

Renormalisation dans les algèbres de HOPF graduées connexes

Mohamed Belhaj Mohamed

▶ **To cite this version:**

Mohamed Belhaj Mohamed. Renormalisation dans les algèbres de HOPF graduées connexes. Mathématiques générales [math.GM]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II; Université de Monastir (Tunisie), 2014. Français. NNT : 2014CLF22515 . tel-01247341

HAL Id: tel-01247341

https://theses.hal.science/tel-01247341

Submitted on 4 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





Université de Monastir
Faculté des Sciences de Monastir

Université Blaise Pascal
U.F.R Sciences et Technologies
N° d'ordre : D.U. 2515
E.D.Sciences Fondamentales N° 40806

THESE

Présentée pour obtenir le grade de par

DOCTEUR D'UNIVERSITE

Spécialité : **MATHEMATIQUES**

Par **Mohamed BELHAJ MOHAMED**

Renormalisation dans les algèbres de Hopf graduées connexes

Soutenue publiquement le 29 Novembre 2014 devant la commission d'examen :

Président :	Lotfi KAMMOUN	Professeur, Université de Monastir
Directeurs :	Dominique MANCHON	CR, CNRS Université Blaise Pascal
	Mohamed SELMI	Professeur, Université de Sousse
Rapporteurs :	Loic Foissy	Professeur, Université du Littoral Côte d'Opale
	Boujemaa AGREBAOUI	Professeur, Université de Sfax
Examinateur :	Michael Heusener	Professeur, Université Blaise Pascal

à toute la famille, à ma petite Zeyneb.

Remerciements

Ce travail du thèse a été effectué en cotutelle entre la Faculté des Sciences de Monastir et l'Université Blaise Pascal à Clermont Ferrand.
De nombreuses personnes ont contribué à l'élabaration de cette thèse. C'est avec plaisir que je leur exprime ici ma grande reconnaissance.

Je souhaite en premier lieu exprimer ma gratitude à mes directeurs de thèse Mrs Dominique Manchon et Mohamed Selmi, pour leur encadrement et leur disponibilité.

Je remercie vivement Mr Dominique Manchon de m'avoir fait partager ses connaissances et son expérience. Tous mes remerciements pour sa confiance, son enthousiasme, son soutien, son aide précieuse ainsi que pour la rigueur qu'il m'a communiquée.

Mes plus chaleureux remerciements à Mr Mohamed Selmi pour sa confiance, sa disponibilité, ses remarques et ses recommandations tout au long des années de thèse.

Je remercie Mr Lotfi KAMOUN, professeur à l'Université de Monastir qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également Mr Boujemaa AGREBAOUI, professeur à l'Université de Sfax d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail et pour ses remarques et ses conseils.

Je remercie vivement Mr Loic FOISSY, professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale de s'être rendu disponible en acceptant d'être rapporteur de ma thèse, ainsi que pour l'attention toute particulière qu'il lui a accordée.

J'exprime toute ma gratitude à Mr Michael HEUSENER, professeur à l'Université Blaise Pascal de faire partie du jury et d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie vivement Mme Leila BEN ABDELGHANI, professeur à l'Université de Monastir pour ses encouragements et ses recommandations.

Je voudrais remercier les membres du Laboratoire de Mathématiques de l'Université Blaise Pascal, pour leur soutien.

Je remercie les membres du groupe de travail ANR CARMA pour m'avoir bien accueilli et pour leurs encouragements.

Enfin, je voudrais remercier mes amis et mes collègues pour leur soutien et leur confiance. Merci de m'avoir accompagné dans cette aventure.

Je remercie chaleureusement tous mes parents, ma femme, mes freres, ma soeur et mon oncle qui m'ont accompagné et ont su me manifester leur intérêt pour mon travail de thèse en demandant régulièrement des nouvelles sur son état d'avancement. Ils ont tous été là, à leur façon, pour m'encourager.

