{h,s}) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes \tau.(x_{i_h} \otimes x^{\otimes}_{\underline{i}_s \vee i_h}) \Big).$$

D'après la définition 5.4.8, on a

$$\sum_{h \in K_s} \Big(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_s, h}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma_{h,s}) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes \tau.(x_{i_h} \otimes x^{\otimes}_{\underline{i}_s \vee i_h}) \Big)$$
$$= \sum_{h \in K_s} \Big(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_s, h}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma_{h,s}) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes (\tau \circ \sigma_{h,s}).(x^{\otimes}_{\underline{i}_s}) \Big).$$

Or $\varepsilon(\tau \circ \sigma_{h,s}) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma_{h,s})$ et $\tau \circ \sigma_{h,s} \in \mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{i}_s \vee i_h}$ donc

$$\sum_{h \in K_s} \Big(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_s, h}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma_{h,s}) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes (\tau \circ \sigma_{h,s}).(x^{\otimes}_{\underline{i}_s}) \Big)$$
$$= \sum_{h \in K_s} \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{i}_s}} \varepsilon(\sigma) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes (\sigma).(x^{\otimes}_{\underline{i}_s}) \Big)$$
$$= \sum_{h \in K_s} \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{i}_s}} \varepsilon(\sigma) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i}_s)} \Big).$$

De la réunion disjointe des ensembles $\coprod_{h \in K_s} \mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{i}_s} = \mathfrak{S}_{\underline{i}_s}$, on en déduit

$$\sum_{h \in K_s} \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^{(h)}_{\underline{i}_s}} \varepsilon(\sigma) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i}_s)} \Big)$$

$$= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_s}} \varepsilon(\pi) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}} \otimes x^{\otimes}_{\pi(\underline{i}_s)}.$$

$\square$

Lemme 5.4.10. *Soient q et p deux entiers avec $0 \leq q \leq p \leq n$. Soient*

$$\psi_p : \mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \otimes \Lambda^p(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}^{\otimes p}$$

et

$$\psi^q : \Lambda^q(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\overline{\mathcal{A}}^{\otimes q}, \mathcal{A}).$$

Soient $\underline{i} \in I_p$ et $\underline{j} \in I_q$. Soient a et a' deux éléments de $\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$. On a

$$\psi_p(a \otimes x_{\underline{i}}) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_q}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}|-q} a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_1}} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_q)} + R$$

avec $R \cap \psi^q(x^*_{\underline{j}} \otimes a') = 0$.

Démonstration. On procède par récurrence sur s grâce à la formule

$$K_s = \{k_{q-s}\} \cap K_{s+1}.$$

<u>Première étape : $K_0 = \{k_q\} \cap K_1$</u>
On a $\{1, \ldots, p\} = K_0$ et $\underline{i}_0 = \underline{i}$ alors

$$\begin{aligned}\psi_p(a \otimes x_{\underline{i}}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}}} \varepsilon(\sigma) a \otimes x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i})} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_0}} \varepsilon(\sigma) a \otimes x^{\otimes}_{\sigma(\underline{i}_0)}.\end{aligned}$$

D'après le lemme 5.4.9 et pour $s = 0$, on a

$$\psi_p(a \otimes x_{\underline{i}}) = \sum_{h \in K_0} \Bigg(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_0 \vee i_h}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma_{h,0}) a \otimes x_{i_h} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_0 \vee i_h)} \Bigg).$$

Mais $K_0 = \{k_q\} \cup K_1$, donc $\psi_p(a \otimes x_{\underline{i}}) = A_1 + R_1$ avec

$$A_1 = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_0 \vee i_{k_q}}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma_{k_q,0}) a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_0 \vee i_{k_q})}$$

et

$R_1 = \sum_{h\in K_1}\Big(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{i}_0\vee i_h}} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma_{h,0})a\otimes x_{i_h}\otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_0\vee i_h)}\Big)$.

Par ailleurs, on a $\underline{i}_0\vee i_{k_q}=\underline{i}_1$, $\underline{k}_1=\{k_q\}$ et $\varepsilon(\sigma_{k_q,0})=(-1)^{k_q-1}=(-1)^{|\underline{k}_1|-1}$ donc

$A_1 = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{i}_1}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}_1|-1}a\otimes x_{i_{k_q}}\otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_1)}$.

On a donc

$$\psi_p(a\otimes x_{\underline{i}}) = A_1 + R_1.$$

Deuxième étape : $K_1=\{k_{q-1}\}\cap K_2$

D'après le lemme 5.4.9 et pour s=1, on a

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{i}_1}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}_1|-1}a\otimes x_{i_{k_q}}\otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_1)} \\ &= \sum_{h\in K_1}\Big(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{i}_1\vee i_h}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}_1|-1}\varepsilon(\sigma_{h,1})a\otimes x_{i_{k_q}}\otimes x_{i_h}\otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_1\vee i_h)}\Big). \end{aligned}$$

Mais $K_1=\{k_{q-1}\}\cup K_2$, donc $A_1=A_2+R_2$ avec

$A_2 = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{i}_1\vee i_{k_{q-1}}}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}_1|-1}\varepsilon(\sigma_{k_{q-1},1})a\otimes x_{i_{k_q}}\otimes x_{i_{k_{q-1}}}\otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_1\vee i_{k_{q-1}})}$

et

$R_2 = \sum_{h\in K_2}\Big(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{i}_1\vee i_h}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}_1|-1}\varepsilon(\sigma_{h,1})a\otimes x_{i_{k_q}}\otimes x_{i_h}\otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_1\vee i_h)}\Big)$.

Par ailleurs, on a $\underline{i}_1\vee i_{k_{q-1}}=\underline{i}_2$, $|\underline{k}_2|=|\underline{k}_1|+\{k_{q-1}\}$ et $(-1)^{|\underline{k}_1|-1}\varepsilon(\sigma_{k_{q-1},1})=(-1)^{|\underline{k}_1|-1}(-1)^{k_{q-1}-1}=(-1)^{|\underline{k}_2|-2}$ donc

$A_2 = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{i}_2}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}_2|-2}a\otimes x_{i_{k_q}}\otimes x_{i_{k_{q-1}}}\otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_2)}$

On a donc $\psi_p(a\otimes x_{\underline{i}})=A_2+R_1+R_2$.

Etape générique : $K_{s-1}=\left\{k_{q-(s-1)}\right\}\cup K_s$

On a $\psi_p(a\otimes x_{\underline{i}})=A_{s-1}+R_1+\cdots+R_{s-1}$ avec

$$A_{s-1} = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{i}_{s-1}}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}_{s-1}|-(s-1)} a\otimes x_{i_{k_q}} \otimes\cdots\otimes x_{i_{k_{q-(s-2)}}} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_{s-1})}$$

et

$$R_\ell = \sum_{h\in K_\ell}\Big(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{i}_{\ell-1}\vee i_h}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}_{\ell-1}|-(\ell-1)}\varepsilon(\sigma_{h,\ell-1}) a\otimes x_{i_{k_q}}\otimes\dots$$
$$\cdots\otimes x_{i_{k_{q-(\ell-2)}}}\otimes x_{i_h}\otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_{(\ell-1)}\vee i_h)}\Big),$$

pour $1\leq \ell\leq s-1$.

Puisque $K_{s-1} = \left\{k_{q-(s-1)}\right\}\cup K_s$, on a

$$A_{s-1} = A_s + R_s$$

pour $1\leq s\leq q$ avec

$$A_s = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{i}_s}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}_s|-s} a\otimes x_{i_{k_q}}\otimes\cdots\otimes x_{i_{k_{q-(s-1)}}}\otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_s)}$$

et

$$R_s = \sum_{h\in K_s}\Big(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{i}_{s-1}\vee i_h}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}_{s-1}|-(s-1)}\varepsilon(\sigma_{h,s-1}) a\otimes x_{i_{k_q}}\otimes\dots$$
$$\cdots\otimes x_{i_{k_{q-(s-2)}}}\otimes x_{i_h}\otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_{s-1}\vee i_h)}\Big).$$

D'où, on a $\psi_p(a\otimes x_{\underline{i}}) = A_s + R_1 + \cdots + R_s$.

Pour $s=q$, on obtient $\psi_p(a\otimes x_{\underline{i}}) = A_q + R$ avec $R = R_1+\cdots+R_q$ et

$$A_q = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\underline{i}_q}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}_q|-q} a\otimes x_{i_{k_q}}\otimes\cdots\otimes x_{i_{k_1}}\otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_q)}.$$

Pour $1\leq s\leq q$, calculons $R_s\cap\psi^q(x^*_{\underline{j}}\otimes a')$.
Pour cela, on regarde les q premiers éléments de chaque monôme de R_s.
Soient $a\otimes x_{s_1}\otimes\cdots\otimes x_{s_q}\otimes X$ un monôme de R_s.
Alors, on a

$$\begin{aligned}(a\otimes x_{s_1}\otimes\cdots\otimes x_{s_q}\otimes X)\cap\psi^q(x^*_{\underline{j}}\otimes a') &= a\Big(\psi^q(x^*_{\underline{j}}\otimes a')(x_{s_1}\otimes\cdots\otimes x_{s_q})\Big)\otimes X\\ &= a\delta^{a'}_{x_{\underline{j}}}(x_{s_1}\otimes\cdots\otimes x_{s_q})\otimes X.\end{aligned}$$

Or, l'indice $\underline{s} = (s_1,\dots,s_q)$ n'est pas strictement décroissant et tel que $\mathrm{Supp}(\underline{j}) = \mathrm{Supp}(\underline{s})$ donc $\delta^{a'}_{x_{\underline{j}}}(x_{s_1}\otimes\cdots\otimes x_{s_q}) = 0$, ce qui montre $R_s\cap\psi^q(x^*_{\underline{j}}\otimes a') = 0$. □

Théorème 5.4.11. *Soient p et q deux entiers positifs où $q \leq p \leq n$. Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
L_p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \otimes L^q(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \arrow[r, "\cap_{Lie}"] \arrow[d, "\psi_p \otimes \psi^q"] & L_{p-q}(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \arrow[d, "\psi_{p-q}"] \\
C_p(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \otimes C^q(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \arrow[r, "\cap"] & C_{p-q}(\mathcal{A}, \mathcal{A})
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que, pour $z \in L_p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ et $f \in L^q(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$, on a

$$\psi_{p-q}(z \cap_{Lie} f) = \psi_p(z) \cap \psi^q(f).$$

Démonstration. Posons $z = a \otimes x_{\underline{i}}$ avec $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_p) \in I_p$ et $f = x^*_{\underline{j}} \otimes a'$ avec $\underline{j} = (j_1, \ldots, j_p) \in I_q$.

Cas 1 : $\mathrm{Supp}(\underline{j}) \not\subset \mathrm{Supp}(\underline{i})$
Pour calculer $\psi_p(a \otimes x_{\underline{i}}) \cap \psi^q(x^*_{\underline{j}} \otimes a')$, on regarde les q premiers éléments de chaque monôme de $\psi_p(a \otimes x_{\underline{i}})$ et on évalue $\psi^q(x^*_{\underline{j}} \otimes a')$ en chacun de ces monômes. Or, on a $\mathrm{Supp}(\underline{j}) \not\subset \mathrm{Supp}(\underline{i})$. Alors, d'après la remarque 3.4.10 , on a $\psi_p(a\otimes x_{\underline{i}})\cap\psi^q(x^*_{\underline{j}}\otimes a') = 0$. Par ailleurs, d'après la définition 5.4.1, on a $(a \otimes x_{\underline{i}}) \cap_{Lie} (x^*_{\underline{j}} \otimes a') = 0$ car $\mathrm{Supp}(\underline{j}) \not\subset \mathrm{Supp}(\underline{i})$.
Donc, on a

$$\psi_{p-q}(z \cap_{Lie} f) = \psi_p(z) \cap \psi^q(f) = 0.$$

Cas 2 : $\mathrm{Supp}(\underline{j}) \subset \mathrm{Supp}(\underline{i})$
On pose $\underline{j} = (i_{k_1}, \ldots, i_{k_q})$ où $1 \leq k_1 < \cdots < k_q \leq p$. D'après le lemme 5.4.10, on a

$$\begin{aligned}
\psi_p(a \otimes x_{\underline{i}}) \cap \psi^q(x^*_{\underline{j}} \otimes a') &= (A_q + R) \cap \psi^q(x^*_{\underline{j}} \otimes a') \\
&= A_q \cap \psi^q(x^*_{\underline{j}} \otimes a') \\
&= \Big(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_q}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}|-q} a \otimes x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_1}} \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_q)} \Big) \cap \psi^q(x^*_{\underline{j}} \otimes a') \\
&= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_q}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}|-q} a \Big(\psi^q(x^*_{\underline{j}} \otimes a')(x_{i_{k_q}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k_1}}) \Big) \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_q)} \\
&= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_q}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}|-q} a \, \delta^{a'}_{x_{\underline{j}}}(1 \otimes x_{i_{k_q}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k_1}}) \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_q)} \\
&= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_q}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}|-q}(-1)^{\frac{(q-1)q}{2}} a \, \delta^{a'}_{x_{\underline{j}}}(1 \otimes x_{i_{k_1}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k_q}}) \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_q)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_q}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}|-q}(-1)^{\frac{(q-1)q}{2}} a\, \delta^{a'}_{x_{\underline{j}}}(1 \otimes x_{\underline{j}}) \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_q)}$$
$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_q}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}|-q}(-1)^{\frac{(q-1)q}{2}} aa' \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_q)}.$$

On a donc
$$\psi_p(z) \cap \psi^q(f) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_q}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}|-\frac{q(q+1)}{2}} aa' \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_q)}.$$

Calculons à présent $\psi_{p-q}(z \cap_{Lie} f)$.
D'après la définition du cap produit $\cap_{Lie}$, on a

$z \cap_{Lie} f$

$= (a \otimes x_{\underline{i}}) \cap_{Lie} (x_{\underline{j}^*} \otimes a')$

$$= \sum_{1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_q \leq p} (-1)^{|\underline{\ell}|-\frac{q(q+1)}{2}} \Big(x^*_{j_1}(x_{i_{\ell_1}}) \dots x^*_{j_q}(x_{i_{\ell_q}})\Big) aa' \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{\ell_q}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}$$

$= (-1)^{|\underline{k}|-\frac{q(q+1)}{2}} aa' \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_{i_{k_q}} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}$

$= (-1)^{|\underline{k}|-\frac{q(q+1)}{2}} aa' \otimes x_{\underline{i}_q},$

ce qui donne
$$\psi_{p-q}\Big(z \cap_{Lie} f\Big) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{\underline{i}_q}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|\underline{k}|-\frac{q(q+1)}{2}} aa' \otimes x^{\otimes}_{\tau(\underline{i}_q)}.$$

On a donc montré
$$\psi_{p-q}\Big(z \cap_{Lie} f\Big) = \psi_p(z) \cap \psi^q(f).$$

□

Proposition 5.4.12. *Soient p et q deux entiers naturels avec $q \leq p \leq n$. Soient $z \in L_p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ et $f \in L^q(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$. On a*
$$d_p(z) \cap_{Lie} f = z \cap_{Lie} d^q(f) + (-1)^p d_{p-q}\Big(z \cap_{Lie} f\Big).$$

Démonstration. Cette formule est une conséquence immédiate de la formule analogue 1.3.2.2 pour le produit cap $\cap$, de la relation $\varphi_* \circ \psi_* = \mathrm{id}_{L_*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})}$ du théorème 5.2.1 et de la formule $\psi_{p-q}(z \cap_{Lie} f) = \psi_p(z) \cap \psi^q(f)$ du théorème 5.4.11. □

5.5 Définition du $\cap_{Lie}$ en (co)-homologie

Soient p et q deux entiers naturels avec $q \leq p \leq n$. Définissons le produit cap :

$$\cap_{Lie} : H_p^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \otimes H^q_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \to H_{p-q}^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}).$$

Pour $\omega \in H_p^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ et $\beta \in H^q_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$, le cap produit $\omega \cap_{Lie} \beta \in H_{p-q}^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ est défini à partir du produit également $\cap_{Lie}$

$$\cap_{Lie} : L_p(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \otimes L^q(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \to L_{p-q}(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}).$$

Ecrivons ω et β sous la forme $\omega = \mathrm{cl}(z)$ et $\beta = \mathrm{cl}(f)$ où $z \in Z_p\Big(L_*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d_*\Big)$ et $f \in Z^q\Big(L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^*\Big)$. D'après la proposition 5.4.12, la formule

$$d_p(z) \cap_{Lie} f = z \cap_{Lie} d^q(f) + (-1)^p d_{p-q}\Big(z \cap_{Lie} f\Big)$$

montre que $z \cap_{Lie} f$ est un d-cycle. Alors on peut définir $\omega \cap_{Lie} \beta \in H_{p-q}^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ comme la classe d'homologie du d-cycle $z \cap_{Lie} f$.

Théorème 5.5.1. *Soit p et q deux entiers positifs avec $q \leq p \leq n$.*
Le diagrame suivant

$$\begin{array}{ccc}
H_p^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \otimes H^q_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) & \xrightarrow{\cap_{Lie}} & H_{p-q}^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}) \\
\downarrow{\scriptstyle \Psi_p \otimes \Psi^q} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_{p-q}} \\
H_p(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \otimes \ H^q(\mathcal{A}, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\cap} & H_{p-q}(\mathcal{A}, \mathcal{A})
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. C'est une conséquence immediate du théorème 5.4.11 et la proposition 5.4.12. Soit $\omega = \mathrm{cl}(z) \in H_p^{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$ et $\beta = \mathrm{cl}(f) \in H^q_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}})$. On a

$$\begin{aligned}
\Psi_{p-q}\Big(\omega \cap_{Lie} \beta\Big) &= \mathrm{cl}\Big(\psi_{p-q}\Big(z \cap_{Lie} f\Big)\Big) \\
&= \mathrm{cl}\Big(\psi_p(z) \cap \psi^q(f)\Big) \\
&= \mathrm{cl}\Big(\psi_p(z)\Big) \cap \mathrm{cl}\Big(\psi^q(f)\Big) \\
&= \Psi_p(\omega) \cap \Psi^q(\beta).
\end{aligned}$$

□

Chapitre 6

Exemples

Dans ce chapitre, on explicite le crochet de Gerstenhaber par les algèbres enveloppantes de Sridharan d'une algèbre de Lie de dimensions 2 et 3 à l'aide du théorème 4.2.7. Dans une première étape, on précise la cohomologie des algèbres enveloppantes d'une algèbre de Lie de dimension 2 et on applique le théorème 4.2.7. Dans le cas de la dimension 3, la cohomologie de ces algèbres a été calculée par Chouhy et Solotar dans [4] et [3].

6.1 Algèbres enveloppantes d'une algèbre de Lie de dimension 2

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif algébriquement clos et de caractéristique 0. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension 2, de base (x, y). D'après [20], l'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{U}_f(\mathfrak{g})$ est nécessairement isomorphe à l'une des trois algèbres suivantes :

1. L'algèbre de polynômes $\mathbb{K}[x, y]$.
2. L'algèbre de Weyl $A_1(\mathbb{K})$ engendrée par deux indéterminées x et y et la relation $[x, y] = 1$.
3. L'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{aff}(1)$ du groupe des transformations affines de la droite : c'est l'algèbre engendrée par deux indéterminées x et y et la relation $[x, y] = y$.

Afin de calculer le crochet de Gerstenhaber, il faut d'abord calculer la cohomologie de Hochschild. On rappelle que, pour $x \in \mathfrak{g}$, l'action adjointe

$$\mathrm{ad}_x : \mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \to \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$$

définie dans la section 3.2 est donnée pour $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ par

$$\mathrm{ad}_x(a) := x.a = xa - ax.$$

Le complexe cohomologique $\left(L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^*\right) = \left(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}, d^*\right)$ défini en 3.2.4 a pour forme

$$0 \to \Lambda^2(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \xrightarrow{d^2} \Lambda^1(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \xrightarrow{d^1} \mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \to 0$$

avec

$$d^1(a) = x^* \otimes \mathrm{ad}_x(a) + y^* \otimes \mathrm{ad}_y(a)$$

et

$$d^2(x^* \otimes a_1 + y^* \otimes a_2) = x^* \wedge y^* \otimes \left(\mathrm{ad}_x(a_2) - a_2 - \mathrm{ad}_y(a_1)\right),$$

pour a, a_1 et a_2 dans $\mathcal{A}$.

6.1.1 Algèbre de Weyl $A_1(\mathbb{K})$

Proposition 6.1.1. *Soit $\mathcal{A} = A_1(\mathbb{K})$ l'algèbre enveloppante de Sridharan associée à l'algèbre de Weyl $A_1(\mathbb{K})$. Le crochet de Gerstenhaber sur $H^*(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ est nul.*

Démonstration. C'est essentiellement pour des raisons de degré. En effet, on a $H^0(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathbb{K}$ et $H^i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$ pour $i > 0$. Ces résultats sont bien connus. Néanmoins, le complexe $\left(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}, d^*\right)$ permet de les retrouver rapidement.

Soit $x^i y^j \in \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$. Par récurrence, on trouve

$$\mathrm{ad}_x(x^i y^j) = [x, x^i y^j]_c = j x^i y^{j-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{ad}_y(x^i y^j) = [y, x^i y^j]_c = -i x^{i-1} y^j. \tag{6.1.1.1}$$

On a

$$H^0(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \{a \,|\, \mathrm{ad}_x(a) = 0 \text{ et } \mathrm{ad}_y(a) = 0\}.$$

Soit $a \in H^0(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, on a donc $\mathrm{ad}_x(a) = \mathrm{ad}_y(a) = 0$. D'après 6.1.1.1, on déduit que $a \in \mathbb{K}$, ce qui montre

$$H^0(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathbb{K}.$$

Soit $f = x^* \otimes a_1 + y^* \otimes a_2 \in \mathrm{Ker}\, d^2$ avec

$$a_1 = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \lambda_{i,j} x^i y^j \quad \text{et} \quad a_2 = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \mu_{i,j} x^i y^j.$$

Soit $b = \displaystyle\sum_{i \geq 0, j \geq 0} \frac{1}{j+1} \lambda_{i,j} x^i y^{j+1}$. On a $f - d^1(b) = y^* \otimes (a_2 - \mathrm{ad}_y(b))$. On peut donc supposer f de la forme $f = y^* \otimes a_2 \in \mathrm{Ker}\, d^2$. Alors on a $\mathrm{ad}_x(a_2) - a_2 = 0$. On déduit que $a_2 = 0$ ce qui montre

$$H^1(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0.$$

Soit $a' \in \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ avec $a' = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \lambda_{i,j} x^i y^j$. Soit $b' = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \frac{1}{i+1} \lambda_{i,j} x^{i+1} y^j$. Alors, on a $x^* \wedge y^* \otimes a + d^2(x^* \otimes b') = 0$ ce qui montre

$$H^2(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0.$$

□

6.1.2 L'algèbre $\mathfrak{aff}(1)$

Soit $\mathcal{U}\big(\mathfrak{aff}(1)\big)$ l'algèbre enveloppante de Sridharan associée à l'algèbre de Lie $\mathfrak{aff}(1)$. On reprend ici des techniques développées par Chouhy et Solotar pour traiter la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{U}(\mathfrak{aff}(1))$.

Proposition 6.1.2 ([3], p. 62 et p. 63)**.**

1. *Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ où $\alpha \neq 0$. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $(x-\alpha)^i = x^i$ alors $i = 0$.*
2. *On a $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}_y) = \mathcal{U}(\mathfrak{aff}(1))y$.*
3. *On a $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_x - \mathrm{id}) = \mathbb{K}[x]y$.*

Proposition 6.1.3. *Soit $\mathcal{A} = \mathcal{U}(\mathfrak{aff}(1))$ l'algèbre enveloppante de Sridharan associée à l'algèbre de Lie $\mathfrak{aff}(1)$.*

1. *On a $H^0(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathbb{K}$.*
2. *L'espace vectoriel $H^1(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ est de dimension 1, de base la classe de l'élément $x^* \otimes 1_{\mathbb{K}}$.*
3. *On a $H^2(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$.*
4. *Le crochet de Gerstenhaber sur $H^*(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ est nul.*

Démonstration. Soit $x^i y^j \in \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$. Par récurrence, on trouve

$$\mathrm{ad}_x(x^i y^j) = [x, x^i y^j]_c = j x^i y^j \text{ et } \mathrm{ad}_y(x^i y^j) = [y, x^i y^j]_c = \Big((x-1)^i - x^i\Big) y^{j+1}. \quad (6.1.2.1)$$

1. On a
$$H^0(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \{a \,|\, \mathrm{ad}_x(a) = 0 \text{ et } \mathrm{ad}_y(a) = 0\}.$$
Soit $a \in H^0(\mathcal{A}, \mathcal{A})$. On a $\mathrm{ad}_x(a) = \mathrm{ad}_y(a) = 0$. D'après 6.1.2.1 et la proposition 6.1.2, on déduit que $a \in \mathbb{K}$.
2. Soit $f = x^* \otimes a_1 + y^* \otimes a_2 \in \mathrm{Ker}\, d^2$ avec

$$a_1 = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \lambda_{i,j} x^i y^j \quad \text{ et } \quad a_2 = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \mu_{i,j} x^i y^j.$$

On pose $a_1 = a_{1,1} + a_{1,2}$ avec $a_{1,1} = \sum_{i \geq 0} \lambda_{i,0} x^i$ et $a_{1,2} = \sum_{i \geq 0,\, j>0} \lambda_{i,j} x^i y^j$. Pour $j > 0$, on a

$$f - d^1(\frac{1}{j} a_{1,2}) = x^* \otimes a_{1,1} + y^* \otimes \big(a_2 - \mathrm{ad}_y(a_{1,2})\big).$$

On peut donc supposer $f = x^* \otimes a_1 + y^* \otimes a_2$ avec $a_1 \in \mathbb{K}[x]$. Mais f est un cocycle, c'est-à-dire $f \in \operatorname{Ker} d^2$ donc

$$\mathrm{ad}_x(a_2) - a_2 - \mathrm{ad}_y(a_1) = 0.$$

Soit F un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(\mathrm{ad}_x - \mathrm{id})$ dans $\mathcal{A}$ et soit p la projection sur $\operatorname{Ker}(\mathrm{ad}_x - \mathrm{id})$ parallèlement à F. On a $p \circ (\mathrm{ad}_x - \mathrm{id}) = 0$ donc $p(\mathrm{ad}_x(a_2) - a_2) = 0$. D'autre part, on a $\mathrm{ad}_y(a_1) \in \operatorname{Ker}(\mathrm{ad}_x - \mathrm{id})$. On a alors

$$\mathrm{ad}_y(a_1) = p\big(\mathrm{ad}_y(a_1)\big) = p\big(\mathrm{ad}_x(a_2) - a_2\big) = 0$$

donc

$$\mathrm{ad}_x(a_2) - a_2 = 0.$$

Or, d'après la proposition 6.1.2, on déduit que $a_1 \in \mathbb{K}$ et $a_2 \in \mathbb{K}[x]y$. Alors on a

$$a_2 = \sum_{i \geq 0} \mu_{i,0} x^i y.$$

D'après la proposition 6.1.2, il existe un polynôme $p \in \mathbb{K}[x]$ tel que $\mathrm{ad}_y(p) = a_2$ avec $\mathrm{ad}_x(a_2) = 0$. On a donc

$$f - d^1(x^* \otimes p) = x^* \otimes a_1$$

avec $a_1 \in \mathbb{K}$ ce qui montre que $H^1(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ est de dimension 1, de base la classe de l'élément $x^* \otimes 1_{\mathbb{K}}$.

3. Soit $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ où $a = a_1 + a_2$ avec

$$a_1 = \sum_{i \geq 0} \lambda_{i,0} x^i \quad \text{et} \quad a_2 = \sum_{i \geq 0,\, j>0} \lambda_{i,j} x^i y^j.$$

D'après la proposition 6.1.2, il existe un élément p tel que $\mathrm{ad}_y(p) = a_2$. D'autre part, on a $\mathrm{ad}_x(a_1) = 0$, c'est-à-dire on a $\mathrm{ad}_x(a_1) - a_1 = -a_1$. Par conséquent, on a

$$x^* \wedge y^* \otimes a - d^2(x^* \otimes p - y^* \otimes a_1) = 0.$$

4. Le crochet $[\ ,\ ]_G : H^1(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \otimes H^1(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \to H^1(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ est évidemment nul puisque $\dim(H^1(\mathcal{A}, \mathcal{A})) = 1$. Montrons que le crochet

$$[\ ,\ ]_G : H^1(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \otimes H^0(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \to H^0(\mathcal{A}, \mathcal{A})$$

est également nul. On calcule le crochet $[\ ,\ ]_G$ à partir des techniques développées au théorème 4.2.7.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{A} \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}, \mathcal{A})$, les symboles de Kronecker δ_1^λ, δ_x^λ et δ_y^λ sont définis par

$$\delta_1^\lambda(1 \otimes 1) = \lambda,$$
$$\delta_x^\lambda(1 \otimes x \otimes 1) = \lambda \quad , \quad \delta_x^\lambda(1 \otimes y \otimes 1) = 0,$$
$$\delta_y^\lambda(1 \otimes x \otimes 1) = 0 \quad \text{et} \quad \delta_y^\lambda(1 \otimes y \otimes 1) = \lambda.$$

Soit $\mu \in \mathbb{K}$. D'après le théorème 4.2.7, on a

$$[x^* \otimes \lambda, \mu]_G = \delta_x^\lambda \circ G_K \circ (1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_1^\mu \otimes_{\mathcal{A}} 1) \circ \Delta_K^{(2)}(1).$$

D'après l'expression de $\Delta_K^{(2)}$ donnée en 4.2.3, on a

$$[x^* \otimes \lambda, \mu]_G = \delta_x^\lambda \circ G_K \circ (1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_1^\mu \otimes_{\mathcal{A}} 1)\big((1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1)\big).$$

D'après l'expression de $1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_1^\mu \otimes_{\mathcal{A}} 1$ donnée en 4.1.5, on a

$$[x^* \otimes \lambda, \mu]_G = \delta_x^\lambda \circ G_K(1 \otimes \mu \otimes 1).$$

D'après l'expression de G_K donnée en 4.2.8, on a

$$[x^* \otimes \lambda, \mu]_G = -\delta_x^\lambda \circ t_0(1 \otimes \mu).$$

Or, d'après l'expression de l'homotopie t_* donnée en 2.1.6, on $t_0(1 \otimes \mu) = 0$ car $\mu \in \mathbb{K}$ donc

$$[x^* \otimes \lambda, \mu]_G = 0.$$

□

6.2 Algèbre enveloppante de l'algèbre de Heisenberg

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique 0. L'algèbre d'Heisenberg, notée $\mathfrak{h}$, est l'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}y \oplus \mathbb{K}z$ de dimension 3, de base (x, y, z) avec pour crochets

$$[x, y] = z \quad \text{et} \quad [x, z] = [y, z] = 0.$$

Dans cette section, on munit $\Lambda^2(\mathfrak{h})$ et $\Lambda^3(\mathfrak{h})$ des bases $(z \wedge y, z \wedge x, y \wedge x)$ et $(z \wedge y \wedge x)$ respectivement. De même, on munit $\Lambda^2(\mathfrak{h}^*)$ et $\Lambda^3(\mathfrak{h}^*)$ des bases $(z^* \wedge y^*, z^* \wedge x^*, y^* \wedge x^*)$ et $(z^* \wedge y^* \wedge x^*)$ respectivement.

6.2.1 Enoncé du résultat

Rappelons que dans [4], Chouhy et Solotar ont calculé la cohomologie de Hochschild à partir du complexe $\left(L^*(\mathbb{K}, \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}), d^*\right) = \left(\Lambda^*(\mathfrak{h}^*) \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}, d^*\right)$ défini en 3.2.4.

Théorème 6.2.1 ([4], p. 12)**.** *Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}$. Les espaces vectoriels $H^*(\mathcal{U}((\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ ont respectivement les bases suivantes :*

1. $H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h}))) = \underset{k\in\mathbb{N}}{\oplus} \mathbb{K}\,\mathrm{t}^0_k$.
2. $H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) = \Big(\underset{(i,j)\in\check{\mathbb{N}}^2}{\oplus} \mathbb{K}\,\mathrm{t}^1_{i,j}\Big) \bigoplus \Big(\underset{k\in\mathbb{N}}{\oplus} \mathbb{K}\,\mathrm{e}^1_k\Big)$, *où* $\check{\mathbb{N}}^2 = \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}$.
3. $H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) = \Big(\underset{(i,j)\in\check{\mathbb{N}}^2}{\oplus} \mathbb{K}\,\mathrm{t}^2_{i,j}\Big) \bigoplus \Big(\underset{(i',j')\in\check{\mathbb{N}}^2}{\oplus} \mathbb{K}\,\mathrm{e}^2_{i',j'}\Big)$, *où* $\check{\mathbb{N}}^2 = \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}$.
4. $H^3(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) = \underset{(i,j)\in\mathbb{N}^2}{\oplus} \mathbb{K}\,\mathrm{t}^3_{i,j}$.
5. $\mathrm{HH}^i(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) = 0$ *pour* $i \geq 4$.

Nous allons montrer

Théorème 6.2.2. *Le crochet de Gerstenhaber est donné par*

1. $[\ ,\ ]_G : H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \otimes H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \to H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$

   $[\mathrm{t}^1_{i,j}\,,\,\mathrm{t}^0_k]_G = 0 \qquad et \qquad [\mathrm{e}^1_{k_1}\,,\,\mathrm{t}^0_{k_2}]_G = 2k_2\,\mathrm{t}^0_{k_1+k_2}.$
2. $[\ ,\ ]_G : H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \otimes H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \to H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$

   $[\mathrm{t}^2_{i,j}\,,\,\mathrm{t}^0_{k\neq 1}]_G = 0 \ ,\ [\mathrm{t}^2_{i,j}\,,\,\mathrm{t}^0_1]_G = -\mathrm{t}^1_{i,j} \quad et \quad [\mathrm{e}^2_{i,j}\,,\,\mathrm{t}^0_k]_G = 0.$
3. $[\ ,\ ]_G : H^3(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \otimes H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \to H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$

   $[\mathrm{t}^3_{i,j}\,,\,\mathrm{t}^0_{k\neq 1}]_G = 0 \qquad et \qquad [\mathrm{t}^3_{i,j}\,,\,\mathrm{t}^0_1]_G = \mathrm{e}^2_{i,j}.$
4. $[\ ,\ ]_G : H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \otimes H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \to H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$

   $[\mathrm{t}^1_{i_1,j_1}\,,\,\mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G = (i_2 j_1 - i_1 j_2)\,\mathrm{t}^1_{(i_1+i_2-1),(j_1+j_2-1)}$

   $[\,\mathrm{e}^1_{k_1}\,,\,\mathrm{e}^1_{k_2}]_G = (k_2 - k_1)\,\mathrm{e}^1_{k_1+k_2}$

   $[\mathrm{t}^1_{i,j}\,,\,\mathrm{e}^1_{k\neq 0}]_G = 0 \quad \text{et} \quad [\mathrm{t}^1_{i,j}\,,\,\mathrm{e}^1_0]_G = (2-i-j)\,\mathrm{t}^1_{i,j}.$

5. $[\ ,\ ]_G : H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \otimes H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \to H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$

$$[\mathrm{e}^2_{i_1,j_1}\,,\,\mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G = (i_2j_1 - i_1j_2)\,\mathrm{e}^2_{(i_1+i_2-1),(j_1+j_2-1)}$$

$$[\mathrm{e}^2_{i,j}\,,\mathrm{e}^1_{k\neq 0}]_G = 0\ ,\ \ [\mathrm{e}^2_{i,j}\,,\,\mathrm{e}^1_0]_G = (2-i-j)\,\mathrm{e}^2_{i,j}$$

$$[\mathrm{t}^2_{i_1,j_1}\,,\,\mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G = (i_2j_1 - i_1j_2)\,\mathrm{t}^2_{(i_1+i_2-1),(j_1+j_2-1)} + \tfrac{1}{2}\Big(i_2j_1(i_2-1)(j_1+j_2-1) - i_1j_2(j_2-1)(i_1+i_2-1)\Big)\,\mathrm{e}^2_{(i_1+i_2-2),(j_1+j_2-2)}$$

$$[\mathrm{t}^2_{i,j}\,,\,\mathrm{e}^1_{k>1}]_G = 0\ \ ,\ \ [\mathrm{t}^2_{i,j}\,,\,\mathrm{e}^1_0]_G = (2-i-j)\,\mathrm{t}^2_{i,j}\ \ \text{et}\ \ [\mathrm{t}^2_{i,j}\,,\,\mathrm{e}^1_1]_G = -4\,\mathrm{e}^2_{i,j}.$$

6. $[\ ,\ ]_G : H^3(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \otimes H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \to H^3(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$

$$[\mathrm{t}^3_{i_1,j_1}\,,\,\mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G = (i_2j_1 - i_1j_2)\,\mathrm{t}^3_{(i_1+i_2-1),(j_1+j_2-1)}$$

$$[\mathrm{t}^3_{i,j}\,,\,\mathrm{e}^1_{k\neq 0}]_G = 0\ \ \text{et}\ \ [\mathrm{t}^3_{i,j}\,,\,\mathrm{e}^1_0]_G = (4-i-j)\,\mathrm{t}^3_{i,j}.$$

7. $[\ ,\ ]_G : H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \otimes H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \to H^3(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$

$$[\mathrm{e}^2_{i_1,j_1}\,,\,\mathrm{e}^2_{i_2,j_2}]_G = 0$$

$$[\mathrm{t}^2_{i_1,j_1}\,,\,\mathrm{e}^2_{i_2,j_2}]_G = (i_2j_1 - i_1j_2)\,\mathrm{t}^3_{(i_1+i_2-1),(j_1+j_2-1)}$$

et

$$[\mathrm{t}^2_{i_1,j_1}\,,\mathrm{t}^2_{i_2,j_2}]_G = \tfrac{1}{2}i_1i_2\Big(j_1(j_1-1) + j_2(j_2-1)\Big)\,\mathrm{t}^3_{(i_1+i_2-2),(j_1+j_2-2)} - \tfrac{1}{2}j_1j_2\Big(i_1(i_1-1) + i_2(i_2-1)\Big)\,\mathrm{t}^3_{(i_1+i_2-2),(j_1+j_2-2)}.$$

Avant de faire la démonstration de ce théorème, remarquons que la sous-algèbre de Lie $\Big(H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})), [\ ,\ ]_G\Big)$ admet une structure assez riche que nous détaillons en terme d'algèbres de Witt à la section 6.2.9.
La suite est consacrée à la demonstration du théorème 6.2.2.
Soient $k \in \mathbb{N}$, $(i,j) \in \check{\mathbb{N}}^2$ et $(i',j') \in \mathbb{N}^2$. D'après Chouhy et Solotar, les éléments suivants sont des cocycles ([4], p.12) :

En dimension 0 : $\tau^0_k := z^k$

En dimension 1 : $\tau^1_{i,j} := x^* \otimes jx^iy^{j-1} - y^* \otimes ix^{i-1}y^j$, $\varepsilon^1_k := x^* \otimes xz^k + y^* \otimes yz^k + 2z^* \otimes z^{k+1}$,

En dimension 2 : $\tau^2_{i,j} := z^* \wedge y^* \otimes ix^{i-1}y^j - z^* \wedge x^* \otimes jx^iy^{j-1}$, $\varepsilon^2_{i,j} := y^* \wedge x^* \otimes x^iy^j$,

En dimension 3 : $\tau^3_{i',j'} := z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes x^{i'}y^{j'}$.

Remarquons que $x^* \otimes xz^k + z^* \otimes z^{k+1} = d^1(xyz^{k-1}) + y^* \otimes yz^k + z^* \otimes z^{k+1}$ donc

$$\mathrm{cl}(x^* \otimes xz^k + y^* \otimes yz^k + 2z^* \otimes z^{k+1}) = 2\mathrm{cl}(x^* \otimes xz^k + z^* \otimes z^{k+1}).$$

Le cocycle ε_k^1 est donc cohomologue au cocycle $2(x^* \otimes xz^k + z^* \otimes z^{k+1})$ initialement introduit par Chouhy et Solotar. Pour la commodité des calculs, nous travaillons avec le cocycle ε_k^1.

On désigne par t la classe de cohomologie du cocycle τ. De même, on désigne par e la classe de cohomologie d'un cocycle ε. D'après Chouhy et Solotar, les éléments t^* et e^* forment une base de $H^*\big(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h})\big)$.

A partir de l'expression du crochet obtenue en 4.2.7, on a

$$[\mathrm{t}^*, \mathrm{e}^*]_G = \mathrm{cl}([\tau^*, \varepsilon^*]_G),$$

où τ^* et ε^* sont des cocyles de $\Lambda^*(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ représentant t^* et e^*.

Notons $\frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ l'unique dérivation de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ définie par

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0.$$

Remarquons que cela implique

$$\frac{\partial}{\partial x}(z) = 0.$$

De même, $\frac{\partial}{\partial y} : \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ est l'unique dérivation de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ définie par

$$\frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1,$$

ce qui implique

$$\frac{\partial}{\partial y}(z) = 0.$$

Soient a, a_1, a_2, a_3 des éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. S. Chouhy a montré ([3], p. 42) que dans le complexe de Kassel $\big(L^*(\mathbb{K}, \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{\mathrm{ad}}), d^*\big) = \big(\Lambda^*(\mathfrak{h}^*) \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{ad}}, d^*\big)$, on a

$$d^1(a) = x^* \otimes z\frac{\partial a}{\partial y} - y^* \otimes z\frac{\partial a}{\partial x} \tag{6.2.1.1}$$

$$\begin{aligned} d^2(x^* \otimes a_1 + y^* \otimes a_2 + z^* \otimes a_3) = {} & y^* \wedge x^* \otimes (a_3 - z\frac{\partial a_1}{\partial x} - z\frac{\partial a_2}{\partial y}) \\ & - z^* \wedge x^* \otimes z\frac{\partial a_3}{\partial y} + z^* \wedge y^* \otimes z\frac{\partial a_3}{\partial x} \end{aligned} \tag{6.2.1.2}$$

$$d^3(y^* \wedge x^* \otimes a_1 + z^* \wedge x^* \otimes a_2 + z^* \wedge y^* \otimes a_3) = z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes (\frac{\partial a_2}{\partial x} + \frac{\partial a_3}{\partial y})z \tag{6.2.1.3}$$

Le symbole de Kroneker s'écrit de la forme suivante :
Soit $a \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ et $x_{\underline{i}} \in \Lambda^*(\mathfrak{h})$. Dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(K_*, \mathcal{U}(\mathfrak{h}))$, le symbole de Kronecker $\delta^a_{x_{\underline{i}}}$ est défini par $\delta^a_{x_{\underline{i}}}(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) = a$ et $\delta^a_{x_{\underline{i}}}(1 \otimes x_{\underline{j}} \otimes 1) = 0$ pour $\underline{j} \neq \underline{i}$.

Afin de faciliter le calcul du crochet de Gerstenhaber, dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(K_*, \mathcal{U}(\mathfrak{h}))$, on introduit les symboles de Kronecker

$f^0_k := \delta^{z^k}_1$,

$f^1_{i,j} := j\delta^{x^i y^{j-1}}_x - i\delta^{x^{i-1}y^j}_y \quad , \quad g^1_k := \delta^{xz^k}_x + \delta^{yz^k}_y + 2\delta^{z^{k+1}}_z$

$f^2_{i,j} := i\delta^{x^{i-1}y^j}_{z\wedge y} - j\delta^{x^i y^{j-1}}_{z\wedge x} \quad , \quad g^2_{i,j} := \delta^{x^i y^j}_{y\wedge x}$

et

$f^3_{i,j} := \delta^{x^i y^j}_{z\wedge y\wedge x}$.

6.2.2 Le cas $p = 1$ et $q = 0$

Calculons $[\mathrm{t}^1_{i,j}, \mathrm{t}^0_k]_G$. Le théorème 4.2.7 donne l'expression du crochet

$$[\tau^1_{i,j}, \tau^0_k]_G = f^1_{i,j} G_K (1 \otimes_{\mathcal{A}} f^0_k \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K (1 \otimes 1).$$

Or, l'expression de $\Delta^{(2)}_K$ est donnée en 4.2.3, d'où

$$[\tau^1_{i,j}, \tau^0_k]_G = f^1_{i,j} G_K (1 \otimes_{\mathcal{A}} f^0_k \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big((1 \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes 1)\Big).$$

D'après l'expression de $1 \otimes_{\mathcal{A}} f^0_k \otimes_{\mathcal{A}} 1$ donnée en 4.1.5, on a

$$[\tau^1_{i,j}, \tau^0_k]_G = f^1_{i,j} G_K (1 \otimes z^k \otimes 1).$$

D'après l'expression de G_K donnée en 4.2.8, on a

$$[\tau^1_{i,j}, \tau^0_k]_G = -f^1_{i,j} t_0 (1 \otimes z^k).$$

D'après l'expression de l'homotopie t_* donnée en 2.1.6, on a

$$[\tau^1_{i,j}, \tau^0_k]_G = f^1_{i,j} (\sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1} \otimes z \otimes z^{k-\ell}).$$

Or, on a déjà supposé que $f^1_{i,j} = j\delta^{x^i y^{j-1}}_x - i\delta^{x^{i-1}y^j}$.D'où, on a

$$[\tau^1_{i,j}, \tau^0_k]_G = \sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1}(0) z^{k-\ell} = 0$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}^1_{i,j}, \mathrm{t}^0_k]_G = 0. \tag{6.2.2.1}$$

Calculons de la même manière $[\mathrm{e}^1_{k_1}, \mathrm{t}^0_{k_2}]_G$. On a

$$\begin{aligned}
[\varepsilon^1_{k_1}, \tau^0_{k_2}]_G &= g^1_{k_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^0_{k_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes 1)\\
&= g^1_{k_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^0_{k_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\big((1 \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes 1)\big)\\
&= g^1_{k_1} G_K(1 \otimes z^{k_2} \otimes 1)\\
&= -g^1_{k_1} t_0(1 \otimes z^{k_2})\\
&= g^1_{k_1}(\sum_{\ell=1}^{k_2} z^{\ell-1} \otimes z \otimes z^{k_2-\ell})\\
&= \sum_{\ell=1}^{k_2} z^{\ell-1}(2z^{k_1+1})z^{k_2-\ell}\\
&= 2k_2\, z^{k_1+k_2}\\
&= 2k_2\, \tau^0_{k_1+k_2}
\end{aligned}$$

ce qui montre

$$[\mathrm{e}^1_{k_1}, \mathrm{t}^0_{k_2}]_G = 2k_2\, \mathrm{t}^0_{k_1+k_2}. \tag{6.2.2.2}$$

6.2.3 Le cas $p = 2$ et $q = 0$

Il est commode de remarquer le résultat suivant.

Proposition 6.2.3. *Soit k un entier tel que $k \geq 1$. L'élément $\tau^1_{i,j} z^k$ est un bord dans $H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h}))$.*

Démonstration. On a $\tau^1_{i,j} z^k = x^* \otimes jx^i y^{j-1} z^k - y^* \otimes ix^{i-1} y^j z^k = d^1(x^i y^j z^{k-1})$. $\square$

Calculons à présent $[\mathrm{t}^2_{i,j}, \mathrm{t}^0_k]_G$. Le théorème 4.2.7 donne l'expression du crochet

$$\begin{aligned}
[\tau^2_{i,j}, \tau^0_k]_G = x^* &\otimes f^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^0_k \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes x \otimes 1)\\
&+ y^* \otimes f^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^0_k \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \otimes 1)\\
&+ z^* \otimes f^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^0_k \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \otimes 1).
\end{aligned}$$

D'après l'expression de $\Delta^{(2)}_K$ donnée en 4.2.3, on a

$$
\begin{aligned}
[\tau^2_{i,j},\tau^0_k]_G = x^*\otimes f^2_{i,j}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^0_k\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big(&(1\otimes x\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)\\
&+(1\otimes 1)\otimes(1\otimes x\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)\\
&\quad+(1\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)\otimes(1\otimes x\otimes 1)\Big)\\
+y^*\otimes f^2_{i,j}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^0_k\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big(&(1\otimes y\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)\\
&+(1\otimes 1)\otimes(1\otimes y\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)\\
&\quad+(1\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)\otimes(1\otimes y\otimes 1)\Big)\\
+z^*\otimes f^2_{i,j}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^0_k\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big(&(1\otimes y\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)\\
&+(1\otimes 1)\otimes(1\otimes y\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)\\
&\quad+(1\otimes 1)\otimes(1\otimes 1)\otimes(1\otimes y\otimes 1)\Big).
\end{aligned}
$$

D'après l'expression de $1\otimes_{\mathcal{A}} f^0_k\otimes_{\mathcal{A}} 1$ donnée en 4.1.5, on a

$$
\begin{aligned}
[\tau^2_{i,j},\tau^0_k]_G &= x^*\otimes f^2_{i,j}G_K(1\otimes x\otimes z^k\otimes 1+1\otimes z^k\otimes x\otimes 1)\\
&+y^*\otimes f^2_{i,j}G_K(1\otimes y\otimes z^k\otimes 1+1\otimes z^k\otimes y\otimes 1)\\
&+z^*\otimes f^2_{i,j}G_K(1\otimes z\otimes z^k\otimes 1+1\otimes z^k\otimes z\otimes 1).
\end{aligned}
$$

D'après l'expression de G_K donnée en 4.2.8, on en déduit

$$
\begin{aligned}
[\tau^2_{i,j},\tau^0_k]_G &= x^*\otimes f^2_{i,j}\big(-t_1(1\otimes x\otimes z^k)-t_1(t_0(1\otimes z^k)x)\big)\\
&+y^*\otimes f^2_{i,j}\big(-t_1(1\otimes y\otimes z^k)-t_1(t_0(1\otimes z^k)y)\big)\\
&+z^*\otimes f^2_{i,j}\big(-t_1(1\otimes z\otimes z^k)-t_1(t_0(1\otimes z^k)z)\big).
\end{aligned}
$$

D'après l'expression de l'homotopie t_* donnée en 2.1.6, on a

$$
\begin{aligned}
[\tau^2_{i,j},\tau^0_k]_G &= x^*\otimes f^2_{i,j}\Big(0+t_1(\sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1}\otimes z\otimes xz^{k-\ell})\Big)+y^*\otimes f^2_{i,j}\Big(0+t_1(\sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1}\otimes z\otimes yz^{k-\ell})\Big)\\
&= +x^*\otimes f^2_{i,j}\Big(\sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1}\otimes z\wedge x\otimes z^{k-\ell}\Big)+y^*\otimes f^2_{i,j}\Big(\sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1}\otimes z\wedge y\otimes z^{k-\ell}\Big)\\
&= +x^*\otimes \sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1}(-jx^iy^{j-1})z^k+y^*\otimes \sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1}(ix^{i-1}y^j)z^k\\
&= -x^*\otimes jkx^iy^{j-1}z^{k-1}+y^*\otimes ikx^{i-1}y^jz^{k-1}\\
&= -k\,\tau^1_{i,j}z^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Or, d'après la proposition 6.2.3, on a $\mathrm{cl}(k\,\tau^1_{i,j}z^{k-1})=0$ pour $k\in\mathbb{N}-\{1\}$, ce qui montre

$$[\mathrm{t}^2_{i,j}, \mathrm{t}^0_1]_G = -\mathrm{t}^1_{i,j} \tag{6.2.3.1}$$

et

$$[\mathrm{t}^2_{i,j}, \mathrm{t}^0_k]_G = 0 \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{N} - \{1\}\,. \tag{6.2.3.2}$$

De manière analogue, calculons $[\mathrm{e}^2_{i,j}, \mathrm{t}^0_k]_G$ avec $(i,j) \in \check{\mathbb{N}}^2 = \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}$. On a

$$\begin{aligned}
[\varepsilon^2_{i,j}, \tau^0_k]_G = x^* \otimes g^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^0_k \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes x \otimes 1) \\
+y^* \otimes g^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^0_k \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \otimes 1) \\
+z^* \otimes g^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^0_k \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \otimes 1) \\
= x^* \otimes g^2_{i,j} G_K(1 \otimes x \otimes z^k \otimes 1 + 1 \otimes z^k \otimes x \otimes 1) \\
+y^* \otimes g^2_{i,j} G_K(1 \otimes y \otimes z^k \otimes 1 + 1 \otimes z^k \otimes y \otimes 1) \\
+z^* \otimes g^2_{i,j} G_K(1 \otimes z \otimes z^k \otimes 1 + 1 \otimes z^k \otimes z \otimes 1) \\
= x^* \otimes g^2_{i,j}\Big(\sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1} \otimes z \wedge x \otimes z^{k-\ell}\Big) + y^* \otimes g^2_{i,j}\Big(\sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1} \otimes z \wedge y \otimes z^{k-\ell}\Big) \\
= 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre

$$[\mathrm{e}^2_{i,j}, \mathrm{t}^0_k]_G = 0. \tag{6.2.3.3}$$

6.2.4 Le cas $p = 3$ et $q = 0$

Il est commode de remarquer le résultat suivant.