Table des matières

Introduction **6**

1 Algèbres de Hopf et renormalisation **15**

1 Algèbres, Cogèbres et Bigèbres 15

1.1 Produit tensoriel 15

1.2 Algèbres et modules 16

1.3 Cogèbres 18

1.4 Bigèbres 22

2 Algèbres de Hopf graduées connexes 22

2.1 Convolution et algèbres de Hopf 22

2.2 Graduation 24

2.3 Dual gradué 25

2.4 Connexité 25

2.5 Exemples d'algèbres de Hopf 26

3 Décomposition de Birkhoff et Renormalisation 27

3.1 Groupe des caractères et algèbre de Lie des caractères infinitésimaux . 27

3.2 Schéma de renormalisation et décomposition de Birkhoff 29

2 Groupes de renormalisation pour deux algèbres de Hopf en produit semi-direct **33**

1 Groupe de renormalisation et fonction Bêta de Connes-Kreimer 33

1.1 Opérateur de graduation et opérateur de Dynkin 33

1.2 Groupe de renormalisation et fonction Bêta 35

2 Deux algèbres de Hopf graduées connexes en interaction 35

2.1 Les arbres enracinés 37

2.2 Les graphes de Feynman orientés sans cycle 38

3 Bidérivation provenant d'un caractère infinitésimal 40

3.1 Groupes de caractères 40

3.2 Bidérivation B_α 41

4 Groupe de renormalisation et fonction β_α 43
4.1 Groupe à un paramètre d'automorphismes 43
4.2 L'opérateur E_α 45
4.3 Groupe de renormalisation 46
4.4 Fonction β_α 49

3 Algèbres de Hopf de graphes de Feynman 51
1 Définitions générales 51
2 Algèbre de Hopf des graphes de Feynman non spécifiés 53
2.1 Bigèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ 53
2.2 Algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ 55
3 Algèbre de Hopf des graphes de Feynman specifiés 56
3.1 Bigèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ 56
3.2 Algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ 58
4 Structure extérieure 60
4.1 Produit tensoriel non ordonné 60
4.2 Une algèbre de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ 60
4.3 Produit de convolution $\circledast$ 61
4.4 Décomposition de Birkhoff 65
4.5 Développement de Taylor 69

4 Dédoublement de la bigèbre des graphes et règles de Feynman 73
1 Le dédoublement de la bigèbre 73
2 Les règles de Feynman 75
2.1 Description de l'intégrande 75
2.2 Intégration de moments intérieurs 76
3 Algorithme de Bogoliubov 76
4 Adaptation du formalisme de Connes et Kreimer 77
4.1 Quelques faits sur les fonctions de Schwartz 77
4.2 Une algèbre de fonctions de Schwartz 78
4.3 Produit de convolution $\divideontimes$ 80
4.4 Développement de Taylor 81
5 Régularisation dimensionnelle 82
5.1 Idée générale 83
5.2 L'integrale D-dimensionnelle 83
5.3 Extrapolation aux dimensions complexes 84
5.4 Construction de l'intégrale D-dimensionnelle à paramètres 86
5.5 Intégrale D-dimensionnelle d'une fonction de type Feynman 91

6 Renormalisation de l'intégrale de Feynman 95
6.1 L'algèbre-cible End $\widetilde{\mathcal{B}}$ 95
6.2 Intégrale de Feynman 97
6.3 Décomposition de Birkhoff 98

Introduction

Dans un système physique en interaction, il est crucial de distinguer entre les paramètres effectivement mesurés et les paramètres nus, c'est-à-dire la valeur que ceux-ci prendraient en l'absence de toute interaction avec l'environnement. La théorie de renormalisation désigne tout procédé qui permet de passer des paramètres nus aux paramètres effectivement observés, qui sont alors dits renormalisés. Nous citons l'exemple d'un ballon sphérique en mouvement dans un fluide, donné par G. Green dès 1836, qui permet d'en donner une idée [22, 10, 12] : à vitesse proche de zéro (ce qui permet de négliger les forces de frottement), tout se passe comme si la masse m_0 du ballon était augmentée de $\frac{M}{2}$, où M est la masse du volume de fluide occupé par celui-ci. La force totale $F = mg$ agissant sur le ballon (avec $m = m_0 + \frac{M}{2}$) se répartit entre la force de gravité $F_0 = m_0 g_0$ et la poussée d'Archimède $-Mg_0$, où $g_0 \approx 9,81 m.s^{-2}$ est l'intensité de la gravitation à la surface de la terre. Les paramètres nus sont donc la masse m_0, la force de gravité F_0 et l'accélération g_0, alors que les paramètres renormalisés sont :

$$m = m_0 + \frac{M}{2}, \quad F = (1 - \frac{M}{m_0})F_0, \quad g = \frac{m_0 - M}{m_0 + \frac{M}{2}} g_0.$$

On remarque donc que l'accélération initiale décroît de g_0 à $-2g_0$ lorsque l'interaction, représentée par la masse de fluide M, croît de 0 à $+\infty$.