Proposition 6.2.4. *Soit k entier tel que $k \geq 1$. L'élément $\varepsilon^2_{i,j} z^k$ est un bord dans $H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h}))$.*

Démonstration. On a

$$\varepsilon^2_{i,j} z^k = y^* \wedge x^* \otimes x^i y^j = -d^2\big(x^* \otimes \tfrac{1}{2(i+1)} x^{i+1} y^j z^{k-1} + y^* \otimes \tfrac{1}{2(j+1)} x^i y^{j+1} z^{k-1}\big).$$

□

Calculons $[\mathrm{t}^3_{i,j}, \mathrm{t}^0_k]_G$. On a

$$\begin{aligned}
[\tau^3_{i,j},\tau^0_k]_G &= z^*\wedge y^*\otimes f^3_{i,j}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^0_k\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1\otimes z\wedge y\otimes 1)\\
&\quad + z^*\wedge x^*\otimes f^3_{i,j}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^0_k\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1\otimes z\wedge x\otimes 1)\\
&\quad + y^*\wedge x^*\otimes f^3_{i,j}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^0_k\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\wedge x\otimes 1)\\
&= z^*\wedge y^*\otimes f^3_{i,j}G_K(1\otimes z\wedge y\otimes z^k\otimes 1 + 1\otimes z^k\otimes z\wedge y\otimes 1\\
&\qquad\qquad + 1\otimes z\otimes z^k\otimes y\otimes 1 - 1\otimes y\otimes z^k\otimes z\otimes 1)\\
&\quad + z^*\wedge x^*\otimes f^3_{i,j}G_K(1\otimes z\wedge x\otimes z^k\otimes 1 + 1\otimes z^k\otimes z\wedge x\otimes 1\\
&\qquad\qquad + 1\otimes z\otimes z^k\otimes x\otimes 1 - 1\otimes x\otimes z^k\otimes z\otimes 1)\\
&\quad + y^*\wedge x^*\otimes f^3_{i,j}G_K(1\otimes y\wedge x\otimes z^k\otimes 1 + 1\otimes z^k\otimes y\wedge x\otimes 1\\
&\qquad\qquad + 1\otimes y\otimes z^k\otimes x\otimes 1 - 1\otimes x\otimes z^k\otimes y\otimes 1)\\
&= y^*\wedge x^*\otimes f^3_{i,j}G_K(1\otimes z^k\otimes y\wedge x\otimes 1)\\
&= y^*\wedge x^*\otimes f^3_{i,j}(t_2(t_1(t_0(1\otimes z^k)y)x)\\
&= y^*\wedge x^*\otimes f^3_{i,j}(\sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1}\otimes z\wedge y\wedge x\otimes z^{k-\ell})\\
&= y^*\wedge x^*\otimes \sum_{\ell=1}^{k} z^{\ell-1}(x^iy^j)z^{k-\ell}\\
&= y^*\wedge x^*\otimes kx^iy^jz^{k-1}\\
&= k\,\varepsilon^2_{i,j}z^{k-1}.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 6.2.4, on a $\mathrm{cl}(k\,\varepsilon^2_{i,j}z^{k-1}) = 0$ pour $k\in\mathbb{N}-\{1\}$, ce qui montre

$$[\mathrm{t}^3_{i,j},\mathrm{t}^0_1]_G = \mathrm{e}^2_{i,j} \tag{6.2.4.1}$$

et

$$[\mathrm{t}^3_{i,j},\mathrm{t}^0_k]_G = 0 \quad\text{pour}\quad k\in\mathbb{N}-\{1\}\,. \tag{6.2.4.2}$$

6.2.5 Le cas $p = 1$ et $q = 1$

Calculons $[\mathrm{t}^1_{i_1,j_1},\mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G$. On a

$$\begin{aligned}
[\tau^1_{i_1,j_1},\tau^1_{i_2,j_2}]_G &= x^*\otimes f^1_{i_1,j_1}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1\otimes x\otimes 1)\\
&\quad - x^*\otimes f^1_{i_2,j_2}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_1,j_1}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1\otimes x\otimes 1)\\
&\quad + y^*\otimes f^1_{i_1,j_1}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\otimes 1)\\
&\quad - y^*\otimes f^1_{i_2,j_2}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_1,j_1}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\otimes 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+z^* \otimes f^1_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \otimes 1)\\
&-z^* \otimes f^1_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \otimes 1)\\
=\;& x^* \otimes \Big(f^1_{i_1,j_1} G_K(j_2 \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes 1) - f^1_{i_2,j_2} G_K(j_1 \otimes x^{i_1}y^{j_1-1} \otimes 1)\Big)\\
&+y^* \otimes \Big(- f^1_{i_1,j_1} G_K(i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes 1) + f^1_{i_2,j_2} G_K(i_1 \otimes x^{i_1-1}y^{j_1} \otimes 1)\Big)\\
=\;& x^* \otimes f^1_{i_1,j_1}\Big(\sum_{\ell=1}^{i_2} j_2 x^{\ell-1} \otimes x \otimes x^{i_2-\ell}y^{j_2-1} + \sum_{\ell=1}^{j_2-1} j_2 x^{i_2}y^{\ell-1} \otimes y \otimes y^{j_2-(\ell+1)}\Big)\\
&-x^* \otimes f^1_{i_2,j_2}\Big(\sum_{\ell=1}^{i_1} j_1 x^{\ell-1} \otimes x \otimes x^{i_1-\ell}y^{j_1-1} + \sum_{\ell=1}^{j_1-1} j_1 x^{i_1}y^{\ell-1} \otimes y \otimes y^{j_1-(\ell+1)}\Big)\\
&-y^* \otimes f^1_{i_1,j_1}\Big(\sum_{\ell=1}^{i_2-1} i_2 x^{\ell-1} \otimes x \otimes x^{i_2-(\ell+1)}y^{j_2} + \sum_{\ell=1}^{j_2} i_2 x^{i_2-1}y^{\ell-1} \otimes y \otimes y^{j_2-\ell}\Big)\\
&+y^* \otimes f^1_{i_2,j_2}\Big(\sum_{\ell=1}^{i_1-1} i_1 x^{\ell-1} \otimes x \otimes x^{i_1-(\ell+1)}y^{j_1} + \sum_{\ell=1}^{j_1} i_1 x^{i_1-1}y^{\ell-1} \otimes y \otimes y^{j_1-\ell}\Big)\\
=\;& x^* \otimes (A+B+C+D) + y^* \otimes (E+F+G+H)
\end{aligned}
$$

avec

$$
A = \sum_{\ell=1}^{i_2} j_2 x^{\ell-1}(j_1 x^{i_1}y^{j_1-1})x^{i_2-\ell}y^{j_2-1}\ , \qquad B = \sum_{\ell=1}^{j_2-1} j_2 x^{i_2}y^{\ell-1}(-i_1 x^{i_1-1}y^{j_1})y^{j_2-(\ell+1)}
$$

$$
C = -\sum_{\ell=1}^{i_1} j_1 x^{\ell-1}(j_2 x^{i_2}y^{j_2-1})x^{i_1-\ell}y^{j_1-1}\ , \qquad D = -\sum_{\ell=1}^{j_1-1} j_1 x^{i_1}y^{\ell-1}(-i_2 x^{i_2-1}y^{j_2})y^{j_1-(\ell+1)}
$$

$$
E = -\sum_{\ell=1}^{i_2-1} i_2 x^{\ell-1}(j_1 x^{i_1}y^{j_1-1})x^{i_2-(\ell+1)}y^{j_2}\ , \quad F = -\sum_{\ell=1}^{j_2} i_2 x^{i_2-1}y^{\ell-1}(-i_1 x^{i_1-1}y^{j_1})y^{j_2-\ell}
$$

$$
G = \sum_{\ell=1}^{i_1-1} i_1 x^{\ell-1}(j_2 x^{i_2}y^{j_2-1})x^{i_1-(\ell+1)}y^{j_1} \ \text{ et } \ H = \sum_{\ell=1}^{j_1} i_1 x^{i_1-1}y^{\ell-1}(-i_2 x^{i_2-1}y^{j_2})y^{j_1-\ell}
$$

Proposition 6.2.5. *Soient i et j deux entiers positifs. On a*

$$
y^j x^i = \sum_{s=0}^{j} \mathrm{C}^j_s \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^i)y^{j-s}(-z)^s.
$$

Démonstration. On a $y^j x = xy^j - jy^{j-1}z$ et $yx^i = x^i y - ix^{i-1}z$, d'où l'égalité par récurrence. □

La proposition 6.2.5 permet de réecrire les éléments A, B, C, D, E, F, G et H dans la base PBW de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$:

$$A = \sum_{\ell=1}^{i_2} \sum_{s=0}^{j_1-1} \mathrm{C}_s^{j_1-1} j_1 j_2 x^{i_1+\ell-1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_2-\ell}) y^{j_1+j_2-(s+2)}(-z)^s$$

$$B = -\sum_{\ell=1}^{j_2-1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \mathrm{C}_s^{\ell-1} i_1 j_2 x^{i_2} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_1-1}) y^{j_1+j_2-(s+2)}(-z)^s$$

$$C = -\sum_{\ell=1}^{i_1} \sum_{s=0}^{j_2-1} \mathrm{C}_s^{j_2-1} j_1 j_2 x^{i_2+\ell-1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_1-\ell}) y^{j_1+j_2-(s+2)}(-z)^s$$

$$D = \sum_{\ell=1}^{j_1-1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \mathrm{C}_s^{\ell-1} j_1 i_2 x^{i_1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_2-1}) y^{j_1+j_2-(s+2)}(-z)^s$$

$$E = -\sum_{\ell=1}^{i_2-1} \sum_{s=0}^{j_1-1} \mathrm{C}_s^{j_1-1} j_1 i_2 x^{i_1+\ell-1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_2-(\ell+1)}) y^{j_1+j_2-(s+1)}(-z)^s$$

$$F = \sum_{\ell=1}^{j_2} \sum_{s=0}^{\ell-1} \mathrm{C}_s^{\ell-1} i_1 i_2 x^{i_2-1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_1-1}) y^{j_1+j_2-(s+1)}(-z)^s$$

$$G = \sum_{\ell=1}^{i_1-1} \sum_{s=0}^{j_2-1} \mathrm{C}_s^{j_2-1} i_1 j_2 x^{i_2+\ell-1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_1-(\ell+1)}) y^{j_1+j_2-(s+1)})(-z)^s$$

$$H = -\sum_{\ell=1}^{j_1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \mathrm{C}_s^{\ell-1} i_1 i_2 x^{i_1-1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_2-1}) y^{j_1+j_2-(s+1)}(-z)^s.$$

Nous allons à présent réecrire les cocycles $x^* \otimes (A+B+C+D)$ et $y^* \otimes (E+F+G+H)$ en fonctions des cocycles de la base de $H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ choisie en 6.2.1. D'abord, introduisons le lemme suivant.

Lemme 6.2.6. *Soient n et s des entiers positifs. On a*

1. $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \ell(\ell+1)\dots(\ell+(s-1)) = \frac{1}{s+1} n(n+1)\dots(n+s).$
2. $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{j_2-1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \mathrm{C}_s^{\ell-1} = \sum_{s=0}^{j_2-2} \frac{1}{s+1} \mathrm{C}_s^{j_2-1}\Big(j_2-(s+1)\Big).$
3. $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{i_1-s} \frac{(i_1-\ell)!}{(i_1-s)!} = \frac{1}{s+1} \frac{i_1(i_1-1)!}{(i_1-(s+1))!}.$

Démonstration.
2. On a

$$\sum_{\ell=1}^{j_2-1}\sum_{s=0}^{\ell-1} \mathrm{C}_s^{\ell-1} = \sum_{0\le s<\ell\le j_2-1} \frac{1}{s!}(\ell-1)\dots(\ell-s).$$

Posons $\ell' = \ell - s$. Alors on a

$$\sum_{0\le s<\ell\le j_2-1} \frac{1}{s!}(\ell-1)\dots(\ell-s) = \sum_{s=0}^{j_2-2}\ \sum_{\ell'=1}^{j_2-(s+1)} \frac{1}{s!}\ell'(\ell'+1)\dots\big(\ell'+(s-1)\big).$$

Or, d'après 1), on a

$$\sum_{s=0}^{j_2-2}\ \sum_{\ell'=1}^{j_2-(s+1)} \frac{1}{s!}\ell'(\ell'+1)\dots\big(\ell'+(s-1)\big)$$

$$= \sum_{s=0}^{j_2-2} \frac{1}{s!}\left(\frac{1}{s+1}\big(j_2-(s+1)\big)(j_2-s)\dots(j_2-1)\right)$$

$$= \sum_{s=0}^{j_2-2} \frac{1}{s+1}\mathrm{C}_s^{j_2-1}\big(j_2-(s+1)\big).$$

3. En posant $\ell' = i_1 - \ell - s + 1$, on a

$$\sum_{\ell=1}^{i_1-s} \frac{(i_1-\ell)!}{(i_1-s)!} = \sum_{\ell=1}^{i_1-s}(i_1-\ell)\dots\big((i_1-\ell)-(s-1)\big) = \sum_{\ell'=1}^{i_1-s}\ell'(\ell'+1)\dots(\ell'+(s-1)).$$

D'après 1), on en déduit

$$\sum_{\ell'=1}^{i_1-s}\ell'(\ell'+1)\dots(\ell'+(s-1)) = \frac{1}{s+1}(i_1-s)\dots(i_1-1)i_1 = \frac{1}{s+1}\frac{i_1(i_1-1)!}{(i_1-(s+1))!}.$$

$\square$

Développons B à l'aide de l'égalité 2 du lemme 6.2.6. On a

$$B = -\sum_{s=0}^{j_2-2} \frac{1}{s+1}\mathrm{C}_s^{j_2-1}\big(j_2-(s+1)\big)i_1 j_2 x^{i_2}\frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_1-1})y^{j_1+j_2-(s+2)}(-z)^s.$$

Or, on vérifie facilement que

$$x^{i_2}\frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_1-1}) = \frac{(i_1-1)!}{\big(i_1-(s+1)\big)!}x^{i_1+i_2-(s+1)}$$

donc

$$B = -\sum_{s=0}^{j_2-2} \frac{1}{s+1} \mathrm{C}_s^{j_2-1} \frac{(i_1-1)!\, i_1 j_2}{\big(i_1-(s+1)\big)!} \Big(j_2-(s+1)\Big) x^{i_1+i_2-(s+1)} y^{j_1+j_2-(s+2)} (-z)^s.$$

Développons C. Pour $s > i_1 - \ell$, on a $C = 0$. On a donc

$$C = -\sum_{\ell=1}^{i_1-s} \sum_{s=0}^{j_2-1} \mathrm{C}_s^{j_2-1} j_1 j_2 x^{i_2+\ell-1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_1-\ell}) y^{j_1+j_2-(s+2)} (-z)^s.$$

Or, on vérifie facilement que

$$x^{i_2+\ell-1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_1-\ell}) = \frac{(i_1-\ell)!}{\big(i_1-(s+\ell)\big)!} x^{i_1+i_2-(s+1)}$$

donc

$$C = -\sum_{\ell=1}^{i_1-s} \sum_{s=0}^{j_2-1} \mathrm{C}_s^{j_2-1} j_1 j_2 \frac{(i_1-\ell)!}{\big(i_1-(s+\ell)\big)!} x^{i_1+i_2-(s+1)} y^{j_1+j_2-(s+2)} (-z)^s.$$

A l'aide de l'égalité 3 du lemme 6.2.6, on a

$$C = -\sum_{s=0}^{j_2-1} \frac{1}{s+1} \mathrm{C}_s^{j_2-1} \frac{(i_1-1)!\, i_1 j_2}{\big(i_1-(s+1)\big)!} j_1 x^{i_1+i_2-(s+1)} y^{j_1+j_2-(s+2)} (-z)^s.$$

D'une manière analogue, on obtient

$$A = \sum_{s=0}^{j_1-1} \frac{1}{s+1} \mathrm{C}_s^{j_1-1} \frac{(i_2-1)!\, i_2 j_1}{\big(i_2-(s+1)\big)!} j_2 x^{i_1+i_2-(s+1)} y^{j_1+j_2-(s+2)} (-z)^s,$$

$$D = \sum_{s=0}^{j_1-2} \frac{1}{s+1} \mathrm{C}_s^{j_1-1} \frac{(i_2-1)!\, i_2 j_1}{\big(i_2-(s+1)\big)!} \Big(j_1-(s+1)\Big) x^{i_1+i_2-(s+1)} y^{j_1+j_2-(s+2)} (-z)^s,$$

$$E = -\sum_{s=0}^{j_1-1} \frac{\mathrm{C}_s^{j_1-1}(i_2-1)!\, i_2 j_1}{(s+1)\big(i_2-(s+1)\big)!} \Big(i_2-(s+1)\Big) x^{i_1+i_2-(s+2)} y^{j_1+j_2-(s+1)} (-z)^s,$$

$$F = \sum_{s=0}^{j_2-1} \frac{\mathrm{C}_s^{j_2-1}(i_1-1)!\, i_1 j_2}{(s+1)\big(i_1-(s+1)\big)!} i_2 x^{i_1+i_2-(s+2)} y^{j_1+j_2-(s+1)} (-z)^s$$

$$G = \sum_{s=0}^{j_2-1} \frac{\mathrm{C}_s^{j_2-1}(i_1-1)!\, i_1 j_2}{(s+1)\big(i_1-(s+1)\big)!} \Big(i_1-(s+1)\Big) x^{i_1+i_2-(s+2)} y^{j_1+j_2-(s+1)} (-z)^s$$

et

$$H = -\sum_{s=0}^{j_1-1} \frac{\mathrm{C}_s^{j_1-1}(i_2-1)!\, i_2 j_1}{(s+1)\big(i_2-(s+1)\big)!} i_1 x^{i_1+i_2-(s+2)} y^{j_1+j_2-(s+1)} (-z)^s$$

Par conséquent, on a

$$B+C=-\sum_{s=0}^{j_2-2}\frac{\mathrm{C}_s^{j_2-1}(i_1-1)!\,i_1j_2}{(s+1)\big(i_1-(s+1)\big)!}\Big(j_1+j_2-(s+1)\Big)x^{i_1+i_2-(s+1)}y^{j_1+j_2-(s+2)}(-z)^s$$
$$-\frac{1}{j_2}\frac{i_1j_2(i_1-1)!}{(i_1-j_2)!}j_1x^{i_1+i_2-j_2}y^{j_1-1}(-z)^s.$$

D'une manière analogue, on trouve

$$A+D=\sum_{s=0}^{j_1-2}\frac{\mathrm{C}_s^{j_1-1}(i_2-1)!\,i_2j_1}{(s+1)\big(i_2-(s+1)\big)!}\Big(j_1+j_2-(s+1)\Big)x^{i_1+i_2-(s+1)}y^{j_1+j_2-(s+2)}(-z)^s$$
$$+\frac{1}{j_1}\frac{i_2j_1(i_2-1)!}{(i_2-j_1)!}j_2x^{i_1+i_2-j_1}y^{j_2-1}(-z)^s.,$$

$$F+G=+\sum_{s=0}^{j_2-1}\frac{\mathrm{C}_s^{j_2-1}(i_1-1)!\,i_1j_2}{(s+1)\big(i_1-(s+1)\big)!}\Big(i_1+i_2-(s+1)\Big)x^{i_1+i_2-(s+2)}y^{j_1+j_2-(s+1)}(-z)^s$$

et

$$E+H=-\sum_{s=0}^{j_1-1}\frac{\mathrm{C}_s^{j_1-1}(i_2-1)!\,i_2j_1}{(s+1)\big(i_2-(s+1)\big)!}\Big(i_1+i_2-(s+1)\Big)x^{i_1+i_2-(s+2)}y^{j_1+j_2-(s+1)}(-z)^s.$$

Par conséquent, on trouve que

$$x^*\otimes(B+C)+y^*\otimes(F+G)=-\sum_{s=0}^{j_2-2}\frac{\mathrm{C}_s^{j_2-1}i_1j_2(i_1-1)!}{(s+1)\big(i_1-(s+1)\big)!}\,\tau^1_{(i_1+i_2-s-1,j_1+j_2-s-1)}(-z)^s$$
$$-\frac{1}{j_2}\frac{i_1j_2(i_1-1)!}{(i_1-j_2)!}\,\tau^1_{(i_1+i_2-j_2,j_1)}(-z)^s.$$

et

$$x^*\otimes(A+D)+y^*\otimes(E+H)=\sum_{s=0}^{j_1-2}\frac{\mathrm{C}_s^{j_1-1}i_2j_1(i_2-1)!}{(s+1)\big(i_2-(s+1)\big)!}\,\tau^1_{(i_1+i_2-s-1,j_1+j_2-s-1)}(-z)^s$$
$$+\frac{1}{j_1}\frac{i_2j_1(i_1-1)!}{(i_2-j_1)!}\,\tau^1_{(i_1+i_2-j_1,j_2)}(-z)^s.$$

D'après la proposition 6.2.3, dans l'expression ci-dessus de $x^*\otimes(B+C)+y^*\otimes(F+G)$, les éléments de la somme pour $s\geq 1$ sont des cobords . Et, de même, dans l'expression ci-dessus de $x^*\otimes(A+D)+y^*\otimes(E+H)$, les éléments de la somme pour $s\geq 1$ sont

des cobords. On en déduit que l'élément $x^*\otimes(A+B+C+D)+y^*\otimes(F+E+F+G)$ est cohomologue à $(i_2j_1-i_1j_2)\,\tau^1_{(i_1+i_2-1,j_1+j_2-1)}$
Par conséquent, on a montré

$$[\mathrm{t}^1_{i_1,j_1},\mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G=(i_2j_1-i_1j_2)\,\mathrm{t}^1_{(i_1+i_2-1,j_1+j_2-1)}. \tag{6.2.5.1}$$

Ensuite, calculons $[\mathrm{e}^1_{k_1},\mathrm{e}^1_{k_2}]_G$. On a

$$\begin{aligned}
&[\varepsilon^1_{k_1},\varepsilon^1_{k_2}]_G\\
&=x^*\otimes\Big(g^1_{k_1}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}g^1_{k_2}\otimes_{\mathcal{A}}1)-g^1_{k_2}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}g^1_{k_1}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes x\otimes 1)\\
&\quad+y^*\otimes\Big(g^1_{k_1}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}g^1_{k_2}\otimes_{\mathcal{A}}1)-g^1_{k_2}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}g^1_{k_1}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\otimes 1)\\
&\quad+z^*\otimes\Big(g^1_{k_1}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}g^1_{k_2}\otimes_{\mathcal{A}}1)-g^1_{k_2}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}g^1_{k_1}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes z\otimes 1)\\
&=x^*\otimes\Big(g^1_{k_1}G_K(1\otimes xz^{k_2}\otimes 1)-g^1_{k_2}G_K(1\otimes xz^{k_1}\otimes 1)\Big)\\
&\quad+y^*\otimes\Big(g^1_{k_1}G_K(1\otimes yz^{k_2}\otimes 1)-g^1_{k_2}G_K(1\otimes yz^{k_1}\otimes 1)\Big)\\
&\quad+z^*\otimes\Big(g^1_{k_1}G_K(1\otimes z^{k_2+1}\otimes 1)-g^1_{k_2}G_K(1\otimes z^{k_1+1}\otimes 1)\Big)\\
&=x^*\otimes(xz^{k_1}z^{k_2}+\sum_{\ell=1}^{k_2}xz^{\ell-1}(z^{k_1+1})z^{k_2-\ell}-xz^{k_1}z^{k_2}-\sum_{\ell=1}^{k_1}xz^{\ell-1}(z^{k_2+1})z^{k_1-\ell})\\
&\quad+y^*\otimes(yz^{k_1}z^{k_2}+\sum_{\ell=1}^{k_2}yz^{\ell-1}(z^{k_1+1})z^{k_2-\ell}-yz^{k_1}z^{k_2}-\sum_{\ell=1}^{k_1}yz^{\ell-1}(z^{k_2+1})z^{k_1-\ell})\\
&\quad+z^*\otimes(\sum_{\ell=1}^{k_2+1}z^{\ell-1}(z^{k_1+1})z^{k_2-\ell}-\sum_{\ell=1}^{k_1+1}z^{\ell-1}(z^{k_2+1})z^{k_1-\ell})\\
&=x^*\otimes(xz^{k_1+k_2}+k_2xz^{k_1+k_2}-xz^{k_1+k_2}-k_1xz^{k_1+k_2})\\
&\quad+y^*\otimes(yz^{k_1+k_2}+k_2yz^{k_1+k_2}-yz^{k_1+k_2}-k_1yz^{k_1+k_2})\\
&\quad+z^*\otimes(k_2z^{k_1+k_2+1}-k_1z^{k_1+k_2+1})\\
&=(k_2-k_1)\Big(x^*\otimes xz^{k_1+k_2}+z^*\otimes z^{k_1+k_2+1}\Big)
\end{aligned}$$

ce qui montre

$$[\mathrm{e}^1_{k_1},\mathrm{e}^1_{k_2}]_G=(k_2-k_1)\mathrm{e}^1_{k_1+k_2}. \tag{6.2.5.2}$$

Calculons $[\mathrm{t}^1_{i,j},\mathrm{e}^1_k]_G$. On a

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{t}^1_{i,j},\mathrm{e}^1_k]_G\\
&= x^*\otimes\Big(f^1_{i,j}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} g^1_k\otimes_{\mathcal{A}}1)-g^1_kG_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i,j}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes x\otimes 1)\\
&\quad +y^*\otimes\Big(f^1_{i,j}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} g^1_k\otimes_{\mathcal{A}}1)-g^1_kG_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i,j}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\otimes 1)\\
&\quad +z^*\otimes\Big(f^1_{i,j}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} g^1_k\otimes_{\mathcal{A}}1)-g^1_kG_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i,j}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes z\otimes 1)\\
&= x^*\otimes\Big(f^1_{i,j}G_K(1\otimes xz^k\otimes 1)-g^1_kG_K(j\otimes x^iy^{j-1}\otimes 1)\Big)\\
&\quad +y^*\otimes\Big(f^1_{i,j}G_K(1\otimes yz^k\otimes 1)-g^1_kG_K(-i\otimes x^{i-1}y^j\otimes 1)\Big).\\
&\quad +z^*\otimes\Big(f^1_{i,j}G_K(2\otimes z^{k+1}\otimes 1)\Big)\\
&= x^*\otimes f^1_{i,j}(1\otimes x\otimes z^k-\sum_{\ell=1}^{i} jx^{\ell-1}\otimes x\otimes x^{i-\ell}y^{j-1}-\sum_{\ell=1}^{j-1} jx^iy^{\ell-1}\otimes y\otimes y^{j-(\ell+1)})\\
&\quad +y^*\otimes f^1_{i,j}(1\otimes y\otimes z^k+\sum_{\ell=1}^{i-1} ix^{\ell-1}\otimes x\otimes x^{i-(\ell+1)}y^j+\sum_{\ell=1}^{j} ix^{i-1}y^{\ell-1}\otimes y\otimes y^{j-\ell}).\\
&= x^*\otimes(jx^iy^{j-1}z^k-\sum_{\ell=1}^{i} jx^{\ell-1}(xz^k)x^{i-\ell}y^{j-1}-\sum_{\ell=1}^{j-1} jx^iy^{\ell-1}(yz^k)y^{j-\ell})\\
&\quad +y^*\otimes(-ix^{i-1}y^jz^k+\sum_{\ell=1}^{i-1} ix^{\ell-1}(xz^k)x^{i-\ell}y^j+\sum_{\ell=1}^{j} ix^{i-1}y^{\ell-1}(yz^k)y^{j-\ell}).\\
&= x^*\otimes(jx^iy^{j-1}z^k-jix^iy^{j-1}z^k-j(j-1)x^iy^{j-1}z^k)\\
&\quad +y^*\otimes(-ix^{i-1}y^jz^k+i(i-1)x^{i-1}y^jz^k+ijx^{i-1}y^jz^k).\\
&= (2-i-j)(x^*\otimes jx^iy^{j-1}-y^*\otimes ix^{i-1}y^j)z^k\\
&= (2-i-j)\tau^1_{i,j}\,z^k.
\end{aligned}
$$

D'après la proposition 6.2.3, on a $\mathrm{cl}(\tau^1_{i,j}\,z^k)=0$ pour $k\in\mathbb{N}^*$ ce qui montre

$$[\mathrm{t}^1_{i,j},\mathrm{e}^1_0]_G=(2-i-j)\mathrm{t}^1_{i,j} \tag{6.2.5.3}$$

et

$$[\mathrm{t}^1_{i,j},\mathrm{e}^1_k]_G=0 \quad\text{pour}\quad k\in\mathbb{N}^*. \tag{6.2.5.4}$$

Remarque 6.2.7. *Nous décrirons explicitement l'isomorphisme d'algèbres de Lie*

$$\Big(H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})),[\,,\,]_G\Big)\cong\Big(\mathrm{Der}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))/\mathrm{Der}(\mathrm{Int}\,\mathcal{U}(\mathfrak{h})),[\,,\,]_c\Big)$$

à la section 6.2.9.

6.2.6 Le cas $p = 2$ et $q = 1$

Il est commode de remarquer le résultat suivant.

Proposition 6.2.8. *Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $(i,j) \in \check{\mathbb{N}}^2$ et $(i',j') \in \check{\mathbb{N}}^2$. Les éléments $\tau^2_{i,j} z^{k+1}$ et $\varepsilon^2_{i',j'} z^k$ sont des bords dans $H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h}))$.*

Démonstration. D'après la formule 6.2.11(p. 111), on a

$$d^2(-\frac{1}{2(i'+1)} x^* \otimes x^{i'+1} y^j z^{k-1} - \frac{1}{2(j'+1)} y^* \otimes x^{i'} y^{j'+1} z^{k-1}) = \varepsilon^2_{i',j'} z^k$$

et

$$d^2(z^* \otimes x^i y^j z^k) = \tau^2_{i,j} z^{k+1} + \varepsilon^2_{i,j} z^k.$$

□

Remarque 6.2.9. *L'élement $\tau^2_{i,j} z$ est cohomologue à $-\varepsilon^2_{i,j}$ où $(i,j) \in \check{\mathbb{N}}^2$.*

<u>*Calcul de* $[\mathrm{t}^2_{i_1,j_1}, \mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G$ *:*</u>

Calculons $[\mathrm{t}^2_{i_1,j_1}, \mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G$. On a

$$\begin{aligned}
&[\tau^2_{i_1,j_1}, \tau^1_{i_2,j_2}]_G \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(f^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1) - f^1_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big) \Delta^{(2)}_K (1 \otimes z \wedge y \otimes 1) \\
&\quad + z^* \wedge x^* \otimes \Big(f^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1) - f^1_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big) \Delta^{(2)}_K (1 \otimes z \wedge x \otimes 1) \\
&\quad + y^* \wedge x^* \otimes \Big(f^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1) - f^1_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big) \Delta^{(2)}_K (1 \otimes y \wedge x \otimes 1) \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(f^2_{i_1,j_1} G_K(i_2 \otimes z \otimes x^{i_2-1} y^{j_2} \otimes 1 + i_2 \otimes x^{i_2-1} y^{j_2} \otimes z \otimes 1) \\
&\qquad\qquad - f^1_{i_2,j_2} G_K(i_1 \otimes x^{i_1-1} y^{j_1} \otimes 1)\Big) \\
&\quad + z^* \wedge x^* \otimes \Big(f^2_{i_1,j_1} G_K(-j_2 \otimes z \otimes x^{i_2} y^{j_2-1} \otimes 1 - j_2 \otimes x^{i_2} y^{j_2-1} \otimes z \otimes 1) \\
&\qquad\qquad + f^1_{i_2,j_2} G_K(j_1 \otimes x^{i_1} y^{j_1-1} \otimes 1)\Big) \\
&\quad + y^* \wedge x^* \otimes \Big(f^2_{i_1,j_1} G_K(-i_2 \otimes x^{i_2-1} y^{j_2} \otimes x \otimes 1 - j_2 \otimes x^{i_2} y^{j_2-1} \otimes y \otimes 1) \\
&\qquad\qquad + f^2_{i_1,j_1} G_K(-i_2 \otimes x \otimes x^{i_2-1} y^{j_2} \otimes 1 - j_2 \otimes y \otimes x^{i_2} y^{j_2-1} \otimes 1)\Big)
\end{aligned}$$

D'après l'expression de G_K donnée en 4.2.8, on remarque que l'on a

$$\begin{aligned}
&f^2_{i_1,j_1}G_K(i_2\otimes z\otimes x^{i_2-1}y^{j_2}\otimes 1)\\
&\quad= -\sum_{\ell=1}^{i_2-1} i_2x^{\ell-1}(-j_1x^{i_1}y^{j_1-1})x^{i_2-(\ell+1)}y^{j_2} - \sum_{\ell=1}^{j_2} i_2x^{i_1-1}y^{\ell-1}(i_1x^{i_1-1}y^{j_1})y^{j_2-\ell}\\
&\quad= -E-F,
\end{aligned}$$

$$f^2_{i_1,j_1}G_K(-i_2\otimes x^{i_2-1}y^{j_2}\otimes z\otimes 1)=0,$$

$$\begin{aligned}
&f^1_{i_2,j_2}G_K(-i_1\otimes x^{i_1-1}y^{j_1}\otimes 1)\\
&\quad= -\sum_{\ell=1}^{i_1-1} i_1x^{\ell-1}(j_2x^{i_2}y^{j_2-1})x^{i_1-(\ell+1)}y^{j_1} - \sum_{\ell=1}^{j_1} i_1x^{i_2-1}y^{\ell-1}(-i_2x^{i_2-1}y^{j_2})y^{j_1-\ell}\Big)\\
&\quad= -G-H.
\end{aligned}$$

De manière analogue, on a

$$\begin{aligned}
&f^2_{i_1,j_1}G_K(-j_2\otimes z\otimes x^{i_2}y^{j_2-1}\otimes 1)\\
&\quad= \sum_{\ell=1}^{i_2} j_2x^{\ell-1}(-j_1x^{i_1}y^{j_1-1})x^{i_2-(\ell)}y^{j_2-1} + \sum_{\ell=1}^{j_2-1} j_2x^{i_2}y^{\ell-1}(i_1x^{i_1-1}y^{j_1})y^{j_2-(\ell+1)}\\
&\quad= -A-B,
\end{aligned}$$

$$f^2_{i_1,j_1}G_K(-j_2\otimes x^{i_2}y^{j_2-1}\otimes z\otimes 1)=0$$

et

$$\begin{aligned}
&f^1_{i_2,j_2}G_K(j_1\otimes x^{i_1}y^{j_1-1}\otimes 1)\\
&\quad= \sum_{\ell=1}^{i_1} j_1x^{\ell-1}(j_2x^{i_2}y^{j_2-1})x^{i_1-(\ell)}y^{j_1-1} + \sum_{\ell=1}^{j_1-1} j_1x^{i_1}y^{\ell-1}(-i_2x^{i_2-1}y^{j_2})y^{j_1-(\ell+1)}\\
&\quad= -C-D
\end{aligned}$$

où les éléments A,B,C,D,E,F,G,H introduits lors du cas $p=q=1$, sont réecrit dans la base PBW de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. D'après un calcul déja fait au cas $p=q=1$(p. 121), on trouve

$$z^* \wedge y^* \otimes (-F-G) - z^* \wedge x^* \otimes (B+C)$$
$$= -\sum_{s=0}^{j_2-2} \frac{\mathrm{C}_s^{j_2-1} i_1 j_2 (i_1-1)!}{(s+1)\big(i_1-(s+1)\big)!} \tau^2_{(i_1+i_2-(s+1), j_1+j_2-(s+1))}(-z)^s,$$
$$-\frac{1}{j_2}\frac{i_1 j_2 (i_1-1)!}{(i_1-j_2)!}\tau^2_{(i_1+i_2-j_2, j_1)}(-z)^s$$

et

$$z^* \wedge y^* \otimes (-E-H) - z^* \wedge x^* \otimes (A+D)$$
$$= \sum_{s=0}^{j_1-2} \frac{\mathrm{C}_s^{j_1-1} i_2 j_1 (i_2-1)!}{(s+1)\big(i_2-(s+1)\big)!} \tau^2_{(i_1+i_2-(s+1), j_1+j_2-(s+1))}(-z)^s,$$
$$+\frac{1}{j_1}\frac{i_2 j_1 (i_2-1)!}{(i_2-j_1)!}\tau^2_{(i_1+i_2-j_1, j_2)}(-z)^s.$$

D'après la proposition 6.2.8, dans l'expression ci-dessus de $z^* \wedge y^* \otimes (-F-G) - z^* \wedge x^* \otimes (B+C)$, les éléments de la somme pour $s \geq 2$ sont des cobords . Et, de même, dans l'expression ci-dessus de $z^* \wedge y^* \otimes (-E-H) - z^* \wedge x^* \otimes (A+D)$, les éléments de la somme pour $s \geq 2$ sont des cobords, ce qui montre

$$\mathrm{cl}\Big(-z^* \wedge y^* \otimes (F+G) - z^* \wedge x^* \otimes (B+C)\Big)$$
$$= \mathrm{cl}\Big(-i_1 j_2 \tau^2_{(i_1+i_2-1, j_1+j_2-1)} + \frac{i_1 j_2}{2}(i_1-1)(j_2-1)\tau^2_{(i_1+i_2-2, j_1+j_2-2)} z\Big)$$

et

$$\mathrm{cl}\Big(z^* \wedge y^* \otimes (-E-H) - z^* \wedge x^* \otimes (A+D)\Big)$$
$$= \mathrm{cl}\Big(+j_1 i_2 \tau^2_{(i_1+i_2-1, j_1+j_2-1)} - \frac{j_1 i_2}{2}(i_2-1)(j_1-1)\tau^2_{(i_1+i_2-2, j_1+j_2-2)} z\Big).$$

Or, d'après la remarque 6.2.9, on déduit que

$$\mathrm{cl}\Big(-z^* \wedge y^* \otimes (F+G) - z^* \wedge x^* \otimes (B+C)\Big)$$
$$= \mathrm{cl}\Big(-i_1 j_2 \tau^2_{(i_1+i_2-1, j_1+j_2-1)} - \frac{i_1 j_2}{2}(i_1-1)(j_2-1)\varepsilon^2_{(i_1+i_2-2, j_1+j_2-2)}\Big)$$

et

$$\mathrm{cl}\Big(z^* \wedge y^* \otimes (-E-H) - z^* \wedge x^* \otimes (A+D)\Big)$$
$$= \mathrm{cl}\Big(+j_1 i_2 \tau^2_{(i_1+i_2-1, j_1+j_2-1)} + \frac{j_1 i_2}{2}(i_2-1)(j_1-1)\varepsilon^2_{(i_1+i_2-2, j_1+j_2-2)}\Big).$$

Dans l'expression $[\mathrm{t}^2_{i_1,j_1}, \mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G$, il nous reste à développer l'élément

$$y^* \wedge x^* \otimes \Big(f^2_{i_1,j_1} G_K(-i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1 - j_2 \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes y \otimes 1)$$
$$+ f^2_{i_1,j_1} G_K(-i_2 \otimes x \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes 1 - j_2 \otimes y \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes 1)\Big).$$

D'après l'expression de G_K donnée en 4.2.8, on vérifie facilement que

$$G_K(j_2 \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes y \otimes 1) = G_K(i_2 \otimes x \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes 1) = 0.$$

Il sera commode d'introduire le lemme suivant pour faciliter les calculs.

Lemme 6.2.10.

1. *On a*

$$G_K(i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1) = \sum_{\ell=1}^{j_2} i_2 x^{i_2-1}y^{\ell-1} \otimes y \wedge x \otimes y^{j_2-\ell}$$
$$- \sum_{\ell=1}^{j_2}\sum_{\ell'=1}^{j_2-\ell} i_2 x^{i_2-1}y^{(\ell+\ell')-2} \otimes z \wedge y \otimes y^{j_2-(\ell+\ell')}.$$

2. *On a*

$$G_K(j_2 \otimes y \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes 1) = -\sum_{\ell=1}^{i_2} j_2 x^{\ell-1} \otimes y \wedge x \otimes x^{i_2-\ell}y^{j_2-1}$$
$$+ \sum_{\ell=1}^{i_2}\sum_{\ell'=1}^{i_2-\ell} j_2 x^{(\ell+\ell')-2} \otimes z \wedge x \otimes x^{i_2-(\ell+\ell')}y^{j_2-1}$$
$$+ \sum_{\ell'=1}^{j_2-1} i_2 j_2 x^{i_2-1}y^{\ell'-1} \otimes z \wedge y \otimes y^{j_2-(\ell'+1)}.$$

Démonstration.
a) D'après l'expression de G_K donnée en 4.2.8, on a

$G_K(i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1)$

$= -t_1(t_0(i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2})x)$

$= t_1\Big(\sum_{\ell=1}^{i_2-1} i_2 x^{\ell-1} \otimes x \otimes x^{i_2-(\ell-1)}y^{j_2}x + \sum_{\ell=1}^{j_2} i_2 x^{i_2-1}y^{\ell-1} \otimes y \otimes y^{j_2-\ell}x\Big).$

En redressant les éléments dans la base PBW, on obtient

$G_K(i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1)$

$= t_1\Big(\sum_{\ell=1}^{i_2-1} i_2 x^{\ell-1} \otimes x \otimes x^{i_2-(\ell-1)}(xy^{j_2} - j_2 y^{j_2-1}z)\Big)$

$\quad + t_1\Big(\sum_{\ell=1}^{j_2} i_2 x^{i_2-1}y^{\ell-1} \otimes y \otimes (xy^{j_2-\ell} - (j_2-\ell)y^{j_2-\ell-1}z)\Big).$

D'après l'expression de l'homotopie t_* donnée en 2.1.6, on obtient

$= t_1(\sum_{\ell=1}^{j_2} i_2 x^{i_2-1}y^{\ell-1} \otimes y \otimes xy^{j_2-\ell})$

$= \sum_{\ell=1}^{j_2} i_2 x^{i_2-1}y^{\ell-1} \otimes y \wedge x \otimes y^{j_2-\ell} - t_1(\sum_{\ell=1}^{j_2} i_2 x^{i_2-1}y^{\ell-1} \otimes z \otimes y^{j_2-\ell})$

$= \sum_{\ell=1}^{j_2} i_2 x^{i_2-1}y^{\ell-1} \otimes y \wedge x \otimes y^{j_2-\ell} - \sum_{\ell=1}^{j_2}\sum_{\ell'=1}^{j_2-\ell} i_2 x^{i_2-1}y^{(\ell+\ell')-2} \otimes z \wedge y \otimes y^{j_2-(\ell+\ell')}.$

b) D'après l'expression de G_K donnée en 4.2.8, on a

$G_K(j_2 \otimes y \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes 1)$

$= -t_1(j_2 \otimes y \otimes x^{i_2}y^{j_2-1})$

$= -j_2 \otimes y \wedge x \otimes x^{i_2-1}y^{j_2-1}$

$\quad -t_1(j_2 \otimes [y,x] \otimes x^{i_2-1}y^{j_2-1})$

$\quad -t_1(j_2 x \otimes y \otimes x^{i_2-1}y^{j_2-1}).$

Or, d'après l'expression de l'homotopie t_* donnée en 2.1.6, on a

$-t_1(j_2 x \otimes y \otimes x^{i_2-1}y^{j_2-1})$

$$= -j_2 x \otimes y \wedge x \otimes x^{i_2-2}y^{j_2-1} - t_1(j_2 x \otimes [y,x] \otimes x^{i_2-2}y^{j_2-1}) - t_1(j_2 x^2 \otimes y \otimes x^{i_2-2}y^{j_2-1}).$$

D'où,

$G_K(j_2 \otimes y \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes 1)$

$= -j_2 \otimes y \wedge x \otimes x^{i_2-1}y^{j_2-1} - j_2 x \otimes y \wedge x \otimes x^{i_2-2}y^{j_2-1}$

$\quad -t_1(j_2 \otimes [y,x] \otimes x^{i_2-1}y^{j_2-1}) - t_1(j_2 x \otimes [y,x] \otimes x^{i_2-2}y^{j_2-1})$

$\quad -t_1(j_2 x^2 \otimes y \otimes x^{i_2-2}y^{j_2-1}).$

Un récurrence sur i_2 conduit à

$G_K(j_2 \otimes y \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes 1)$

$= -\sum_{\ell=1}^{i_2} j_2 x^{\ell-1} \otimes y \wedge x \otimes x^{i_2-\ell}y^{j_2-1} - \sum_{\ell=1}^{i_2} t_1(j_2 x^{\ell-1} \otimes [y,x] \otimes x^{i_2-\ell}y^{j_2-1}).$

Mais

$-\sum_{\ell=1}^{i_2} t_1(j_2 x^{\ell-1} \otimes [y,x] \otimes x^{i_2-\ell}y^{j_2-1})$

$= \sum_{\ell=1}^{i_2} t_1(j_2 x^{\ell-1} \otimes z \otimes x^{i_2-\ell}y^{j_2-1})$

$= \sum_{\ell=1}^{i_2}\sum_{\ell'=1}^{i_2-\ell} j_2 x^{(\ell+\ell')-2} \otimes z \wedge x \otimes x^{i_2-(\ell+\ell')}y^{j_2-1} + \sum_{\ell'=1}^{j_2-1} i_2 j_2 x^{i_2-1}y^{\ell'-1} \otimes z \wedge y \otimes y^{j_2-(\ell'+1)},$

ce qui montre b). $\square$

Calculons à présent $f^2_{i_1,j_1}G_K(-i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1)$. D'après le lemme 6.2.10, on a

$f^2_{i_1,j_1}G_K(-i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1)$

$= f^2_{i_1,j_1}\Big(-\sum_{\ell=1}^{j_2} i_2 x^{i_2-1}y^{\ell-1} \otimes y \wedge x \otimes y^{j_2-\ell} + \sum_{\ell=1}^{j_2}\sum_{\ell'=1}^{j_2-\ell} i_2 x^{i_2-1}y^{(\ell+\ell')-2} \otimes z \wedge y \otimes y^{j_2-(\ell+\ell')}\Big)$

$= 0 + \sum_{\ell=1}^{j_2}\sum_{\ell'=1}^{j_2-\ell} i_2 x^{i_2-1}y^{(\ell+\ell')-2}(i_1 x^{i_1-1}y^{j_1})y^{j_2-(\ell+\ell')}.$

Dans la base PBW, on a

$f^2_{i_1,j_1}G_K(-i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1)$

$= \sum_{\ell=1}^{j_2}\sum_{\ell'=1}^{j_2-\ell}\Big(\sum_{s=0}^{(\ell+\ell')-2} \mathrm{C}_s^{(\ell+\ell')-2} i_1 i_2 x^{i_2-1}\frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_2-1})y^{j_1+j_2-(s+2)}(-z)^s\Big)$

$= \sum_{\ell=1}^{j_2}\sum_{\ell'=1}^{j_2-\ell}\Big(\sum_{s=0}^{(\ell+\ell')-2} \mathrm{C}_s^{(\ell+\ell')-2} i_1 i_2 \frac{(i_2-1)!}{(i_2-(s+1))!}x^{i_1+i_2-(s+2)}y^{j_1+j_2-(s+2)}(-z)^s\Big).$

On a donc

$y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_1,j_1}G_K(-i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1)$

$= \sum_{\ell=1}^{j_2}\sum_{\ell'=1}^{j_2-\ell}\Big(\sum_{s=0}^{(\ell+\ell')-2} \mathrm{C}_s^{(\ell+\ell')-2} i_1 i_2 \frac{(i_2-1)!}{(i_2-(s+1))!}\varepsilon^2_{(i_1+i_2-(s+2),j_1+j_2-(s+2))}(-z)^s\Big).$

Mais d'après la proposition 6.2.8, dans l'expression ci-dessus de

$$y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_1,j_1} G_K(-i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1),$$

les éléments de la somme pour $s \geq 1$ sont des cobords. Ceci montre

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_1,j_1} G_K(-i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1)) &= \sum_{\ell=1}^{j_2} (j_2-\ell) i_1 i_2 \,\mathrm{e}^2_{(i_1+i_2-2, j_1+j_2-2)} \\ &= \frac{j_2(j_2-1)}{2} i_1 i_2 \,\mathrm{e}^2_{(i_1+i_2-2, j_1+j_2-2)}.\end{aligned}$$

Calculons à présent $f^2_{i_1,j_1} G_K(-j_2 \otimes y \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes 1)$. De même, d'après le lemme 6.2.10, on a

$$\begin{aligned}&f^2_{i_1,j_1} G_K(-j_2 \otimes y \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes 1) \\ &= f^2_{i_1,j_1}\Big(\sum_{\ell=1}^{i_2} j_2 x^{\ell-1} \otimes y \wedge x \otimes x^{i_2-\ell}y^{j_2-1} - \sum_{\ell=1}^{i_2}\sum_{\ell'=1}^{i_2-\ell} j_2 x^{(\ell+\ell')-2} \otimes z \wedge x \otimes x^{i_2-(\ell+\ell')}y^{j_2-1} \\ &\qquad - \sum_{\ell'=1}^{j_2-1} i_2 j_2 x^{i_2-1} y^{\ell'-1} \otimes z \wedge y \otimes y^{j_2-(\ell'+1)}\Big) \\ &= -\sum_{\ell=1}^{i_2}\sum_{\ell'=1}^{i_2-\ell} j_2 x^{(\ell+\ell')-2}(-j_1 x^{i_1}y^{j_1-1}) x^{i_2-(\ell+\ell')}y^{j_2-1} - \sum_{\ell'=1}^{j_2-1} i_2 j_2 x^{i_2-1}y^{\ell'-1}(i_1 x^{i_1-1}y^{j_1}) y^{j_2-(\ell'+1)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{i_2}\sum_{\ell'=1}^{i_2-\ell}\Big(\sum_{s=0}^{j_1-1} \mathrm{C}_s^{j_1-1} j_1 j_2 x^{i_1+(\ell+\ell')-2} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_2-(\ell+\ell')}) y^{j_1+j_2+(s-2)}(-z)^s\Big) \\ &\quad - \sum_{\ell'=1}^{j_2-1}\sum_{s=0}^{\ell'-1} \mathrm{C}_s^{\ell'-1} i_1 i_2 j_2 x^{i_2-1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_1-1}) y^{j_1+j_2-(s+2)}(-z)^s \\ &= \sum_{\ell=1}^{i_2}\sum_{\ell'=1}^{i_2-\ell}\Big(\sum_{s=0}^{j_1-1} \mathrm{C}_s^{j_1-1} j_1 j_2 \frac{(i_2-(\ell+\ell'))!}{(i_2-(\ell+\ell'+s))!} x^{i_1+i_2-(s+2)} y^{j_1+j_2+(s-2)}(-z)^s\Big) \\ &\quad - \sum_{\ell'=1}^{j_2-1}\sum_{s=0}^{\ell'-1} \mathrm{C}_s^{\ell'-1} i_1 i_2 j_2 \frac{(i_1-1)!}{(i_1-(s+1))!} x^{i_1+i_2-(s+2)} y^{j_1+j_2-(s+2)}(-z)^s.\end{aligned}$$

On a donc

$$y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_1,j_1} G_K(-j_2 \otimes y \otimes x^{i_2} y^{j_2-1} \otimes 1)$$
$$= \sum_{\ell=1}^{i_2} \sum_{\ell'=1}^{i_2-\ell} \Big(\sum_{s=0}^{j_1-1} \mathrm{C}_s^{j_1-1} j_1 j_2 \frac{(i_2-(\ell+\ell'))!}{(i_2-(\ell+\ell'+s))!} \varepsilon^2_{(i_1+i_2-(s+2),j_1+j_2-(s+2))}(-z)^s \Big)$$
$$- \sum_{\ell'=1}^{j_2-1} \sum_{s=0}^{\ell'-1} \mathrm{C}_s^{\ell'-1} i_1 i_2 j_2 \frac{(i_1-1)!}{(i_1-(s+1))!} \varepsilon^2_{(i_1+i_2-(s+2),j_1+j_2-(s+2))}(-z)^s.$$

D'après la proposition 6.2.8, dans l'expression ci-dessus de

$$y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_1,j_1} G_K(-j_2 \otimes y \otimes x^{i_2} y^{j_2-1} \otimes 1),$$

les éléments de la somme pour $s \geq 1$ sont des cobords, ce qui montre
$\mathrm{cl}(y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_1,j_1} G_K(-j_2 \otimes y \otimes x^{i_2} y^{j_2-1} \otimes 1))$

$$= \Big(+ \sum_{\ell=1}^{i_2} (i_2-\ell) j_1 j_2 - \sum_{\ell'=1}^{j_2-1} i_1 i_2 j_2 \Big)\, \mathrm{e}^2_{(i_1+i_2-2,j_1+j_2-2)}$$
$$= \Big(\frac{i_2(i_2-1)}{2} j_1 j_2 - i_1 i_2 j_2 (j_2-1) \Big)\, \mathrm{e}^2_{(i_1+i_2-2,j_1+j_2-2)}.$$

Par conséquent, on a

$$[\mathrm{t}^2_{i_1,j_1}, \mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G = (i_2 j_1 - i_1 j_2) \mathrm{t}^2_{(i_1+i_2-1,j_1+j_2-1)} \tag{6.2.6.1}$$
$$+ \frac{1}{2}\Big(i_2 j_1 (i_2-1)(j_1+j_2-1) - i_1 j_2 (j_2-1)(i_1+i_2-1) \Big)\, \mathrm{e}^2_{(i_1+i_2-2,j_1+j_2-2)} \Big).$$

Calcul de $[\mathrm{t}^2_{i,j}, \mathrm{e}^1_k]_G$ *:*

Calculons à présent $[\mathrm{t}^2_{i,j}, \mathrm{e}^1_k]_G$. On a

$[\tau^2_{i,j}, \varepsilon^1_k]_G$
$$= z^* \wedge y^* \otimes \Big(f^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^1_k \otimes_{\mathcal{A}} 1) - g^1_k G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i,j} \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Big) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1)$$
$$+ z^* \wedge x^* \otimes \Big(f^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^1_k \otimes_{\mathcal{A}} 1) - g^1_k G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i,j} \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Big) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1)$$
$$+ y^* \wedge x^* \otimes \Big(f^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^1_k \otimes_{\mathcal{A}} 1) - g^1_k G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i,j} \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Big) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \wedge x \otimes 1).$$

Par un calucl simple, on trouve que

$$-g^1_k G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i,j} \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) = -i(i+j-1) x^{i-1} y^j z^k,$$
$$-g^1_k G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i,j} \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) = j(i+j-1) x^i y^{j-1} z^k,$$
$$f^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^1_k \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) = (2k+1) i x^{i-1} y^j z^k,$$

$f^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^1_k \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) = -(2k+1)jx^i y^{j-1} z^k$,

$f^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^1_k \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) = -k(i+j)x^i y^j z^{k-1} + kj(i-1)x^{i-1}y^{j-1}z^k$

et

$g^1_k G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i,j} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) = 0$, ce qui montre

$$[\tau^2_{i,j}, \varepsilon^1_k]_G = (2k+2-i-j)\tau_{i,j} z^k - k(i+j)\varepsilon^2_{i,j} z^{k-1} + kj(i-1)\varepsilon^2_{i-1,j-1} z^k.$$

D'après la proposition 6.2.8, on a

$$[\mathrm{t}^2_{i,j}, \mathrm{e}^1_0]_G = (2-i-j)\mathrm{t}^2_{i,j} \tag{6.2.6.2}$$

$$[\mathrm{t}^2_{i,j}, \mathrm{e}^1_1]_G = -4\mathrm{e}^2_{i,j} \tag{6.2.6.3}$$

et

$$[\mathrm{t}^2_{i,j}, \mathrm{e}^1_k]_G = 0 \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{N} - \{0,1\}. \tag{6.2.6.4}$$

Calcul de $[\mathrm{e}^2_{i_1,j_1}, \mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G$ *:*

Calculons à présent $[\mathrm{e}^2_{i_1,j_1}, \mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G$ où $(i_1, j_2) \in \check{\mathbb{N}}^2$. On a

$[\varepsilon^2_{i_1,j_1}, \tau^1_{i_2,j_2}]_G$

$= z^* \wedge y^* \otimes \Big(g^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1) - f^1_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge y \otimes 1)$

$+z^* \wedge x^* \otimes \Big(g^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1) - f^1_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge x \otimes 1)$

$+y^* \wedge x^* \otimes \Big(g^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1) - f^1_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1)$.