En électrodynamique quantique (QED), comme dans les autres théories des champs quantiques en général, les paramètres nus sont infinis. Cette difficulté des infinis est apparue dans les années 40 du 20 ème siècle, avec les traveaux de Tomonaga, Schwinger et Feynman qui ont partagé le prix Nobel en physique en 1965. La renormalisation a été essentiellement développée pour interpréter des intégrales divergentes qui proviennent des graphes de Feynman de la theorie perturbative. En fait les règles de Feynman d'une théorie quantique des champs associent à chaque graphe de Feynman une fonction des moments associés au graphe, dont l'intégration suivant les moments intérieurs est appélée intégrale de Feynman. Le problème est que ces intégrales sont en général divergentes. L'idée principale de la théorie de renormalisation est de donner un sens à ces intégrales en les transformant en des fonctions bien définies des moments extérieurs, tout en préservant leur sens physique. Depuis les années 50 et 60 du 20 ème siècle N. Bogoliubov, O. Parasiuk, K. Hepp et W. Zimmermann ont déterminé un procedé

de renormalisation connu sous le nom d'algorithme BPHZ qui consiste, après avoir régularisé l'intégrale, c'est-à-dire lui avoir donné un sens mathématique, à choisir un schéma de renormalisation puis extraire la partie finie.

A la fin des années 90, Alain Connes et Dirk Kreimer ont découvert l'organisation des graphes de Feynman de la théorie quantique des champs en une algèbre de Hopf combinatoire [9, 10, 11, 26], et ils ont exploité cette découverte pour interpréter l'algorithme BPHZ en termes de cette algèbre de Hopf et l'utiliser comme un outil puissant pour expliquer la combinatoire de la renormalisation. En fait, sur toute algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ graduée connexe il est possible de décrire un procédé de renormalisation directement apparenté à l'algorithme de Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann (BPHZ) ([6, 23, 41]). Le cadre est le suivant : pour toute algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ munie d'un *schéma de renormalisation*, c'est-à-dire d'une décomposition $\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+$ où $\mathcal{A}_-$ et $\mathcal{A}_+$ sont deux sous-algèbres, avec l'unité dans $\mathcal{A}_+$, tout caractère $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ admet une unique *décomposition de Birkhoff* en deux caractères φ_- et φ_+ :

$$\varphi = \varphi_-^{*-1} * \varphi_+$$

où $\varphi_-(\operatorname{Ker}\varepsilon) \subset \mathcal{A}_-$ et $\varphi_+(\mathcal{H}) \subset \mathcal{A}_+$ (on désigne par ε la counité). L'etoile $*$ désigne le produit de convolution. Un exemple de schéma de renormalisation est donné par les series de Laurent en une variable complexe z, la sous-algèbre $\mathcal{A}_+$ désigne alors $\mathbb{C}[[z]]$ et $\mathcal{A}_-$ désigne l'espace $z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ des polynômes en z^{-1} sans terme constant (*schéma minimal*). La valeur renormalisée du caractère φ est définie par $\varphi_+(0)$, qui par définition existe.
Cette approche est utilisée maintenant couramment en théorie quantique des champs (QFT) [34] et en plusieurs autres domaines des mathématiques, par exemple en théorie des nombres [31], en systèmes dynamiques [32], etc.

Dans notre travail de thèse, nous nous intéressons à la renormalisation de Connes et Kreimer dans le contexe des algèbres de Hopf de graphes de Feynman spécifiés. De manière informelle, un graphe spécifié est un graphe dont chaque composante connexe est munie d'un indice qui sert à discriminer certains types de sommets. Nous construisons une structure d'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_\mathcal{T}$ sur l'espace des graphes de Feynman spécifiés d'une théorie quantique des champs $\mathcal{T}$. Nous définissons encore un dédoublement $\widetilde{\mathcal{D}}_\mathcal{T}$ de la bigèbre de graphes de Feynman spécifiés, un produit de convolution $\divideontimes$ et un groupe de caractères de cette algèbre de Hopf à valeurs dans une algèbre commutative qui prend en compte la dépendance en les moments extérieurs. Nous mettons en place alors la renormalisation décrite par A. Connes et D. Kreimer en [10] et la décomposition de Birkhoff pour deux schémas de renormalisation : le schéma minimal de renormalisation et le schéma de développement de Taylor.

A la fin nous rappelons la définition des intégrales de Feynman associées à un graphe. Nous montrons en appliquant la regularisation dimensionnelle que ces intégrales sont holomorphes en une variable complexe D dans le cas des fonctions de Schwartz, et qu'elles s'étendent en une fonction méromorphe dans le cas des fonctions rationnelles. Nous pouvons ainsi donner un sens à nos intégrales de Feynman en utilisant l'algorithme BPHZ.

Notre travail de thèse est décomposé en quatre chapitres : Dans le premier chapitre, nous donnons des généralités sur les algèbres de Hopf et la renormalisation. Nous commençons par définir les notions d'algèbre, cogèbre, bigèbre, produit de convolution, algèbre de Hopf et antipode en donnant quelques exemples à la fin, ensuite nous décrivons le schéma de renormalisation ainsi que la décomposition de Birkhoff d'un caractère d'une algèbre de Hopf à valeurs dans une algèbre commutative.