Par un simple calcul, on trouve que

$$\Big(g^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1) - f^1_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) = 0$$

et

$$\Big(g^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1) - f^1_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) = 0.$$

Calculons à présent $g^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1)$. On a

$$
\begin{aligned}
&g^2_{i_1,j_1}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\wedge x\otimes 1)\\
&\quad = g^2_{i_1,j_1}G_K(-i_2\otimes x^{i_2-1}y^{j_2}\otimes x\otimes 1-j_2\otimes x^{i_2}y^{j_2-1}\otimes y\otimes 1\\
&\qquad\qquad -i_2\otimes x\otimes x^{i_2-1}y^{j_2}\otimes 1-j_2\otimes y\otimes x^{i_2}y^{j_2-1}\otimes 1).
\end{aligned}
$$

On vérifie facilement que

$$G_K(-j_2\otimes x^{i_2}y^{j_2-1}\otimes y\otimes 1-i_2\otimes x\otimes x^{i_2-1}y^{j_2}\otimes 1)=0.$$

Or, d'après le lemme 6.2.10, on a

$$
\begin{aligned}
&g^2_{i_1,j_1}G_K(-i_2\otimes x^{i_2-1}y^{j_2}\otimes x\otimes 1-j_2\otimes y\otimes x^{i_2}y^{j_2-1}\otimes 1\\
&\quad = -\sum_{\ell=1}^{j_2} i_2x^{i_2-1}y^{\ell-1}(x^{i_1}y^{j_1})y^{j_2-\ell}+\sum_{\ell=1}^{i_2} j_2x^{\ell-1}(x^{i_1}y^{j_1})x^{i_2-\ell}y^{j_2-1}\\
&\quad = -\sum_{\ell=1}^{j_2}\sum_{s=0}^{\ell-1}\mathrm{C}_s^{\ell-1}i_2\frac{i_1!}{(i_1-s)!}x^{i_1+i_2-(s+1)}y^{j_1+j_2-(s+1)}(-z)^s\\
&\qquad +\sum_{\ell=1}^{i_2-s}\sum_{s=0}^{j_1}\mathrm{C}_s^{j_1}j_2\frac{(i_2-\ell)!}{(i_2-(s+\ell))!}x^{i_1+i_2-(s+1)}y^{j_1+j_2-(s+1)}(-z)^s.
\end{aligned}
$$

D'après la proposition 6.2.8, dans l'expression de

$$y^*\wedge x^*\otimes g^2_{i_1,j_1}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\wedge x\otimes 1),$$

les éléments de la somme pour $s\geq 1$ sont des cobords, ce qui montre

$$\mathrm{cl}\Big(y^*\wedge x^*\otimes g^2_{i_1,j_1}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} f^1_{i_2,j_2}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\wedge x\otimes 1)\Big)=(i_2j_2-i_2j_2)\mathrm{e}^2_{(i_1+i_2-1,j_1+j_2-1)}.$$

Calculons $-f^1_{i_2,j_2}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_1,j_1}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\wedge x\otimes 1)$. D'après le lemme 6.2.10, on a

$$
\begin{aligned}
&-f^1_{i_2,j_2}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_1,j_1}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\wedge x\otimes 1)\\
&\quad = f^1_{i_2,j_2}G_K(-1\otimes x^{i_1}y^{j_1}\otimes 1)\\
&\quad = -\sum_{\ell=1}^{i_1} x^{\ell-1}(j_2x^{i_2}y^{j_2-1})x^{i_1-\ell}y^{j_1}-\sum_{\ell=1}^{j_1} x^{i_1}y^{\ell-1}(-i_2x^{i_2-1}y^{j_2})y^{j_1-\ell}\\
&\quad = -\sum_{\ell=1}^{i_1-s}\sum_{s=0}^{j_2-1}\mathrm{C}_s^{j_2-1}j_2\frac{(i_1-\ell)!}{(i_1-(s+\ell))!}x^{i_1+i_2-(s+1)}y^{j_1+j_2-(s+1)}(-z)^s\\
&\qquad +\sum_{\ell=1}^{j_1}\sum_{s=0}^{\ell-1}\mathrm{C}_s^{\ell-1}i_2\frac{(i_2-1)!}{(i_2-(s+1))!}x^{i_1+i_2-(s+1)}y^{j_1+j_2-(s+1)}(-z)^s
\end{aligned}
$$

D'après la proposition 6.2.8, dans l'expression de

$$-y^* \wedge x^* \otimes f^1_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1),$$

les éléments de la somme pour $s \geq 1$ sont des cobords, ce qui montre

$$\mathrm{cl}\Big(-f^1_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) = (i_2 j_1 - i_1 j_2)\mathrm{e}^2_{(i_1+i_2-1,j_1+j_2-1)}.$$

Par conséquent, on a

$$[\mathrm{e}^2_{i_1,j_1}, \mathrm{t}^1_{i_2,j_2}]_G = (i_2 j_1 - i_1 j_2)\mathrm{e}^2_{(i_1+i2-1,j_1+j_2-1)}. \tag{6.2.6.5}$$

Calcul de $[\mathrm{e}^2_{i,j}, \mathrm{e}^1_k]_G$ *:*

Calculons $[\mathrm{e}^2_{i,j}, \mathrm{e}^1_k]_G$. On a

$[\varepsilon^2_{i,j}, \varepsilon^1_k]_G$

$= z^* \wedge y^* \otimes \Big(g^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^1_k \otimes_{\mathcal{A}} 1) - g^1_k G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i,j} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge y \otimes 1)$

$+z^* \wedge x^* \otimes \Big(g^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^1_k \otimes_{\mathcal{A}} 1) - g^1_k G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i,j} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge x \otimes 1)$

$+y^* \wedge x^* \otimes \Big(g^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^1_k \otimes_{\mathcal{A}} 1) - g^1_k G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i,j} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1).$

Par un simple calcul, on trouve que

$$\Big(g^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^1_k \otimes_{\mathcal{A}} 1) - g^1_k G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i,j} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) = 0$$

et

$$\Big(g^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^1_k \otimes_{\mathcal{A}} 1) - g^1_k G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i,j} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) = 0.$$

D'autre part, on a

$g^2_{i,j} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^1_k \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) = 2x^i y^j z^k$

et

$-g^1_k G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i,j} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) = -(i+j)x^i y^j z^k.$

D'après la proposition 6.2.8, on a alors

$$[\mathrm{e}^2_{i,j}, \mathrm{e}^1_0]_G = (2-i-j)\mathrm{e}^2_{i,j} \tag{6.2.6.6}$$

et

$$[\mathrm{e}^2_{i,j}, \mathrm{e}^1_k]_G = 0 \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{6.2.6.7}$$

6.2.7 Le cas $p = 3$ et $q = 1$

Il sera commode d'introduire la proposition suivante.

Proposition 6.2.11. *Soit k un entier positif. L'élément $\tau^3_{i,j} z^k$ est un bord dans $H^3(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h}))$.*

Démonstration. On a

$$d^3(z^* \wedge x^* \otimes \frac{1}{i+1} x^{i+1} y^j z^{k-1} + z^* \wedge y^* \otimes \frac{1}{j+1} x^i y^{j+1} z^{k-1}) = \tau^3_{i,j} z^k.$$

□

Calculons $[\mathrm{t}^3_{i_1,j_1}, \mathrm{t}^1_{i_1,j_1}]_G$. D'après la proposition 6.2.11 et après calculs, on trouve

$$[\mathrm{t}^3_{i_1,j_1}, \mathrm{t}^1_{i_1,j_1}]_G = (i_2 j_1 - i_1 j_2)\mathrm{t}^3_{i_1+i_2-1, j_1+j_2-1}, \tag{6.2.7.1}$$

$$[\mathrm{t}^3_{i,j}, \mathrm{e}^1_0]_G = (4 - i - j)\mathrm{t}^3_{i,j} \tag{6.2.7.2}$$

et

$$[\mathrm{t}^3_{i,j}, \mathrm{e}^1_k]_G = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq 0. \tag{6.2.7.3}$$

6.2.8 Le cas $p = q = 2$

Calculons $[\mathrm{t}^2_{i_1,j_1}, \mathrm{t}^2_{i_2,j_2}]_G$. On a

$$\begin{aligned}[\tau^2_{i_1,j_1}, \tau^2_{i_2,j_2}]_G &= z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1) \\ &\quad + z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1)\end{aligned}$$

Calculons $f^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1)$. On a

$$\begin{aligned}&f^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1) \\ &= f^2_{i_1,j_1} G_K(i_2 \otimes x^{i_2-1} y^{j_2} \otimes x \otimes 1 + j_2 \otimes x^{i_2} y^{j_2-1} \otimes y \otimes 1 \\ &\qquad + i_2 \otimes x \otimes x^{i_2-1} y^{j_2} \otimes 1 + j_2 \otimes y \otimes x^{i_2} y^{j_2-1} \otimes 1).\end{aligned}$$

On vérifie facilement que

$$f^2_{i_1,j_1} G_K(j_2 \otimes x^{i_2} y^{j_2-1} \otimes y \otimes 1 + i_2 \otimes x \otimes x^{i_2-1} y^{j_2} \otimes 1) = 0.$$

D'après le cas $p = 2$ et $q = 1$(p. 129-130), on a

$$f^2_{i_1,j_1}G_K(i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1)$$
$$= -\sum_{\ell=1}^{j_2}\sum_{\ell'=1}^{j_2-\ell}\Big(\sum_{s=0}^{(\ell+\ell')-2} \mathrm{C}_s^{(\ell+\ell')-2} i_1 i_2 \frac{(i_2-1)!}{(i_2-(s+1))!} x^{i_1+i_2-(s+2)}y^{j_1+j_2-(\ell+\ell')}(-z)^s\Big)$$

et

$$f^2_{i_1,j_1}G_K(j_2 \otimes y \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes 1)$$
$$= -\sum_{\ell=1}^{i_2}\sum_{\ell'=1}^{i_2-\ell}\Big(\sum_{s=0}^{j_1-1} \mathrm{C}_s^{j_1-1} j_1 j_2 \frac{(i_2-(\ell+\ell'))!}{(i_2-(\ell+\ell'+s))!} x^{i_1+i_2-(s+2)}y^{j_1+j_2+(s-2)}(-z)^s\Big)$$
$$+\sum_{\ell'=1}^{j_2-1}\sum_{s=0}^{\ell'-1} \mathrm{C}_s^{\ell'-1} i_1 i_2 j_2 \frac{(i_1-1)!}{(i_1-(s+1))!} x^{i_1+i_2-(s+2)}y^{j_1+j_2-(s+2)}(-z)^s.$$

D'après la proposition 6.2.11, dans l'expression de

$$z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_1,j_1}G_K(i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1),$$

les éléments de la somme pour $s \geq 1$ sont des cobords. Et, de même, dans l'expression de $z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_1,j_1}G_K(j_2 \otimes y \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes 1)$, les éléments de la somme pour $s \geq 1$ sont des cobords, ce qui montre

$$\mathrm{cl}\Big(z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes \Big(f^2_{i_1,j_1}G_K(i_2 \otimes x^{i_2-1}y^{j_2} \otimes x \otimes 1) + f^2_{i_1,j_1}G_K(j_2 \otimes y \otimes x^{i_2}y^{j_2-1} \otimes 1)\Big)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(i_1 i_2 j_2(j_2-1) - j_1 j_2 i_2(i_2-1)\Big)\, \mathrm{t}^3_{(i_1+i_2-2,j_1+j_2-2)}.$$

On en déduit

$$\mathrm{cl}\Big(z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_1,j_1}G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(i_1 i_2 j_2(j_2-1) - j_1 j_2 i_2(i_2-1)\Big)\, \mathrm{t}^3_{(i_1+i_2-2,j_1+j_2-2)}.$$

En remplaçant i_1 par i_2 et j_1 par j_2 et inversement, on obtient

$$\mathrm{cl}\Big(z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_2,j_2}G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(i_1 i_2 j_1(j_1-1) - j_1 j_2 i_1(i_1-1)\Big)\, \mathrm{t}^3_{(i_1+i_2-2,j_1+j_2-2)}.$$

Par conséquent, on a

$$[\mathrm{t}^2_{i_1,j_1}, \mathrm{t}^2_{i_2,j_2}]_G \tag{6.2.8.1}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(i_1 i_2\Big(j_1(j_1-1) + j_2(j_2-1)\Big) - j_1 j_2\Big(i_1(i_1-1) + i_2(i_2-1)\Big)\Big)\, \mathrm{t}^3_{(i_1+i_2-2,j_1+j_2-2)}.$$

D'autre part, par un calcul simple, on trouve que

$$[\mathrm{e}^2_{i_1,j_1}, \mathrm{e}^2_{i_2,j_2}]_G = 0. \tag{6.2.8.2}$$

Calculons $[\mathrm{t}^2_{i_1,j_1}, \mathrm{e}^2_{i_2,j_2}]_G$. On a

$$\begin{aligned}[\tau^2_{i_1,j_1}, \varepsilon^2_{i_2,j_2}]_G &= z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1)\\ &+ z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes g^2_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1).\end{aligned}$$

D'après le lemme 6.2.10, on a

$$\begin{aligned}&g^2_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1)\\ &= \sum_{\ell=1}^{j_1} i_1 x^{i_1-1} y^{\ell-1}(x^{i_2} y^{j_2}) y^{j_1-\ell} - \sum_{\ell=1}^{i_1} j_1 x^{\ell-1}(x^{i_2} y^{j_2}) x^{\ell-j} y^{j_1-1}\\ &= \sum_{\ell=1}^{j_1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \mathrm{C}_s^{\ell-1} i_1 x^{i_1-1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_2}) y^{j_1+j_2-(s+1)}(-z)^s\\ &- \sum_{\ell=1}^{i_1} \sum_{s=0}^{j_2} \mathrm{C}_s^{j_2} j_1 x^{i_2+\ell-1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{\ell-1}) y^{j_1+j_2-(s+1)}(-z)^s.\end{aligned}$$

D'après la proposition 6.2.11, dans l'expression de

$$z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes g^2_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1),$$

les éléments de la somme pour $s \geq 1$ sont des cobords, ce qui montre

$$\begin{aligned}&\mathrm{cl}\Big(z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes g^2_{i_2,j_2} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} f^2_{i_1,j_1} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1)\Big)\\ &\quad = \mathrm{cl}\Big(z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes (i_1 j_1 - j_1 i_1) x^{i_1+i_2-1} y^{j_1+j_2-1}\Big)\\ &\quad = 0.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}&f^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1)\\ &= f^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes z \otimes x^{i_2} y^{j_2} \otimes 1)\\ &= -f^2_{i_1,j_1}\Big(\sum_{\ell=1}^{i_2} x^{\ell-1} \otimes z \wedge x \otimes x^{i_2-\ell} y^{j_2} + \sum_{\ell=1}^{j_2} x^{i_2} y^{\ell-1} \otimes z \wedge y \otimes y^{j_2-\ell}\Big)\\ &= \sum_{\ell=1}^{i_2} j_1 x^{\ell-1}(x^{i_1} y^{j_1-1}) x^{i_2-\ell} y^{j_2} - \sum_{\ell=1}^{j_2} i_1 x^{i_2} y^{\ell-1}(x^{i_1-1} y^{j_1}) y^{j_2-\ell}\end{aligned}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{i_2} \sum_{s=0}^{j_1-1} \mathrm{C}_s^{j_1-1} j_1 x^{i_1+\ell-1} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_2-\ell}) y^{j_1+j_2-1}(-z)^s$$
$$- \sum_{\ell=1}^{j_2} \sum_{s=0}^{\ell-1} \mathrm{C}_s^{\ell-1} i_1 x^{i_2} \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^{i_1-1}) y^{j_1+j_2-1}(-z)^s$$

D'après la proposition 6.2.11, dans l'expression de

$$z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes f^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1),$$

les éléments de la somme pour $s \geq 1$ sont des cobords, ce qui montre

Alors, on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cl}\Big(f^2_{i_1,j_1} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} g^2_{i_2,j_2} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K(1 \otimes z \wedge y \wedge x \otimes 1)\Big) \\
&\quad = \mathrm{cl}\Big(z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes (i_2 j_1 - i_1 j_2) x^{i_1+i_2-1} y^{j_1+j_2-1}\Big) \\
&\quad = z^* \wedge y^* \wedge x^* \otimes (i_2 j_1 - i_1 j_2) \mathrm{t}^2_{i_1+2-1,j_1+j_2-1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$[\mathrm{t}^2_{i_1,j_1}, \mathrm{e}^2_{i_2,j_2}]_G = (i_2 j_1 - i_1 j_2) \mathrm{t}^3_{i_1+2-1,j_1+j_2-1}. \tag{6.2.8.3}$$

6.2.9 L'algèbre de Lie $(H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h})), [\ ,\ ]_G)$

Nous remercions T. Lambre pour son aide lors de cette section. Soit $\mathbb{K}$ toujours un corps de caractéristique nulle. Rappelons que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $W = \oplus_{i \in \mathbf{N}} \mathbb{K}\, e_i$, muni du crochet $[e_i, e_j] = (j-i)\ e_{i+j}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie, appelée la partie positive de l'algèbre de Lie de Witt de $\mathbb{K}$.

Soit $\underline{j} = (j_1, j_2)$ un élément de $[\![-1, \infty[\![^2$. On supposera toujours $\underline{j} \neq (-1,-1)$. On pose

$$\mathbf{J} := [\![-1, \infty[\![^2 \setminus \{(-1,-1)\}.$$

Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel bigradué $W^2 := \oplus_{\underline{j} \in \mathbf{J}} \mathbb{K} t_{\underline{j}}$. Définissons un crochet sur W^2 par

$$[t_{\underline{i}}, t_{\underline{j}}] = \alpha(\underline{i}, \underline{j})\ t_{\underline{i}+\underline{j}}$$

avec

$$\alpha(\underline{i}, \underline{j}) = (j_2+1)(i_1+1) - (j_1+1)(i_2+1).$$

Dans cette expression, il est commode de convenir $t_{\underline{i}} = 0$ si $\underline{i} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathbf{J}$. Un calcul rapide montre que ce crochet satisfait l'identité de Jacobi. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel W^2 muni du crochet $[t_{\underline{i}}, t_{\underline{j}}]$ ci-dessus est donc une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie $(W^2, [\ ,\ ])$. Introduisons une algèbre de Witt tri-graduée.

Définition 6.2.12. *On désigne par* $(\mathcal{W}, [\ ,\ ])$ *l'algèbre de Lie d'espace vectoriel sous-jacent le produit des algèbres de Lie* W *et* W^2*,*

$$\mathcal{W} = W \oplus W^2 = \Big(\oplus_{i \in \mathbf{N}} \mathbb{K}\, e_i \Big) \bigoplus \Big(\oplus_{\underline{j} \in \mathbf{J}} \mathbb{K}\, t_{\underline{j}} \Big)$$

dont le crochet de Lie est le crochet sur chacune des composantes, c'est-à-dire

$[e_i, e_j] = (j - i)\ e_{i+j}$*, pour tout* i *et* j *dans* $\mathbb{N}$*.*

$[t_{\underline{i}}, t_{\underline{j}}] = \alpha(\underline{i}, \underline{j})\ t_{\underline{i}+\underline{j}}$*, pour tout* $\underline{i}$ *et* $\underline{j}$ *dans* $\mathbf{J}$*,*

et dont le crochet des éléments croisés est donné par

$[e_i, t_{\underline{j}}] = 0$ *si* $i > 0$*, pour tout* $\underline{j} \in \mathbf{J}$*,*

$[e_0, t_{\underline{j}}] = (j_1 + j_2)\ t_{\underline{j}}$*, si* $\underline{j} = (j_1, j_2) \in \mathbf{J}$*.*

L'algèbre de Lie des dérivations extérieures de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ est

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))/\mathrm{Der\ Int}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$$

avec pour crochet de Lie $[\ ,\ ]$ la classe du commutateur $[\ ,\ ]_c$ des dérivations.

Notons ∂_x et ∂_y les dérivations de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ respectivement définies par

$$\partial_x(x) = 1,\ \partial_x(y) = 0,$$

$$\partial_y(x) = 0,\ \partial_y(y) = 1.$$

Pour une dérivation $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$, nous notons $\overline{D}$ sa projection sur $\overline{\mathrm{Der}}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h})) := \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))/\mathrm{Der\ Int}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$.

Lemme 6.2.13. *Pour* $i \geq 0$*, soit* E_i *la dérivation de* $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ *définie par*

$$E_i(x) = \partial_y(\tfrac{1}{2}xyz^i) = \tfrac{1}{2}xz^i, \quad E_i(y) = \partial_x(\tfrac{1}{2}xyz^i) = \tfrac{1}{2}yz^i$$

ce qui entraîne $E_i(z) = z^{i+1}$*.*

Pour $\underline{j} = (j_1, j_2) \in \mathbf{J}$*, soit* $u_{\underline{j}} := x^{j_1+1}y^{j_2+1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$*. La dérivation* $T_{\underline{j}}$ *de* $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ *est définie par les conditions*

$T_{\underline{j}}(x) = \partial_y(u_{\underline{j}}) = (j_2 + 1)x^{j_1+1}y^{j_2}$,

$T_{\underline{j}}(y) = -\partial_x(u_{\underline{j}}) = -(j_1 + 1)x^{j_1}y^{j_2+1}$.

Alors la famille $(\overline{E}_i, \overline{T}_{\underline{j}})_{(i,\underline{j}) \in \mathbb{N} \times \mathbf{J}}$ *est une base du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\overline{\mathrm{Der}}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$*.*

Démonstration. Nous remercions F. Dumas pour son aide concernant cette démonstration. On a

$E_i(x) = \frac{1}{2}xz^i$, $E_i(y) = \frac{1}{2}yz^i$,

$T_{\underline{j}}(x) = (j_2+1)x^{j_1+1}y^{j_2}$ et $T_{\underline{j}}(y) = -(j_1+1)x^{j_1}y^{j_2+1}$.

Rappelons que pour tout $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$, on a les relations

$$\mathrm{ad}_u(x) = [u,x]_c = -\partial_y(u)z,$$

$$\mathrm{ad}_u(y) = [u,y]_c = \partial_x(u)z$$

et que pour toute dérivation D de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$, on a

$$D(z) = [D(x),y]_c + [x,D(y)]_c = \mathrm{ad}_{D(x)}(y) - \mathrm{ad}_{D(y)}(x).$$

Etape 1.

Pour $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ il existe $p \in \mathbb{K}[z]$ tel que $D(z) = pz$.

Une dérivation D respecte le centre $\mathcal{Z} = \mathbb{K}[z]$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. On a donc $D(z) \in \mathbb{K}[z]$. Par ailleurs $\mathrm{ad}_{D(x)}(y)$ et $\mathrm{ad}_{D(y)}(x)$ appartiennent à $\mathcal{U}(\mathfrak{h})z$. Or $D(z) = \mathrm{ad}_{D(x)}(y) - \mathrm{ad}_{D(y)}(x)$ donc $D(z) \in z\mathbb{K}[z]$.

Etape 2.

Soit $\mathrm{Der}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ le module des $\mathbb{K}[z]$-dérivations de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$, c'est-à-dire des dérivations de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ s'annulant sur le centre $\mathcal{Z} = \mathbb{K}[z]$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Pour $D \in \mathrm{Der}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$, il existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ tel que $D(x) = \partial_y(u)$, $D(y) = -\partial_x(u)$.

Puisque D est une $\mathbb{K}[z]$-dérivation, on a $D(z) = 0$, c'est-à-dire

$$\mathrm{ad}_{D(x)}(y) - \mathrm{ad}_{D(y)}(x) = 0,$$

soit encore $\partial_x(D(x))z + \partial_y(D(y))z = 0$, ce qui conduit à $\partial_y(D(y)) = -\partial_x(D(x))$.

Ecrivons $D(x) = \Sigma_{i=0}^n q_i y^i$ avec $q_i \in \mathbb{K}[x,z]$. On en déduit

$$D(y) = f - \Sigma_{i=0}^n \partial_x(q_i)\frac{y^{i+1}}{i+1}$$

avec $f \in \mathbb{K}[x,z]$. Soit $g \in \mathbb{K}[x,z]$ tel que $\partial_x(g) = -f$. Posons

$$u := g + \Sigma_{i=0}^n q_i \frac{y^{i+1}}{i+1},$$

on a $\partial_y(u) = D(x)$ et $\partial_x(u) = -D(y)$.

ETAPE 3.
Une dérivation $D \in \mathcal{U}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{h})$ *est intérieure si et seulement si on a* $D(\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \subset z\mathcal{U}(\mathfrak{h})$.

On a vu que ad_u est toujours d'image dans $z\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Réciproquement, soit D une $\mathbb{K}[z]$-dérivation d'image contenue dans $z\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Ecrivons $D(u) = \Delta(u)z$. Puisque z est central, Δ est une dérivation, et puisque D est une $\mathbb{K}[z]$-dérivation, il en est de même de Δ. D'après l'étape 2, il existe donc $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ tel que $\Delta(x) = \partial_y(u)$ et $\Delta(y) = -\partial_x(u)$. On en déduit $D(x) = \partial_y(u)z = [x,u]_c$ et $D(y) = -\partial_x(u) = [y,u]_c$, ce qui montre $D = \mathrm{ad}_{-u}$.

ETAPE 4.
La famille $(T_{\underline{j}})_{\underline{j}\in\mathbf{J}}$ *est une base d'un* $\mathbb{K}$*-supplémentaire de* $\mathrm{Der\ Int}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ *dans* $\mathrm{Der}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$*, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Der}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h})) = \Big(\oplus_{\underline{j}\in\mathbf{J}}\ \mathbb{K}\,T_{\underline{j}}\Big) \bigoplus \Big(\mathrm{Der\ Int}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))\Big).$$

Soit $D \in \mathrm{Der}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$. D'après l'étape 2, il existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ tel que $D(x) = \partial_y(u)$ et $D(y) = -\partial_x(u)$. Décomposons u dans la base PBW de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ sous la forme $u = \lambda + u' + u''z$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$u' = \Sigma_{\underline{j}=(j_1,j_2)\in\mathbf{J}}\ \lambda_{\underline{j}}\ x^{j_1+1}y^{j_2+1}, \quad u'' = \Sigma_{(i,\underline{j})\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^2}\ \mu_{i,\underline{j}}\ x^{j_1}y^{j_2}z^{i-1},$$

où les familles $(\lambda_{\underline{j}})_{\underline{j}\in\mathbf{J}}$ et $(\mu_{i,\underline{j}})_{(i,\underline{j})\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^2}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ sont presque partout nulles. On a

$$\mathrm{ad}_{u''}(x) = -\partial_y(u''z) \ \text{ et } \ \mathrm{ad}_{u''}(y) = \partial_x(u''z).$$

La dérivation $D' := D + \mathrm{ad}_{u''}$ satisfait

$$\begin{array}{rcl} D'(x) & = & D(x) + \mathrm{ad}_{u''}(x) \\ & = & \partial_y(u) - \partial_y(u''z) \\ & = & \partial_y(u') \\ & = & \Sigma_{\underline{j}\in\mathbf{J}}\ (j_2+1)\lambda_{\underline{j}}x^{j_1+1}y^{j_2} \\ & = & \Sigma_{\underline{j}\in\mathbf{J}}\ \lambda_{\underline{j}}T_{\underline{j}}(x) \end{array}$$

et de même on obtient

$$\begin{array}{rcl} D'(y) & = & \Sigma_{\underline{j}\in\mathbf{J}}\ -(j_1+1)\lambda_{\underline{j}}x^{j_1}y^{j_2+1} \\ & = & \Sigma_{\underline{j}\in\mathbf{J}}\ T_{\underline{j}}(y). \end{array}$$

Ces deux relations montrent $D' = \Sigma_{\underline{j}\in\mathbf{J}}\ \lambda_{\underline{j}}T_{\underline{j}}$, soit encore

$$D = \Sigma_{\underline{j}\in\mathbf{J}}\ \lambda_{\underline{j}}T_{\underline{j}} + \mathrm{ad}_{u''}.$$

On a montré
$$\mathrm{Der}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h})) = \oplus_{\underline{j}\in \mathbf{J}}\, \mathbb{K}\, T_{\underline{j}} \; + \; \mathrm{Der\ Int}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h})).$$
La somme est directe en vertu de l'étape 3.

Etape 5.
on a
$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h})) = \mathbb{K}[z]E \; \oplus \; \mathrm{Der}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h})),$$
c'est-à-dire que pour $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$, il existe un unique couple (p, T) avec $p \in \mathbb{K}[z]$ et $T \in \mathrm{Der}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ tel que $D = pE + T$.

Soit D une $\mathbb{K}$-dérivation de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Soit p l'élément de $\mathbb{K}[z]$ défini par $p := \partial_x(D(x)) + \partial_y(D(y))$. La dérivation $D' = D - pE$ satisfait $D'(z) = 0$, c'est donc une $\mathbb{K}[z]$-dérivation. On a $D = pE + D'$. Cette écriture est unique car si $D = pE + D' = p_1E + D'_1$, on a $(p - p_1)E(z) = (D'_1 - D')(z) = 0$, car $D'_1 - D'$ est une $\mathbb{K}[z]$-dérivation. Or $E(z) = z \neq 0$, donc $p = p_1$, et par suite $D'_1 = D'$. □

Lemme 6.2.14. *Avec les conventions $T_{\underline{i}} = 0$ si $\underline{i} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathbf{J}$, le crochet de Lie [,] sur $\overline{\mathrm{Der}}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ est donné par les relations suivantes :*
(i) $[\overline{E}_i, \overline{E}_j] = (j - i)\overline{E}_{i+j}$ *pour tout i et j dans $\mathbb{N}$.*
(ii) $[\overline{T}_{\underline{i}}, \overline{T}_{\underline{j}}] = \alpha(\underline{i}, \underline{j})\overline{T}_{\underline{i}+\underline{j}}$, *pour tout $\underline{i}$ et $\underline{j}$ dans $\mathbf{J}$,*
(iii) $[\overline{E}_i, \overline{T}_{\underline{j}}] = 0$ *pour tout $i > 0$ et tout $\underline{j} \in \mathbf{J}$,*
(iv) $[\overline{E}_0, \overline{T}_{\underline{i}}] = (j_1 + j_2)\overline{T}_{\underline{i}}$ *pour tout $\underline{j} = (j_1, j_2) \in \mathbf{J}$.*

Démonstration. (i) Un calcul immédiat montre que pour $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, on a la relation $[E_i, E_j]_c = (j - i)E_{i+j},\ i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}$ d'où l'on tire la relation
$$[\overline{E}_i, \overline{E}_j] = (j - i)\overline{E}_{i+j},\ i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}.$$

(ii) Un calcul fastidieux conduit à la relation $[T_{\underline{i}}, T_{\underline{j}}]_c = \alpha(\underline{i}, \underline{j})T_{\underline{i}+\underline{j}}$, pour $\underline{i}$ et $\underline{j}$ dans $\mathbf{J}$, d'où l'on tire la relation $[\overline{T}_{\underline{i}}, \overline{T}_{\underline{j}}] = \alpha(\underline{i}, \underline{j})\overline{T}_{\underline{i}+\underline{j}}$.

(iii) Un calcul facile conduit à la relation $[E_i, T_{\underline{j}}]_c = (j_1 + j_2)z^iT_{\underline{j}}$. Supposons $i > 0$. Dans ce cas, on a $(z^iT_{\underline{j}})(\mathcal{U}(\mathfrak{h})) \subset z\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Par l'argument de l'étape 3 de la démonstration du lemme 6.2.13, on en déduit que la dérivation $z^iT_{\underline{j}}$ est intérieure. On peut même préciser la dérivation intérieure : en posant $u_{i,\underline{j}} = -x^{j_1+1}y^{j_2+1}z^{i-1}$, on vérifie que les dérivations $z^iT_{\underline{j}}$ et $\mathrm{ad}_{u_{i,\underline{j}}}$ coïncident en x et y. On en déduit $z^iT_{\underline{j}} = \mathrm{ad}_{u_{i,\underline{j}}}$. On a en conséquence
$$\overline{[E_i, T_{\underline{j}}]} = [\overline{E}_i, \overline{T}_{\underline{j}}] = \overline{z^iT_{\underline{j}}} = \overline{\mathrm{ad}_{u_{i,\underline{j}}}} = 0.$$

(iv) On a $[E_0, T_{\underline{j}}] = (j_1 + j_2)T_{\underline{j}}$, d'où $[\overline{E}_0, \overline{T}_{\underline{j}}] = (j_1 + j_2)\overline{T}_{\underline{j}}$.

□

Corollaire 6.2.15. *L'application*

$$\varphi : (\mathcal{W}, \ [\ ,\ ]) \longrightarrow (\overline{\mathrm{Der}}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \ [\ ,\ ])$$

définie par $\varphi(e_i) = \overline{E}_i$ *et* $\varphi(t_{\underline{j}}) = \overline{T}_{\underline{j}}$ *est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

Démonstration. Le lemme 6.2.14 montre que φ est un morphisme d'algèbres de Lie ; le lemme 6.2.13 montre que φ est un isomorphisme. □

Théorème 6.2.16. *L'application*

$$\psi : (\mathcal{W}, \ [\ ,\ ]) \longrightarrow (H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h})), \ [\ ,\ ]_G)$$

définie par $\psi(e_i) = \mathrm{e}^1_i$ *et* $\psi(t_{\underline{j}}) = -\mathrm{t}^1_{\underline{j}+\underline{1}}$ *où* $\underline{j}+\underline{1} = (j_1+1, j_2+1)$ *est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

Démonstration. Dans $H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h})) = H^1(\Lambda^*(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{h})^{\mathrm{ad}}, d^*)$, pour $i \in \mathbb{N}$, notons e^1_i la classe de cohomologie du 1-cocycle

$$x^* \otimes xz^i + y^* \otimes yz^i + 2z^* \otimes z^{i+1} \in \Lambda^1(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{\mathrm{ad}}.$$

Pour $\underline{j} + \underline{1} \in \mathbf{J}$, notons $\mathrm{t}^1_{\underline{j}+\underline{1}}$ la classe de cohomologie du 1-cocycle

$$(j_2+1)x^* \otimes x^{j_1+1}y^{j_2} - (j_1+1)y^* \otimes x^{j_1}y^{j_2+1} \in \Lambda^1(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{\mathrm{ad}}.$$

D'après le théorème 6.2.1, les éléments $(\mathrm{e}^1_i, \mathrm{t}^1_{\underline{j}+\underline{1}})_{(i,\underline{j}+\underline{1}) \in \mathbb{N} \times \mathbf{J}}$ constituent une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h}))$. L'application $\psi : \mathcal{W} \longrightarrow H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ définie par $\psi(e_i) = \mathrm{e}^1_i$ et $\psi(t_{\underline{j}}) = -\mathrm{t}^1_{\underline{j}+\underline{1}}$ est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. D'après le théorème 6.2.2, dans $(H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{h})), \ [\ ,\ ]_G)$, on a les égalités

$[\mathrm{t}^1_{\underline{i}+\underline{1}}\,,\ \mathrm{t}^1_{\underline{j}+\underline{1}}]_G = -\alpha(\underline{i}, \underline{j})\, \mathrm{t}^1_{\underline{i}+\underline{j}+\underline{1}}$ pour $\underline{i}+\underline{1}$ et $\underline{j}+\underline{1}$ dans $\mathbf{J}$,

$[\mathrm{e}^1_i\,,\ \mathrm{e}^1_j]_G = (j-i)\, \mathrm{e}^1_{i+j}$ pour i et j dans $\mathbb{N}$,

$[\mathrm{e}^1_{i\neq 0}\,,\ \mathrm{t}^1_{\underline{j}+\underline{1}}]_G = 0$ pour $i > 0$ et $\underline{j}+\underline{1} \in \mathbf{J}$,

$[\mathrm{e}^1_0\,,\ \mathrm{t}^1_{\underline{j}+\underline{1}}]_G = (j_1+j_2)\, \mathrm{t}^1_{\underline{j}+\underline{1}}$ pour $\underline{j}+\underline{1} \in \mathbf{J}$.

On déduit que l'isomorphisme d'espaces vectoriels ψ est un morphisme d'algèbres de Lie.

□

Corollaire 6.2.17. *Il existe des isomorphismes d'algèbres de Lie*

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{W},\ [\ ,\ ]) \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
(H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{h}),\mathcal{U}(\mathfrak{h})),\ [\ ,\ ]_G) & & (\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))/\mathrm{Der\ Int}_{\mathbb{K}}(\mathcal{U}(\mathfrak{h})),\ [\ ,\ ])
\end{tikzcd}$$

6.3 Algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de type $\mathfrak{r}_\alpha$

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$. L'algèbre de type α, notée $\mathfrak{r}_\alpha$, est l'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_\alpha = \mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y \oplus \mathbb{Q}z$ de dimension 3, de base (x, y, z) avec pour crochets

$$[x, y] = y, \qquad [x, z] = \alpha z \quad \text{et} \quad [y, z] = 0.$$

Dans cette section, on munit $\Lambda^2(\mathfrak{r}_\alpha)$ et $\Lambda^3(\mathfrak{r}_\alpha)$ des bases $(z\wedge y, z\wedge x, y\wedge x)$ et $(z\wedge y\wedge x)$ respectivement. De même, on munit $\Lambda^2({\mathfrak{r}_\alpha}^*)$ et $\Lambda^3({\mathfrak{r}_\alpha}^*)$ des bases $(z^*\wedge y^*, z^*\wedge x^*, y^*\wedge x^*)$ et $(z^* \wedge y^* \wedge x^*)$ respectivement.

Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre $\mathfrak{r}_\alpha$. Dans [4], Solotar et Chouhy ont calculé la cohomologie de Hochschild à partir du complexe $\Big(L^*\big(\mathbb{K}, \mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)^{\mathrm{ad}}\big), d^*\Big) = \Big(\Lambda^*(\mathfrak{r}_\alpha^*) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)^{\mathrm{ad}}, d^*\Big)$ défini en 3.2.4. Pour le calcul du crochet de Gerstenhaber, on distingue plusieurs cas :

1. $\alpha > 0$ avec $\alpha \neq 1$.
2. $\alpha = 1$.
3. $\alpha = -\frac{a}{b}$ où a et b deux entiers positifs tels que $a \neq b$ et $(a, b) = 1$.
4. Le cas $\alpha = -1$ n'est pas traité ici en raison de la lourdeur des calculs.

Des techniques analogues à celles développées pour l'algèbre de Heisenberg permettent de calculer le crochet de Gerstenhaber

$$[\ ,\ ]_G : H^p(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) \otimes H^q(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) \to H^{p+q-1}(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}_\alpha}),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))$$

de la cohomologie des algèbres $\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)$. Les calculs restent pénibles et assez longs. La clef qui permet de mener à terme ces calculs est l'expression de l'homotopie G_K en fonction de l'homotopie t_* définie en 4.2.8.

6.3.1 $\alpha > 0$ avec $\alpha \neq 1$.

Rappelons([4], p. 12) que les espaces vectoriels $H^*(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))$ ont respectivement les bases suivantes :

1. $H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))) = \mathbb{K}\,\mathrm{t}_0^0$.
2. $H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) = \mathbb{K}\,\mathrm{t}_0^1 \oplus \mathbb{K}\,\mathrm{e}_1^1$.
3. $H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) = \mathbb{K}\,\mathrm{t}_1^2$.
4. $\mathrm{HH}^i(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) = 0$ pour $i \geq 3$.

Nous allons montrer

Théorème 6.3.1. *Le crochet de Gerstenhaber sur $H^*(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))$ est nul.*

Démonstration du théorème 6.3.1 :

D'après Chouhy et Solotar, les éléments suivants sont des cocycles ([4], p.12) :

En dimension 0 : $\tau_0^0 := 1$

En dimension 1 : $\tau_0^1 := x^* \otimes 1,\ \ \varepsilon_1^1 := z^* \otimes z,$

En dimension 2 : $\tau_1^2 := z^* \wedge x^* \otimes z.$

On désigne par $\mathrm{t}_\bullet^i$ la classe de cohomologie du cocycle $\tau_\bullet^i$. De même, on désigne par e_1^1 la classe de cohomologie d'un cocycle ε_1^1. D'après Chouhy et Solotar, les éléments $(\mathrm{t}_\bullet^*, \mathrm{e}_\bullet^*)$ forment une base de $H^*\big(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)\big)$.

Rappelons que le symbole de Kronecker s'écrit de la forme suivante :
Soit $a \in \mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)$ et $x_{\underline{i}} \in \Lambda^*(\mathfrak{r}_\alpha)$. On pose $K_* = \mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha) \otimes \Lambda^*(\mathfrak{r}_\alpha) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)$ et dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^e}(K_*,\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))$, le symbole de Kronecker $\delta^a_{x_{\underline{i}}}$ est défini par $\delta^a_{x_{\underline{i}}}(1 \otimes x_{\underline{i}} \otimes 1) = a$ et $\delta^a_{x_{\underline{i}}}(1 \otimes x_{\underline{j}} \otimes 1) = 0$ pour $\underline{j} \neq \underline{i}$.

Calculons à présent le crochet de Gerstenhaber sur $H^*(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))$ à l'aide du théorème 4.2.7.

Le cas p quelconque et $q = 0$

Calculons à présent $[\mathrm{t}_0^1, \mathrm{t}_0^0]_G$. Le théorème 4.2.7 donne l'expression du crochet

$$\begin{aligned}
[\tau_0^1, \tau_0^0]_G &= \delta_x^1 G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_1^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes 1)\\
&= \delta_x^1 G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_1^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\big((1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1)\big)\\
&= \delta_x^1 G_K\big((1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1)\big)
\end{aligned}$$

$$= -\delta_x^1 t_0(1 \otimes 1)$$
$$= 0,$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}_0^1, \mathrm{t}_0^0]_G = 0.$$

D'une manière analogue, on trouve

$$[\mathrm{e}_1^1, \mathrm{t}_0^0]_G = [\mathrm{t}_1^2, \mathrm{t}_0^0]_G = 0.$$

Le cas $p = q = 1$

Rappelons que l'algèbre $\Big(H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha), \mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)), [\ ,\ ]_G\Big)$ est une algèbre de Lie. On a donc

$$[\mathrm{t}_0^1, \mathrm{t}_0^1]_G = [\mathrm{e}_1^1, \mathrm{e}_1^1]_G = 0.$$

Calulons à présent $[\mathrm{t}_0^1, \mathrm{e}_1^1]_G$. Le théorème 4.2.7 donne l'expression du crochet

$$\begin{aligned}
[\tau_0^1, \varepsilon_1^1]_G = &\sum_{\underline{k} \in I_1} x_{\underline{k}}^* \otimes [\delta_x^1, \delta_z^z]_K(1 \otimes x_{\underline{k}} \otimes 1) \\
&= x^* \otimes \delta_x^1 G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad -x^* \otimes \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad +y^* \otimes \delta_x^1 G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) \\
&\quad -y^* \otimes \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) \\
&\quad +z^* \otimes \delta_x^1 G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1) \\
&\quad -z^* \otimes \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1).
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
&G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) \\
&= G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big((1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes x \otimes 1)\Big) \\
&\quad +G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big((1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes x \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1)\Big) \\
&\quad +G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big((1 \otimes x \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1)\Big) \\
&= G_K\Big((1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1)\Big) \\
&= -t_0(1 \otimes 1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, on vérifie facilement que

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) = 0,$$

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) = (1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) = 0$$

et

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1) = 0.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
[\tau_0^1, \varepsilon_1^1]_G &= z^* \otimes \delta_x^1 G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1)\\
&= z^* \otimes \delta_x^1 G_K\big((1 \otimes z) \otimes (1 \otimes 1)\big)\\
&= z^* \otimes \delta_x^1\big(- t_0(1 \otimes z)\big)\\
&= z^* \otimes \delta_x^1(1 \otimes z \otimes 1)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}_0^1, \mathrm{e}_1^1]_G = 0.$$

Le cas $p = 2$ et $q = 1$

Calculons $[\mathrm{t}_1^2, \mathrm{t}_0^1]_G$. Le théorème 4.2.7 donne l'expression du crochet

$$\begin{aligned}
&[\tau_1^2, \tau_0^1]_G\\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_x^1 G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1)\\
&\quad + z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_x^1 G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1)\\
&\quad + y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_x^1 G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \wedge x \otimes 1)
\end{aligned}$$

D'après la remarque 4.2.9, on a

$$G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) = G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) = 0.$$

D'autre part, on montre facilement que

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) = (1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) = 0$$

et

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \wedge x \otimes 1).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&[\tau_1^2, \tau_0^1]_G\\
&= -z^* \wedge x^* \otimes \delta_x^1 G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1)\\
&= -z^* \wedge x^* \otimes \delta_x^1 G_K\Big((1 \otimes z) \otimes (1 \otimes 1)\Big)\\
&= -z^* \wedge x^* \otimes \delta_x^1\Big(- t_0(1 \otimes z)\Big)\\
&= -z^* \wedge x^* \otimes \delta_x^1(1 \otimes z \otimes 1)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$[\mathrm{t}_1^2, \mathrm{t}_0^1]_G = 0.$$

Calculons à présent $[\mathrm{t}_1^2, \mathrm{e}_1^1]_G$. On a

$$\begin{aligned}
&[\tau_1^2, \varepsilon_1^1]_G\\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1)\\
&\quad +z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1)\\
&\quad +y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \wedge x \otimes 1)\\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) - z^* \wedge y^* \otimes 0\\
&\quad +z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1)\\
&\quad +y^* \wedge x^* \otimes 0\\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K\Big((1 \otimes z) \otimes (1 \otimes y \otimes 1) + (1 \otimes y \otimes 1) \otimes (z \otimes 1)\Big)\Big)\\
&\quad +z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K\Big((1\otimes z)\otimes(1\otimes x\otimes 1)+(1\otimes x\otimes 1)\otimes(z\otimes 1)\Big) - \delta_z^z G_K\Big((1\otimes z)\otimes(1\otimes 1)\Big)\Big)\\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z(-t_1(t_0(1 \otimes z)y) - t_1(1 \otimes y \otimes z)\Big)\\
&\quad +z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z(-t_1(t_0(1 \otimes z)x) - t_1(1 \otimes x \otimes z) - \delta_z^z(-t_0(1 \otimes z))\Big)\\
&= z^* \wedge x^* \otimes (z - z)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}_1^2, \mathrm{e}_1^1]_G = 0.$$

6.3.2 $\alpha = 1$

Rappelons([4], p. 12) que les espaces vectoriels $H^*(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1))$ ont respectivement les bases suivantes :

1. $H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)) = \mathbb{K}\,\mathrm{t}_0^0$.
2. $H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)) = \mathbb{K}\,\mathrm{t}_0^1 \oplus \mathbb{K}\,\mathrm{e}_1^1 \oplus \mathbb{K}\,\mathrm{a}_1^1 \oplus \mathbb{K}\,\mathrm{b}_1^1$.
3. $H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)) = \mathbb{K}\,\mathrm{t}_1^2 \oplus \mathbb{K}\,\mathrm{e}_1^2 \oplus \mathbb{K}\,\mathrm{a}_1^2$.
4. $H^i(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)) = 0$ pour $i \geq 3$.

Théorème 6.3.2. *Le crochet de Gestenhaber est donné par les conditions suivantes :*

1. $[\ ,\ ]_G : H^*(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)) \otimes H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)) \to H^{*-1}(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1))$

   ce crochet de Gerstenhaber est nul.

2. $[\ ,\ ]_G : H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)) \otimes H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)) \to H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1))$

   $[\mathrm{t}_0^1\,,\,\mathrm{e}_1^1\,]_G = [\mathrm{t}_0^1\,,\,\mathrm{a}_1^1\,]_G = [\mathrm{t}_0^1\,,\,\mathrm{b}_1^1\,]_G = 0,$

   $[\mathrm{e}_1^1\,,\,\mathrm{e}_1^1\,]_G = [\mathrm{a}_1^1\,,\,\mathrm{a}_1^1\,]_G = [\mathrm{b}_1^1\,,\,\mathrm{b}_1^1\,]_G = 0,$

   $[\mathrm{e}_1^1\,,\,\mathrm{a}_1^1\,]_G = 2\mathrm{b}_1^1 \quad , \quad [\mathrm{e}_1^1\,,\,\mathrm{b}_1^1\,]_G = -\mathrm{e}_1^1 \quad \text{et} \quad [\mathrm{a}_1^1\,,\,\mathrm{b}_1^1\,]_G = \mathrm{a}_1^1$

3. $[\ ,\ ]_G : H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)) \otimes H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)) \to H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1))$

   $[\mathrm{t}_1^2\,,\,\mathrm{t}_0^1\,]_G = [\mathrm{e}_1^2\,,\,\mathrm{t}_0^1\,]_G = [\mathrm{a}_1^2\,,\,\mathrm{t}_0^1\,]_G = 0$

   $[\mathrm{t}_1^2\,,\,\mathrm{e}_1^1\,]_G = 0 \quad , \quad [\mathrm{t}_1^2\,,\,\mathrm{a}_1^1\,]_G = 2\mathrm{a}_1^2 \quad , \quad [\mathrm{t}_1^2\,,\,\mathrm{b}_1^1\,]_G = -\mathrm{t}_1^2,$

   $[\mathrm{e}_1^2\,,\,\mathrm{e}_1^1\,]_G = -2\mathrm{a}_1^2 \quad , \quad [\mathrm{e}_1^2\,,\,\mathrm{a}_1^1\,]_G = 0 \quad \text{et} \quad [\mathrm{e}_1^2\,,\,\mathrm{b}_1^1\,]_G = \mathrm{e}_1^2,$

   $[\mathrm{a}_1^2\,,\,\mathrm{e}_1^1\,]_G = \mathrm{t}_1^2 \quad , \quad [\mathrm{a}_1^2\,,\,\mathrm{a}_1^1\,]_G = -\mathrm{e}_1^2 \quad \text{et} \quad [\mathrm{a}_1^2\,,\,\mathrm{b}_1^1\,]_G = 0.$

Démonstration du théorème 6.3.2 :

D'après Chouhy et Solotar, les éléments suivants sont des cocycles ([4], p.12) :

En dimension 0 : $\tau_0^0 := 1$

En dimension 1 : $\tau_0^1 := x^* \otimes 1,\ \ \varepsilon_1^1 := y^* \otimes z,\ \ \alpha_1^1 := z^* \otimes y,\ \ \beta_1^1 := z^* \otimes z,$

En dimension 2 : $\tau_1^2 := y^* \wedge x^* \otimes z,\ \ \varepsilon_1^2 := z^* \wedge x^* \otimes y,\ \ z^* \wedge x^* \otimes z.$

On désigne par $\mathrm{t}^i_\bullet$ la classe de cohomologie du cocycle $\tau^i_\bullet$, $\mathrm{e}^i_\bullet$ la classe de cohomologie du cocycle $\varepsilon^i_\bullet$, $\mathrm{a}^i_\bullet$ la classe de cohomologie du cocycle $\alpha^i_\bullet$ et $\mathrm{b}^i_\bullet$ la classe de cohomologie du cocycle $\beta^i_\bullet$. D'après Chouhy et Solotar, les éléments $(\mathrm{t}^*_\bullet, \mathrm{e}^*_\bullet, \mathrm{a}^*_\bullet, \mathrm{b}^*_\bullet)$ forment une base de $H^*\big(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1), \mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)\big)$.

Calculons à présent le crochet de Gerstenhaber sur $H^*(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1), \mathcal{U}(\mathfrak{r}_1))$ à l'aide du théorème 4.2.7.

Le cas p quelconque et $q = 0$

Calculons à présent $[\mathrm{t}^1_0, \mathrm{t}^0_0]_G$. Le théorème 4.2.7 donne l'expression du crochet

$$\begin{aligned}
[\tau^1_0, \tau^0_0]_G &= \delta^1_x G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^1_1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes 1) \\
&= \delta^1_x G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^1_1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\big((1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1)\big) \\
&= \delta^1_x G_K\big((1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1)\big). \\
&= -\delta^1_x t_0(1 \otimes 1). \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}^1_0, \mathrm{t}^0_0]_G = 0.$$

D'une manière analogue, on trouve

$$[\mathrm{e}^1_1, \mathrm{t}^0_0]_G = [\mathrm{a}^1_1, \mathrm{t}^0_0]_G = [\mathrm{b}^1_1, \mathrm{t}^0_0]_G = [\mathrm{t}^2_1, \mathrm{t}^0_0]_G = [\mathrm{e}^2_1, \mathrm{t}^0_0]_G = [\mathrm{a}^2_1, \mathrm{t}^0_0]_G = 0.$$

Le cas $p = q = 1$

Rappelons que l'algèbre $\Big(H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1), \mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)), [\ ,\ ]_G\Big)$ est une algèbre de Lie. On a donc

$$[\mathrm{t}^1_0, \mathrm{t}^1_0]_G = [\mathrm{e}^1_1, \mathrm{e}^1_1]_G = [\mathrm{a}^1_1, \mathrm{a}^1_1]_G = [\mathrm{b}^1_1, \mathrm{b}^1_1]_G = 0.$$

Calulons à présent $[\mathrm{t}^1_0, \mathrm{e}^1_1]_G$. Le théorème 4.2.7 donne l'expression du crochet

$$\begin{aligned}
[\tau^1_0, \varepsilon^1_1]_G = x^* &\otimes \delta^1_x G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes x \otimes 1) \\
-x^* &\otimes \delta^z_y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^1_x \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes x \otimes 1) \\
+y^* &\otimes \delta^1_x G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \otimes 1) \\
-y^* &\otimes \delta^z_y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^1_x \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \otimes 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+z^* \otimes \delta_x^1 G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1)\\
&-z^* \otimes \delta_y^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1)
\end{aligned}$$

D'après la remarque 4.2.9, on a

$$G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) = 0.$$

D'autre part, on montre facilement que

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) = 0,$$

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) = 0$$

et

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1) = (1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^1 \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1) = 0.$$

D'où, on a

$$\begin{aligned}
[\tau_0^1, \varepsilon_1^1]_G &= y^* \otimes \delta_x^1 G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1)\\
&= y^* \otimes \delta_x^1 G_K\big((1 \otimes z) \otimes (1 \otimes 1)\big)\\
&= y^* \otimes \delta_x^1\big(-t_0(1 \otimes z)\big)\\
&= y^* \otimes \delta_x^1(1 \otimes z \otimes 1)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}_0^1, \mathrm{e}_1^1]_G = 0.$$

D'une manière analogue, on trouve

$$[\mathrm{t}_0^1, \mathrm{a}_1^1]_G = [\mathrm{t}_0^1, \mathrm{b}_1^1]_G = 0.$$

Calculons à présent $[\mathrm{e}_1^1, \mathrm{a}_1^1]_G$. On a

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_1^1, \alpha_1^1]_G = x^* &\otimes \delta_y^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1)\\
&-x^* \otimes \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1)\\
&+y^* \otimes \delta_y^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1)\\
&-y^* \otimes \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1)\\
&+z^* \otimes \delta_y^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1)
\end{aligned}$$

$$-z^* \otimes \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1).$$

On montre facilement que

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) = (1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) = 0,$$
$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) = 0$$

et

$$G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1) = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_1^1, \alpha_1^1]_G &= -y^* \otimes \delta_z^y G_K\Big((1 \otimes z) \otimes (1 \otimes 1)\Big) \\
&\quad + z^* \otimes \delta_y^z G_K\Big((1 \otimes y) \otimes (1 \otimes 1)\Big) \\
&= -y^* \otimes \delta_z^y\Big(-t_0(1 \otimes z)\Big) + z^* \otimes \delta_y^z\Big(-t_0(1 \otimes y)\Big) \\
&= -y^* \otimes \delta_z^y(1 \otimes z \otimes 1) + z^* \otimes \delta_y^z(1 \otimes y \otimes 1) \\
&= -y^* \otimes y + z^* \otimes z.
\end{aligned}$$

Dans le complexe $\Big(L^*\Big(\mathbb{K}, \mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)^{\mathrm{ad}}\Big), d^*\Big) = \Big(\Lambda^*(\mathfrak{r}_1^*) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)^{\mathrm{ad}}, d^*\Big)$ défini en 3.2.4, on a

$$d^1(x) = -y^* \otimes y - z^* \otimes z$$

c-à-d. que $y^* \otimes y$ est cohomologue à $z^* \otimes z$. On a donc

$$[\varepsilon_1^1, \alpha_1^1]_G = 2z^* \otimes z + d^1(x) = 2\beta_1^1 + d^1(x),$$

ce qui montre

$$[\mathrm{e}_1^1, \mathrm{a}_1^1]_G = 2\mathrm{b}_1^1.$$

Calculons à présent $[\mathrm{e}_1^1, \mathrm{b}_1^1]_G$. On a

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_1^1, \beta_1^1]_G &= x^* \otimes \delta_y^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad - x^* \otimes \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad + y^* \otimes \delta_y^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) \\
&\quad - y^* \otimes \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) \\
&\quad + z^* \otimes \delta_y^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1) \\
&\quad - z^* \otimes \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1).
\end{aligned}$$

On montre facilement que

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) = (1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) = 0,$$
$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) = 0$$

et

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1) = 0.$$

D'où, on a

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_1^1, \beta_1^1]_G &= -y^* \otimes \delta_z^z G_K\Big((1 \otimes z) \otimes (1 \otimes 1)\Big) \\
&\quad + z^* \otimes \delta_y^z G_K\Big((1 \otimes z) \otimes (1 \otimes 1)\Big) \\
&= -y^* \otimes \delta_z^z\Big(- t_0(1 \otimes z)\Big) + z^* \otimes \delta_y^z\Big(- t_0(1 \otimes z)\Big) \\
&= -y^* \otimes \delta_z^z(1 \otimes z \otimes 1) + z^* \otimes \delta_y^z(1 \otimes z \otimes 1) \\
&= -y^* \otimes z \\
&= -\varepsilon_1^1,
\end{aligned}$$

ce qui montre

$$[\mathrm{e}_0^1, \mathrm{b}_1^1]_G = -\mathrm{e}_1^1.$$

Calculons à présent $[\mathrm{a}_1^1, \mathrm{b}_1^1]_G$. On a

$$\begin{aligned}
[\alpha_1^1, \beta_1^1]_G &= x^* \otimes \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad - x^* \otimes \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad + y^* \otimes \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) \\
&\quad - y^* \otimes \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) \\
&\quad + z^* \otimes \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1) \\
&\quad - z^* \otimes \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1).
\end{aligned}$$

On montre facilement que

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) = (1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) = 0$$

et

$$(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) = (1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) = 0.$$

D'où, on a

$$\begin{aligned}[\alpha_1^1,\beta_1^1]_G &= z^*\otimes\delta_z^y G_K\Big((1\otimes z)\otimes(1\otimes 1)\Big)\\ &\quad -z^*\otimes\delta_z^z G_K\Big((1\otimes y)\otimes(1\otimes 1)\Big)\\ &= z^*\otimes\delta_z^y(1\otimes z\otimes 1)-z^*\otimes\delta_z^z(1\otimes y\otimes 1)\\ &= z^*\otimes y\\ &= \alpha_1^1,\end{aligned}$$

ce qui montre

$$[\alpha_1^1,\beta_1^1]_G=\alpha_1^1.$$

Le cas $p=2$ **et** $q=1$

Calculons $[\mathrm{t}_1^2,\mathrm{t}_0^1]_G$. On a

$$\begin{aligned}&[\tau_1^2,\tau_0^1]_G\\ &= z^*\wedge y^*\otimes\Big(\delta^z_{y\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_x^1\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta_x^1G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_{y\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1\otimes z\wedge y\otimes 1)\\ &\quad +z^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta^z_{y\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_x^1\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta_x^1G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_{y\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1\otimes z\wedge x\otimes 1)\\ &\quad +y^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta^z_{y\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_x^1\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta_x^1G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_{y\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1\otimes y\wedge x\otimes 1)\end{aligned}$$

Le seul terme non nul de cette somme est

$$-y^*\wedge x^*\otimes\delta_x^1G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_{y\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Delta_K^{(2)}(1\otimes y\wedge x\otimes 1).$$

On a donc

$$\begin{aligned}[\tau_1^2,\tau_0^1]_G &= -y^*\wedge x^*\otimes\delta_x^1G_K\Big((1\otimes z)\otimes(1\otimes 1)\Big)\\ &= -y^*\wedge x^*\otimes\delta_x^1\Big(-t_0(1\otimes z)\Big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

D'une manière analogue, on trouve

$$[\varepsilon_1^2,\tau_0^1]_G=[\alpha_1^2,\tau_0^1]_G=0,$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}_1^2,\mathrm{t}_0^1]_G=[\mathrm{e}_1^2,\mathrm{t}_0^1]_G=[\mathrm{a}_1^2,\mathrm{t}_0^1]_G=0.$$

Calculons à présent $[\mathrm{t}_1^2,\mathrm{e}_1^1]_G$. On a

$$
\begin{aligned}
&[\tau_1^2, \varepsilon_1^1]_G = \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta^z_y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_{y\wedge x} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) \\
&\quad + z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta^z_y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_{y\wedge x} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) \\
&\quad + y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta^z_y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_{y\wedge x} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) - z^* \wedge y^* \otimes 0 \\
&\quad + z^* \wedge x^* \otimes 0 \\
&\quad + y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta^z_y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_{y\wedge x} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K\Big(-(1 \otimes z \otimes 1) \otimes (z \otimes 1) - (1 \otimes z) \otimes (1 \otimes z \otimes 1)\Big)\Big) \\
&\quad + y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K\Big((1 \otimes z) \otimes (1 \otimes x \otimes 1) + (1 \otimes x \otimes 1) \otimes (z \otimes 1)\Big) - \delta^z_y G_K\Big((1 \otimes z) \otimes (1 \otimes 1)\Big)\Big) \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x}(t_1(t_0(1 \otimes z)z) + t_1(1 \otimes z \otimes z)\Big) \\
&\quad + y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x}(-t_1(t_0(1 \otimes z)x) - t_1(1 \otimes x \otimes z) - \delta^z_y(-t_0(1 \otimes z))\Big) \\
&= y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) - \delta^z_y(1 \otimes z \otimes 1)\Big) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}_1^2, \mathrm{e}_1^1]_G = 0.$$

Calculons à présent $[\mathrm{t}_1^2, \mathrm{a}_1^1]_G$. On a

$$
\begin{aligned}
&[\tau_1^2, \alpha_1^1]_G \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^y_z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta^y_z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_{y\wedge x} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) \\
&\quad + z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^y_z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta^y_z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_{y\wedge x} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) \\
&\quad + y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^y_z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta^y_z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_{y\wedge x} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^y_z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) - z^* \wedge y^* \otimes 0 \\
&\quad + z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^y_z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) - z^* \wedge x^* \otimes 0 \\
&\quad + y^* \wedge x^* \otimes 0 - y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^y_z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_{y\wedge x} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K\Big((1 \otimes y) \otimes (1 \otimes y \otimes 1) + (1 \otimes y \otimes 1) \otimes (y \otimes 1)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$+z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K\big((1\otimes y)\otimes(1\otimes x\otimes 1)+(1\otimes x\otimes 1)\otimes(y\otimes 1)\big)\Big)$$
$$+y^* \wedge x^* \otimes \Big(-\delta^y_z G_K(1\otimes z\otimes 1)\Big)$$
$$= z^*\wedge y^* \otimes \delta^z_{y\wedge x}\Big(-t_1(t_0(1\otimes y)y)-t_1(1\otimes y\otimes y)\Big)$$
$$+z^*\wedge x^*\otimes \delta^z_{y\wedge x}\Big(-t_1(t_0(1\otimes y)x)-t_1(1\otimes x\otimes y)\Big)$$
$$-y^*\wedge x^*\otimes\delta^y_z\Big(-t_0(1\otimes z)\Big)$$
$$=0$$
$$+z^*\wedge x^*\otimes\delta^z_{y\wedge x}(1\otimes y\wedge x\otimes 1)$$
$$-y^*\wedge x^*\otimes\delta^y_z(1\otimes z\otimes 1)$$
$$=z^*\wedge x^*\otimes z-y^*\wedge x^*\otimes y.$$

Dans le complexe $\Big(L^*\big(\mathbb{K},\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)^{\mathrm{ad}}\big),d^*\Big)=\Big(\Lambda^*(\mathfrak{r}_1^*)\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)^{\mathrm{ad}},d^*\Big)$ défini en 3.2.4, on a

$$d^1(x^*\otimes x)=-y^*\wedge x^*\otimes y-z^*\wedge x^*\otimes z$$

donc les cocyles $y^*\wedge x^*\otimes y$ et $z^*\wedge x^*\otimes z$ sont cohomologues. On a donc
$[\tau_1^2,\alpha_1^1]_G=2\,z^*\wedge x^*\otimes z+d^1(x^*\otimes x)=2\alpha_1^2+d^1(x^*\otimes x)$,
ce qui montre

$$[\mathrm{t}_1^2,\mathrm{a}_1^1]_G=2\mathrm{a}_1^2.$$

Calculons à présent $[\mathrm{t}_1^2,\mathrm{b}_1^1]_G$. On a

$$[\tau_1^2,\beta_1^1]_G$$
$$=z^*\wedge y^*\otimes\Big(\delta^z_{y\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_z\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta^z_zG_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_{y\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1\otimes z\wedge y\otimes 1)$$
$$+z^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta^z_{y\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_z\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta^z_zG_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_{y\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1\otimes z\wedge x\otimes 1)$$
$$+y^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta^z_{y\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_z\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta^z_zG_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_{y\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1\otimes y\wedge x\otimes 1)$$
$$=z^*\wedge y^*\otimes\Big(\delta^z_{y\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_z\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1\otimes z\wedge y\otimes 1)-z^*\wedge y^*\otimes 0$$
$$+z^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta^z_{y\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_z\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1\otimes z\wedge x\otimes 1)-z^*\wedge x^*\otimes 0$$
$$+y^*\wedge x^*\otimes 0-y^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta^z_zG_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_{y\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1\otimes y\wedge x\otimes 1)$$
$$=z^*\wedge y^*\otimes\Big(\delta^z_{y\wedge x}G_K\big((1\otimes z)\otimes(1\otimes y\otimes 1)+(1\otimes y\otimes 1)\otimes(z\otimes 1)\big)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&+z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^z_{y\wedge x} G_K\big((1\otimes z)\otimes(1\otimes x\otimes 1)+(1\otimes x\otimes 1)\otimes(z\otimes 1)\big)\Big)\\
&+y^* \wedge x^* \otimes \Big(-\delta^z_z G_K(1\otimes z\otimes 1)\Big)\\
&= z^* \wedge y^* \otimes \delta^z_{y\wedge x}\Big(-t_1(t_0(1\otimes z)y)-t_1(1\otimes y\otimes z)\Big)\\
&+z^* \wedge x^* \otimes \delta^z_{y\wedge x}\Big(-t_1(t_0(1\otimes z)x)-t_1(1\otimes x\otimes z)\Big)\\
&-y^* \wedge x^* \otimes \delta^z_z\Big(-t_0(1\otimes z)\Big)\\
&= z^* \wedge y^* \otimes \delta^z_{y\wedge x}(1\otimes z\otimes y)\\
&+z^* \wedge x^* \otimes \delta^z_{y\wedge x}(1\otimes z\otimes x)\\
&-y^* \wedge x^* \otimes \delta^z_z(1\otimes z\otimes 1)\Big)\\
&= -y^* \wedge x^* \otimes z\\
&= -\tau^2_1,
\end{aligned}
$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}^2_1, \mathrm{b}^1_1]_G = -\mathrm{t}^2_1.$$

Calculons à présent $[\mathrm{e}^2_1, \mathrm{e}^1_1]_G$. On a

$$
\begin{aligned}
&[\varepsilon^2_1, \varepsilon^1_1]_G\\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta^y_{z\wedge x} G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta^z_y G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} \delta^y_{z\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes z\wedge y\otimes 1)\\
&+z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^y_{z\wedge x} G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta^z_y G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} \delta^y_{z\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes z\wedge x\otimes 1)\\
&+y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^y_{z\wedge x} G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta^z_y G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} \delta^y_{z\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\wedge x\otimes 1)\\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta^y_{z\wedge x} G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes z\wedge y\otimes 1) - z^*\wedge y^*\otimes 0\\
&+z^* \wedge x^* \otimes 0 - z^*\wedge x^* \otimes \Big(\delta^z_y G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} \delta^y_{z\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes z\wedge x\otimes 1)\\
&+y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^y_{z\wedge x} G_K(1\otimes_{\mathcal{A}} \delta^z_y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\wedge x\otimes 1) - y^*\wedge x^*\otimes 0\\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta^y_{z\wedge x} G_K\big(-(1\otimes z\otimes 1)\otimes(z\otimes 1)-(1\otimes z)\otimes(1\otimes z\otimes 1)\big)\Big)\\
&+z^* \wedge x^* \otimes \Big(-\delta^z_y G_K(1\otimes y\otimes 1)\Big)\\
&+y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta^y_{z\wedge x} G_K\big((1\otimes z)\otimes(1\otimes x\otimes 1)+(1\otimes x\otimes 1)\otimes(z\otimes 1)\big)\Big)\\
&= z^* \wedge y^* \otimes \delta^y_{z\wedge x}\Big(t_1(1\otimes z\otimes z)+t_1(t_0(1\otimes z)z)-\Big)
\end{aligned}
$$

$$-z^* \wedge x^* \otimes \delta_y^z\Big(- t_0(1 \otimes y)\Big)$$
$$+y^* \wedge x^* \otimes \delta_{z\wedge x}^y\Big(- t_1(t_0(1 \otimes z)x) - t_1(1 \otimes x \otimes z)\Big)$$
$$= -z^* \wedge x^* \otimes \delta_y^z(1 \otimes y \otimes 1)$$
$$+y^* \wedge x^* \otimes \delta_y^{z\wedge x}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1)$$
$$= -z^* \wedge x^* \otimes z + y^* \wedge x^* \otimes y$$
$$= -2\, z^* \wedge x^* \otimes z + d^1(x^* \otimes x)$$
$$= -2\alpha_1^2 + d^1(x^* \otimes x),$$

ce qui montre
$$[\mathrm{e}_1^2, \mathrm{e}_1^1]_G = -2\mathrm{a}_1^2.$$

Calculons à présent $[\mathrm{e}_1^2, \mathrm{a}_1^1]_G$. On a

$$[\varepsilon_1^2, \alpha_1^1]_G$$
$$= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1)$$
$$+z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1)$$
$$+y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \wedge x \otimes 1)$$
$$= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1)$$
$$+z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1)$$
$$= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K\Big((1 \otimes y) \otimes (1 \otimes z \otimes 1) + (1 \otimes z \otimes 1) \otimes (y \otimes 1)\Big)\Big)$$
$$+z^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K\Big((1\otimes y)\otimes(1\otimes x\otimes 1)+(1\otimes x\otimes 1)\otimes(y\otimes 1)\Big)-\delta_y^z G_K\Big((1\otimes y)\otimes(1\otimes 1)\Big)\Big)$$
$$= z^* \wedge y^* \otimes \delta_{z\wedge x}^y\Big(- t_1(t_0(1 \otimes y)z) - t_1(1 \otimes z \otimes y)\Big)$$
$$+z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y\Big(- t_1(t_0(1 \otimes y)x) - t_1(1 \otimes x \otimes y)\Big) - \delta_z^y(-t_0(1 \otimes z))\Big)$$
$$= z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) - \delta_z^y(1 \otimes z \otimes 1)\Big)$$
$$= z^* \wedge x^* \otimes (z - z)$$
$$= 0,$$

ce qui montre
$$[\mathrm{e}_1^2, \mathrm{a}_1^1]_G = 0.$$

Calculons à présent $[\mathrm{e}_1^2, \mathrm{b}_1^1]_G$. On a

$$\begin{aligned}
&[\varepsilon_1^2, \beta_1^1]_G \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) \\
&\quad + z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) \\
&\quad + y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) \\
&\quad + z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K\Big((1 \otimes z) \otimes (1 \otimes z \otimes 1) + (1 \otimes z \otimes 1) \otimes (z \otimes 1)\Big)\Big) \\
&\quad + z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y G_K\Big((1 \otimes z) \otimes (1 \otimes x \otimes 1) + (1 \otimes x \otimes 1) \otimes (z \otimes 1)\Big) - \delta_z^z G_K\Big((1 \otimes y) \otimes (1 \otimes 1)\Big)\Big) \\
&= z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y\Big(- t_1(t_0(1 \otimes z)x) - t_1(1 \otimes x \otimes z)\Big) - \delta_z^z\Big(- t_0(1 \otimes y)\Big)\Big) \\
&= z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^y(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) - \delta_z^z(1 \otimes y \otimes 1)\Big) \\
&= z^* \wedge x^* \otimes y \\
&= \varepsilon_1^2,
\end{aligned}$$

ce qui montre

$$[\mathrm{e}_1^2, \mathrm{b}_1^1]_G = \mathrm{e}_1^2.$$

Calculons à présent $[\mathrm{a}_1^2, \mathrm{e}_1^1]_G$. On a

$$\begin{aligned}
&[\alpha_1^2, \varepsilon_1^1]_G \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_y^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) \\
&\quad + z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_y^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) \\
&\quad + y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_y^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) \\
&\quad + z^* \wedge x^* \otimes \Big(- \delta_y^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) \\
&\quad + y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_y^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K\Big(- (1 \otimes z \otimes 1) \otimes (z \otimes 1) - (1 \otimes z) \otimes (1 \otimes z \otimes 1)\Big)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+z^* \wedge x^* \otimes \Big(- \delta_y^z G_K(1 \otimes z \otimes 1)\Big) \\
&+y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K\Big((1 \otimes z) \otimes (1 \otimes x \otimes 1) + (1 \otimes x \otimes 1) \otimes (z \otimes 1)\Big)\Big) \\
&= -z^* \wedge x^* \otimes \delta_y^z \Big(- t_0(1 \otimes z)\Big) \\
&+y^* \wedge x^* \otimes \delta_{z\wedge x}^z \Big(- t_1(t_0(1 \otimes z)x) - t_1(1 \otimes x \otimes z)\Big) \\
&= y^* \wedge x^* \otimes \delta_{z\wedge x}^z (1 \otimes z \wedge x \otimes 1) \\
&= y^* \wedge x^* \otimes z \\
&= \tau_1^2,
\end{aligned}
$$

ce qui montre

$$[\mathrm{a}_1^2, \mathrm{e}_1^1]_G = \mathrm{t}_1^2.$$

Calculons à présent $[\mathrm{a}_1^2, \mathrm{a}_1^1]_G$. On a

$$
\begin{aligned}
&[\alpha_1^2, \alpha_1^1]_G \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) \\
&+z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) \\
&+y^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \wedge x \otimes 1) \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1) \\
&+z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^y \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_z^y G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^z \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Big) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge x \otimes 1) \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K\Big((1 \otimes y) \otimes (1 \otimes y \otimes 1) + (1 \otimes y \otimes 1) \otimes (y \otimes 1)\Big)\Big) \\
&+z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z G_K\Big((1 \otimes y) \otimes (1 \otimes x \otimes 1) + (1 \otimes x \otimes 1) \otimes (y \otimes 1)\Big) - \delta_z^y G_K(1 \otimes z \otimes 1)\Big) \\
&= z^* \wedge x^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^z \Big(- t_1(t_0(1 \otimes y)x) - t_1(1 \otimes x \otimes y)\Big) - \delta_z^y \Big(- t_0(1 \otimes z)\Big)\Big) \\
&= -z^* \wedge x^* \otimes y \\
&= -\varepsilon_1^2,
\end{aligned}
$$

ce qui montre

$$[\mathrm{a}_1^2, \mathrm{a}_1^1]_G = -\mathrm{e}_1^2.$$

Calculons à présent $[\mathrm{a}_1^2, {}^{\mathrm{b}^1}{}_1]_G$. On a

$$[\alpha_1^2, \beta_1^1]_G$$

$$= z^*\wedge y^*\otimes\Big(\delta^z_{z\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_z\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta^z_zG_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_{z\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes z\wedge y\otimes 1)$$
$$+z^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta^z_{z\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_z\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta^z_zG_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_{z\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes z\wedge x\otimes 1)$$
$$+y^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta^z_{z\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_z\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta^z_zG_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_{z\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes y\wedge x\otimes 1)$$
$$= z^*\wedge y^*\otimes\Big(\delta^z_{z\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_z\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes z\wedge y\otimes 1)$$
$$+z^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta^z_{z\wedge x}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_z\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta^z_zG_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta^z_{z\wedge x}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta^{(2)}_K(1\otimes z\wedge x\otimes 1)$$
$$= z^*\wedge y^*\otimes\Big(\delta^z_{z\wedge x}G_K\Big((1\otimes z)\otimes(1\otimes y\otimes 1)+(1\otimes y\otimes 1)\otimes(z\otimes 1)\Big)\Big)$$
$$+z^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta^z_{z\wedge x}G_K\Big((1\otimes z)\otimes(1\otimes x\otimes 1)+(1\otimes x\otimes 1)\otimes(z\otimes 1)\Big)-\delta^z_zG_K(1\otimes z\otimes 1)\Big)$$
$$= z^*\wedge y^*\otimes\Big(\delta^z_{z\wedge x}\Big(-t_1(t_0(1\otimes z)y)-t_1(1\otimes y\otimes z)\Big)\Big)$$
$$+z^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta^z_{z\wedge x}\Big(-t_1(t_0(1\otimes z)x)-t_1(1\otimes x\otimes z)\Big)-\delta^z_z(-t_0(1\otimes z))\Big)$$
$$= -z^*\wedge x^*\otimes\delta^z_z(z-z)$$
$$= 0,$$

ce qui montre
$$[\mathrm{a}^2_1,\mathrm{b}^1_1]_G=0.$$

Remarque 6.3.3.

1. *Les relations 6.3.2(2) montrent qu'on a un isomorphisme d'algèbres de Lie*
$$\Big(H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)),[\ ,\ ]_G\Big)\cong\mathfrak{sl}(2)\times\mathbb{K}.t.$$
2. *Les relations 6.3.2(3) décrivent le $(\mathfrak{sl}(2)\times\mathbb{K}.t)$-module $H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1))$.*

6.3.3 $\alpha=-\frac{a}{b}$ où a et b deux entiers positifs

Rappelons([4], p. 12) que les espaces vectoriels $H^*(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))$ ont respectivement les bases suivantes :

1. $H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))=\underset{i\in\mathbb{N}}{\oplus}\mathbb{K}\,\mathrm{t}^0_i$.
2. $H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))=\Big(\underset{i\in\mathbb{N}}{\oplus}\mathbb{K}\,\mathrm{t}^1_i\Big)\bigoplus\Big(\underset{j\in\mathbb{N}}{\oplus}\mathbb{K}\,\mathrm{e}^1_j\Big)$.
3. $H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))=\underset{k\in\mathbb{N}}{\oplus}\mathbb{K}\,\mathrm{t}^2_i$.
4. $H^i(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))=0$ pour $i\geq 3$.

Théorème 6.3.4. *Le crochet de Gestenhaber est donné par*

1. $[\ ,\ ]_G : H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) \otimes H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) \to H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))$

   $[\mathrm{t}_i^1\ ,\ \mathrm{t}_j^0\,]_G = 0 \quad \text{et} \quad [\mathrm{e}_i^1\ ,\ \mathrm{t}_j^0\,]_G = j\mathrm{t}_{i+j}^0.$

2. $[\ ,\ ]_G : H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) \otimes H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) \to H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))$

   $[\mathrm{t}_i^2\ ,\ \mathrm{t}_j^0\,]_G = j\mathrm{t}_{i+j}^1.$

3. $[\ ,\ ]_G : H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) \otimes H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) \to H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))$

   $[\mathrm{t}_i^1\ ,\ \mathrm{t}_j^1\,]_G = 0 \quad , \quad [\mathrm{t}_i^1\ ,\ \mathrm{e}_j^1\,]_G = -i\mathrm{t}_{i+j}^1 \quad \text{et} \quad [\mathrm{e}_i^1\ ,\ \mathrm{e}_j^1\,]_G = (j-i)\mathrm{e}_{i+j}^1.$

4. $[\ ,\ ]_G : H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) \otimes H^1(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha)) \to H^2(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))$

   $[\mathrm{t}_i^2\ ,\ \mathrm{t}_j^1\,]_G = 0 \quad \text{et} \quad [\mathrm{t}_i^2\ ,\ \mathrm{e}_j^1\,]_G = (j-i)\mathrm{t}_{i+j}^2$

La suite est consacrée à la démonstration du théorème 6.3.4.
D'après Chouhy et Solotar, les éléments suivants sont des cocycles ([4], p.12) :

En dimension 0 : $\tau_i^0 := \frac{1}{b}\, y^{ai} z^{bi}$
En dimension 1 : $\tau_i^1 := \frac{1}{b}\, x^* \otimes y^{ai} z^{bi}$, $\ \varepsilon_j^1 := \frac{1}{b}\, y^* \otimes y^{aj} z^{bj+1}$,
En dimension 2 : $\tau_i^2 := \frac{1}{b}\, z^* \wedge x^* \otimes y^{ai} z^{ai+1}$.

On désigne par $\mathrm{t}^*_{\bullet}$ la classe de cohomologie du cocycle $\tau^*_{\bullet}$ et $\mathrm{e}^*_{\bullet}$ la classe de cohomologie du cocycle $\varepsilon^*_{\bullet}$. D'après Chouhy et Solotar, les éléments $(\mathrm{t}^*_{\bullet}, \mathrm{e}^*_{\bullet})$ forment une base de $H^*\big(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_1)\big)$.

Calculons à présent le crochet de Gerstenhaber sur $H^*(\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha),\mathcal{U}(\mathfrak{r}_\alpha))$ à l'aide du théorème 4.2.7.

Le cas $p = 1$ et $q = 0$

Calculons $[\mathrm{t}_i^1, \mathrm{t}_j^0]_G$. On a

$$\begin{aligned}
[\tau_i^1, \tau_j^0]_G &= \tfrac{1}{b^2}\delta_x^{y^{ai}z^{bi}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_1^{y^{aj}z^{bj}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1\otimes 1)\\
&= \tfrac{1}{b^2}\delta_x^{y^{ai}z^{bi}} G_K(1 \otimes y^{aj}z^{bj} \otimes 1)\\
&= \tfrac{1}{b^2}\delta_x^{y^{ai}z^{bi}} \Big(-t_0(1\otimes y^{aj}z^{bj})\Big)\\
&= \tfrac{1}{b^2}\delta_x^{y^{ai}z^{bi}} \Big(\sum_{\ell=1}^{aj} y^{\ell-1}\otimes y \otimes y^{aj-\ell}z^{bj} + \sum_{\ell=1}^{bj} y^{aj}z^{\ell-1}\otimes z\otimes z^{bj-\ell}\Big)
\end{aligned}$$

$$= 0 + 0,$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}_i^1, \mathrm{t}_j^0]_G = 0.$$

Caclulons à présent $[\mathrm{e}_i^1, \mathrm{t}_j^0]_G$. On a

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_i^1, \tau_j^0]_G &= \tfrac{1}{b^2}\delta_z^{y^{ai}z^{bi+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_1^{y^{aj}z^{bj}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes 1) \\
&= \tfrac{1}{b^2}\delta_z^{y^{ai}z^{bi+1}} G_K(1 \otimes y^{aj}z^{bj} \otimes 1) \\
&= \tfrac{1}{b^2}\delta_z^{y^{ai}z^{bi+1}}\Big(- t_0(1 \otimes y^{aj}z^{bj})\Big) \\
&= \tfrac{1}{b^2}\delta_z^{y^{ai}z^{bi+1}}\Big(\sum_{\ell=1}^{aj} y^{\ell-1} \otimes y \otimes y^{aj-\ell}z^{bj} + \sum_{\ell=1}^{bj} y^{aj}z^{\ell-1} \otimes z \otimes z^{bj-\ell}\Big) \\
&= \tfrac{1}{b^2}\sum_{\ell=1}^{bj} y^{aj}z^{\ell-1}(y^{ai}z^{bi+1})z^{bj-\ell} \\
&= \tfrac{j}{b} y^{a(i+j)}z^{b(i+j)} \\
&= j\tau_{i+j}^0,
\end{aligned}$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}_i^1, \mathrm{t}_j^0]_G = j\mathrm{t}_{i+j}^0.$$

Le cas $p = 2$ et $q = 0$

Calculons $[\mathrm{t}_i^2, \mathrm{t}_j^0]_G$. On a

$$\begin{aligned}
[\tau_i^2, \tau_j^0]_G &= \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_1^{y^{aj}z^{bj}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad + \tfrac{1}{b^2}\, y^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_1^{y^{aj}z^{bj}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) \\
&\quad + \tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_1^{y^{aj}z^{bj}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1) \\
&= \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}} G_K\Big((1 \otimes y^{aj}z^{bj}) \otimes (1 \otimes x \otimes 1) + (1 \otimes x \otimes 1) \otimes (1 \otimes y^{aj}z^{bj})\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{b^2}\, y^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}} G_K\Big((1 \otimes y^{aj}z^{bj}) \otimes (1 \otimes y \otimes 1) + (1 \otimes y \otimes 1) \otimes (1 \otimes y^{aj}z^{bj})\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}} G_K\Big((1 \otimes y^{aj}z^{bj}) \otimes (1 \otimes z \otimes 1) + (1 \otimes z \otimes 1) \otimes (1 \otimes y^{aj}z^{bj})\Big) \\
&= \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\Big(- t_1(t_0(1 \otimes y^{aj}z^{bj})x) - t_1(1 \otimes x \otimes y^{aj}z^{bj})\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{b^2}\, y^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\Big(- t_1(t_0(1 \otimes y^{aj}z^{bj})y) - t_1(1 \otimes y \otimes y^{aj}z^{bj})\Big)
\end{aligned}$$

$$+\tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\Big(- t_1(t_0(1\otimes y^{aj}z^{bj})z) - t_1(1\otimes z\otimes y^{aj}z^{bj})\Big).$$

$$= \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\Big(t_1\Big(\sum_{\ell=1}^{aj} y^{\ell-1}\otimes y\otimes y^{aj-\ell}z^{bj}x + \sum_{\ell=1}^{bj} y^{aj}z^{\ell-1}\otimes z\otimes z^{bj-\ell}x\Big)\Big)$$

$$+\tfrac{1}{b^2}\, y^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}} t_1\Big(\sum_{\ell=1}^{bj} y^{aj}z^{\ell-1}\otimes z\otimes z^{bj-\ell}y + 0\Big)$$

$$+\tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\Big(0 - \sum_{\ell=1}^{aj} y^{\ell-1}\otimes z\wedge y\otimes y^{aj-\ell}z^{bj}\Big).$$

Mais

$$t_1\Big(\sum_{\ell=1}^{bj} y^{aj}z^{\ell-1}\otimes z\otimes z^{bj-\ell}y\Big) = \sum_{\ell=1}^{bj} y^{aj}z^{\ell-1}\otimes z\wedge y\otimes z^{bj-\ell}$$

et

$$\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}(\sum_{\ell=1}^{bj} y^{aj}z^{\ell-1}\otimes z\wedge y\otimes z^{bj-\ell}) = 0.$$

On a donc

$$[\tau_i^2,\tau_j^0]_G = \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\Big(t_1\Big(\sum_{\ell=1}^{aj} y^{\ell-1}\otimes y\otimes y^{aj-\ell}z^{bj}x + \sum_{\ell=1}^{bj} y^{aj}z^{\ell-1}\otimes z\otimes z^{bj-\ell}x\Big)\Big).$$

Or, par récurrence, on trouve

$$y^{aj-\ell}z^{bj}x = xy^{aj-\ell}z^{bj} + \ell y^{aj-\ell}z^{bj} \;\text{ et }\; z^{bj-\ell}x = xz^{bj-\ell} + \tfrac{a(bj-\ell)}{b} z^{bj-\ell}.$$

D'où, on a

$$[\tau_i^2,\tau_j^0]_G = \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}} t_1\Big(\sum_{\ell=1}^{aj} y^{\ell-1}\otimes y\otimes (xy^{aj-\ell}z^{bj} + \ell y^{aj-\ell}z^{bj})\Big)$$

$$+\tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}} t_1\Big(\sum_{\ell=1}^{bj} y^{aj}z^{\ell-1}\otimes z\otimes (xz^{bj-\ell} + \frac{a(bj-\ell)}{b} z^{bj-\ell})\Big)$$

$$= \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\Big(\sum_{\ell=1}^{aj} y^{\ell-1}\otimes y\wedge x\otimes y^{aj-\ell}z^{bj}\Big)$$

$$+\tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\Big(\sum_{\ell=1}^{bj} y^{aj}z^{\ell-1}\otimes z\wedge x\otimes z^{bj-\ell}\Big)$$

$$= \tfrac{j}{b}\, x^* \otimes y^{a(i+j)}z^{b(i+j)}$$

$$= j\tau^1_{i+j},$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}^2_i, \mathrm{t}^0_j]_G = j\, \mathrm{t}^2_{i+j}.$$

Le cas $p = q = 1$

Calculons $[\mathrm{t}^1_i, \mathrm{t}^1_j]_G$. On a

$$\begin{aligned}
[\tau^1_i, \tau^1_j]_G &= \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^{y^{aj}z^{bj}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1)\\
&\quad -\tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_x^{y^{aj}z^{bj}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1)\\
&\quad +\tfrac{1}{b^2}\, y^* \otimes \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^{y^{aj}z^{bj}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1)\\
&\quad -\tfrac{1}{b^2}\, y^* \otimes \delta_x^{y^{aj}z^{bj}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1)\\
&\quad +\tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^{y^{aj}z^{bj}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1)\\
&\quad -\tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_x^{y^{aj}z^{bj}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1)\\
&= \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} G_K\Big((1 \otimes y^{aj}z^{bj}) \otimes (1 \otimes 1)\Big)\\
&\quad -\tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_x^{y^{aj}z^{bj}} G_K\Big((1 \otimes y^{ai}z^{bi}) \otimes (1 \otimes 1)\Big)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}^1_i, \mathrm{t}^1_j]_G = 0.$$

Calculons à présent $[\mathrm{t}^1_i, \mathrm{e}^1_j]_G$. On a

$$\begin{aligned}
[\tau^1_i, \varepsilon^1_j]_G &= \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1)\\
&\quad -\tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1)\\
&\quad +\tfrac{1}{b^2}\, y^* \otimes \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1)\\
&\quad -\tfrac{1}{b^2}\, y^* \otimes \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1)\\
&\quad +\tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1)\\
&\quad -\tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} \otimes_{\mathcal{A}} 1)\Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1)\\
&= -\tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} G_K\Big((1 \otimes y^{ai}z^{bi}) \otimes (1 \otimes 1)\Big)\\
&\quad +\tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_x^{y^{ai}z^{bi}} G_K\Big((1 \otimes y^{aj}z^{bj+1}) \otimes (1 \otimes 1)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} t_0(1 \otimes y^{ai} z^{bi}) \\
&= -\tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} \Big(\sum_{\ell=1}^{ai} y^{\ell-1} \otimes y \otimes y^{ai-\ell} z^{bi} + \sum_{\ell=1}^{bi} y^{ai} z^{\ell-1} \otimes z \otimes z^{bi-\ell} \Big) \\
&= -\tfrac{i}{b}\, x^* \otimes y^{a(i+j)} z^{b(i+j)} \\
&= -i\, \tau_{i+j}^1,
\end{aligned}
$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}_i^1, \mathrm{e}_j^1]_G = -i\, \mathrm{t}_{i+j}^1.$$

Calculons à présent $[\mathrm{e}_i^1, \mathrm{e}_j^1]_G$. On a

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon_i^1, \varepsilon_j^1]_G &= \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_z^{y^{ai}z^{bi+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad - \tfrac{1}{b^2}\, x^* \otimes \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^{y^{ai}z^{bi+1}} \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad + \tfrac{1}{b^2}\, y^* \otimes \delta_z^{y^{ai}z^{bi+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) \\
&\quad - \tfrac{1}{b^2}\, y^* \otimes \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^{y^{ai}z^{bi+1}} \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes y \otimes 1) \\
&\quad + \tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_z^{y^{ai}z^{bi+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1) \\
&\quad - \tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_z^{y^{ai}z^{bi+1}} \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \otimes 1) \\
&= \tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_z^{y^{ai}z^{bi+1}} \Big(\sum_{\ell=1}^{aj} y^{\ell-1} \otimes y \otimes y^{aj-\ell} z^{bj+1} + \sum_{\ell=1}^{bj+1} y^{aj} z^{\ell-1} \otimes z \otimes z^{bj-\ell+1} \Big) \\
&\quad - \tfrac{1}{b^2}\, z^* \otimes \delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}} \Big(\sum_{\ell=1}^{ai} y^{\ell-1} \otimes y \otimes y^{ai-\ell} z^{bi+1} + \sum_{\ell=1}^{bi+1} y^{ai} z^{\ell-1} \otimes z \otimes z^{bi-\ell+1} \Big) \\
&= \tfrac{j-i}{b}\, z^* \otimes y^{a(i+j)} z^{b(i+j)+1} \\
&= (j-i)\, \varepsilon_{i+j}^1,
\end{aligned}
$$

ce qui montre

$$[\mathrm{e}_i^1, \mathrm{e}_j^1]_G = (j-i)\, \mathrm{e}_{i+j}^1.$$

Le cas $p = 2$ et $q = 1$

Calculons $[\mathrm{t}_i^2, \mathrm{t}_j^1]_G$. On a

$$
\begin{aligned}
&[\tau_i^2, \tau_j^1]_G \\
&= z^* \wedge y^* \otimes \Big(\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_x^{y^{aj}z^{bj}} \otimes_{\mathcal{A}} 1) - \delta_x^{y^{aj}z^{bj}} G_K(1 \otimes_{\mathcal{A}} \delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}} \otimes_{\mathcal{A}} 1) \Big) \Delta_K^{(2)}(1 \otimes z \wedge y \otimes 1)
\end{aligned}
$$

$$+z^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_x^{y^{aj}z^{bj}}\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta_x^{y^{aj}z^{bj}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1\otimes z\wedge x\otimes 1)$$

$$+y^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_x^{y^{aj}z^{bj}}\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta_x^{y^{aj}z^{bj}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1\otimes y\wedge x\otimes 1)$$

$$= z^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_x^{y^{aj}z^{bj}}\otimes_{\mathcal{A}}1)-\delta_x^{y^{aj}z^{bj}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Big)\Delta_K^{(2)}(1\otimes z\wedge x\otimes 1)$$

$$+y^*\wedge x^*\otimes\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_x^{y^{aj}z^{bj}}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Delta_K^{(2)}(1\otimes y\wedge x\otimes 1)$$

$$= z^*\wedge x^*\otimes\Big(\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}G_K\Big(-(1\otimes z\otimes 1)\otimes(y^{aj}z^{bj}\otimes 1)-(1\otimes y^{aj}z^{bj})\otimes(1\otimes z\otimes 1)\Big)$$

$$-z^*\wedge x^*\otimes\delta_x^{y^{aj}z^{bj}}G_K\Big((1\otimes y^{ai}z^{bi+1})\otimes(1\otimes 1)\Big)$$

$$+y^*\wedge x^*\otimes\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}G_K\Big(-(1\otimes y\otimes 1)\otimes(y^{aj}z^{bj}\otimes 1)-(1\otimes y^{aj}z^{bj})\otimes(1\otimes y\otimes 1)\Big)$$

$$= 0,$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}_i^2,\mathrm{t}_j^1]_G = 0.$$

Calculons à présent $[\mathrm{t}_i^2,\mathrm{e}_j^1]_G$. On a

$$[\tau_i^2,\varepsilon_j^1]_G$$

$$= z^*\wedge y^*\otimes\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Delta_K^{(2)}(1\otimes z\wedge y\otimes 1)$$

$$-z^*\wedge y^*\otimes\delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Delta_K^{(2)}(1\otimes z\wedge y\otimes 1)$$

$$+z^*\wedge x^*\otimes\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Delta_K^{(2)}(1\otimes z\wedge x\otimes 1)$$

$$-z^*\wedge x^*\otimes\delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Delta_K^{(2)}(1\otimes z\wedge x\otimes 1)$$

$$+y^*\wedge x^*\otimes\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Delta_K^{(2)}(1\otimes y\wedge x\otimes 1)$$

$$-y^*\wedge x^*\otimes\delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}}G_K(1\otimes_{\mathcal{A}}\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}\otimes_{\mathcal{A}}1)\Delta_K^{(2)}(1\otimes y\wedge x\otimes 1)$$

$$= z^*\wedge y^*\otimes\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}G_K\Big((1\otimes y^{aj}z^{bj+1})\otimes(1\otimes y\otimes 1)+(1\otimes y\otimes 1)\otimes(1\otimes y^{aj}z^{bj+1})\Big)$$

$$+z^*\wedge x^*\otimes\delta_{z\wedge x}^{y^{ai}z^{bi+1}}G_K\Big((1\otimes y^{aj}z^{bj+1})\otimes(1\otimes x\otimes 1)+(1\otimes y\otimes 1)\otimes(1\otimes y^{aj}z^{bj+1})\Big))$$

$$-z^*\wedge x^*\otimes\delta_z^{y^{aj}z^{bj+1}}G_K\Big((1\otimes y^{ai}z^{bi+1})\otimes(1\otimes 1)\Big)$$

$$= \tfrac{j-i}{b}\,z^*\wedge x^*\otimes y^{a(i+j)}z^{b(i+j)+1}$$

$$= (j-i)\,\tau_{i+j}^2,$$

ce qui montre

$$[\mathrm{t}_i^2, \mathrm{e}_j^1]_G = (j - i)\, \mathrm{t}_{i+j}^2.$$

Bibliographie

[1] J.-C. Bustamante. The cohomology structure of string algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 204(3) : 616 – 626, 2006.

[2] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1956.

[3] S. Chouhy. *Deformaciones de álgebras envolventes de álgebras de Lie de dimensión 3.* Tesis de Licenciatura, Departamento de Matemática, FCEyN, UBA,, 2012.

[4] S. Chouhy and A. Solotar. Hochschild cohomology. *Communication personnelle.*

[5] C. Cibils. Hochschild cohomology algebra of radical square zero. In *Algebras and modules II, (Geiranger, 1996)*, number CMS Conf. Proc., 24, pages 93–101. Amer Mathematical Society, 1998.

[6] C. Cibils and A. Solotar. Hochschild cohomology algebra of abelian groups. *Archiv der Mathematik*, 68(1) : 17–21, 1997.

[7] J. Dixmier. *Algèbres enveloppantes.* Cahiers Scientifiques. Bordas Editions, 1974.

[8] K. Erdmann and T. Holm. Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class An. *Forum Mathematicum*, 11(2) : 177–201, 1999.

[9] K. Erdmann, T. Holm, and N. Snashall. Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class An,II. *Algebras and Representation Theory*, 5(5) : 457 – 482, 2002.

[10] C.-H. Eu. The product in the Hochschild cohomology ring of preprojective algebras of Dynkin quivers. *Journal of Algebra*, 320(4) : 1477 – 1530, 2008.

[11] J. Fan and Y. Xu. On Hochschild cohomology rings of Fibonacci algebras. *Frontiers of Mathematics in China*, 1(4) : 526–537, 2006.

[12] M. Gerstenhaber. The cohomology structure of an associative ring. *Annals of Mathematics*, 78(2) : 267–288, 1963.

[13] G. Hochschild. On the cohomology groups of an associative algebra. *Annals of Mathematics*, 46(1) : 58–67, 1945.

[14] T. Holm. The Hochschild cohomology ring of a modular group algebra : the commutative case. *Communications in Algebra*, 24(6) : 1957–1969, 1996.

[15] C. Kassel. L'homologie cyclique des algèbres enveloppantes. *Inventiones mathematicae*, 91(2) : 221–252, 1988.

[16] T. Lambre. Dualité de Van den Bergh et structure de Batalin-Vilkoviskiĭ sur les algèbres de Calabi-Yau. *J. Noncommut. Geom.*, 4(3) :441–457, 2010.

[17] J.-L. Loday. *Cyclic Homology.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[18] S. Mac Lane. *Homology.* Springer, 1963.

[19] C. Negron and S. Witherspoon. An alternative approch to the Lie bracket on Hochschild cohomology. *Homology Homotopy Applications*, 18(1) : 265–285, 2016.

[20] P. Nuss. L'homologie cyclique des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie de dimension trois. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 73(1) : 39 – 71, 1991.

[21] S. Riviere. *On the isomorphism between Hochschild and Chevalley-Eilenberg cohomologies.* Thèse, Université de Nantes, December 2012.

[22] S. Sánchez-Flores. The Lie module structure on the Hochschild cohomology groups of monomial algebras with radical square zero. *Journal of Algebra*, 320(12) : 4249 – 4269, 2008.

[23] S. Sánchez-Flores. The Lie structure on the Hochschild cohomology of a modular group algebra. *Journal of Algebra*, 216(3) : 718 – 733, 2012.

[24] R. Sridharan. Filtered algebras and representations of Lie algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 100(3) : 530–550, 1961.

[25] C. Strametz. The Lie algebra structure on the first Hochschild cohomology group of a monomial algebra. *J. Algebra Appl.*, 5(3) : 245–270, 2006.

[26] C. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, England, New York, 1994.

[27] S. Witherspoon and G. Zhou. Gerstenhaber brackers on Hochschild cohomology of quantum symetric algebras and their group extentions. *Pacific Journal of Mathematics*, 283(1) : 223–255, 2016.