Rappelons ici l'approche de Connes et Kreimer pour déterminer le groupe de renormalisation et la fonction Bêta liés à la bidérivation de graduation d'une algèbre de Hopf graduée connexe $\mathcal{H}$ définie par $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, donnée par $Y(x) = nx$ pour x homogène de degré n. L'opérateur de Dynkin D est défini par :

$$D = S * Y,$$

où S est l'antipode de $\mathcal{H}$. Soit $G_{\mathcal{A}}$ le groupe des caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans l'algèbre commutative $\mathcal{A} = \mathbb{C}[z^{-1}, z]]$ munie de schéma minimal de renormalisation. L'ensemble des caractères locaux est défini par :

$$G_{\mathcal{A}}^{loc} = \{\varphi \in G_{\mathcal{A}}, \ \ \frac{d}{dt}(\varphi_t)_- = 0\}.$$

Le groupe de renormalisation d'un caractère local φ est défini par :

$$F_t(\varphi)(x) = \lim_{z \longrightarrow 0}(\varphi^{*-1} * \varphi_t)(x)(z).$$

La fonction Bêta, le générateur de ce groupe à un paramètre définie par :

$$\beta(\varphi)(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_t(\varphi)(x),$$

est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \beta(\varphi) &= \operatorname{Res}(\varphi_-^{*-1} \circ Y) \\ &= -\operatorname{Res}(\varphi_- \circ Y). \end{aligned}$$

Dans le deuxième chapitre nous définissons des objets analogues pour d'autres bidérivations que la graduation Y. Une famille de bidérivations apparaît dans la situation suivante : On

suppose qu'il existe deux algèbres de Hopf graduées connexes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ en interaction, $\mathcal{K}$ étant un comodule-cogèbre sur $\mathcal{H}$. Plus précisément on suppose qu'il existe une coaction $\Phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$ qui est en même temps un morphisme d'algèbres graduées, et telle que :

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{K}} \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \circ \Phi = m^{1,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}},$$

où $m^{1,3} : \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est défini par :

$$m^{1,3}(a \otimes b \otimes c \otimes d) = ac \otimes b \otimes d,$$

et Φ s'exprime en notation de Sweedler pour tout $x \in \mathcal{H}$ par :

$$\Phi(x) = \sum_{(x)} x_0 \otimes x_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes x + \sum_{(x)} x^{(\prime)} \otimes x^{(\prime\prime)}.$$

Cette situation se rencontre naturellement dans le cas de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{CK}$ des arbres enracinés [7], et dans le cas plus général de l'algèbre de Hopf des graphes de Feynman orientés sans cycles [29]. Le groupe $G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}$ des caractères de $\mathcal{K}$ (à valeurs dans $\mathcal{A}$) agit alors par automorphismes sur le groupe $G_{\mathcal{A}}$ des caractères de $\mathcal{H}$. Tout caractère infinitésimal $\alpha : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ définit alors une bidérivation B_α de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$, qui peut jouer le rôle de la graduation Y. Nous montrons que les caractères locaux, le groupe de renormalisation et la fonction Bêta peuvent être définis de la même manière que pour la bidérivation Y. En effet, pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$ on définit un groupe à un paramètre $\theta_{t,\alpha}$ d'automorphismes de $G_{\mathcal{A}}$:

$$\theta_{t,\alpha}(\varphi)(x)(z) = (exp^{\star} tz\alpha \star \varphi)(x)(z).$$

Cette formule définit également un sous-groupe à un paramètre d'automorphismes de l'algèbre $(\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}), *)$. On note :

$$\varphi_{t,\alpha} := \theta_{t,\alpha}(\varphi).$$

La décomposition de Birkhoff de $\varphi_{t,\alpha}$ s'écrit :

$$\varphi_{t,\alpha} = (\varphi_{t,\alpha})_-^{*-1} * (\varphi_{t,\alpha})_+.$$

On note $G_{\mathcal{A}}^{\alpha}$ l'ensemble des caractères φ de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ qui vérifient :

$$\frac{d}{dt}(\varphi_{t,\alpha})_- = 0.$$

Nous définissons alors l'analogue de l'opérateur de Dynkin E_α par :

$$E_\alpha := S * B_\alpha.$$

L'analogue $\varphi \longmapsto \varphi \circ E_\alpha$ de la composition à droite par l'operateur de Dynkin $S * Y$ n'est toutefois pas une bijection des caractères de $\mathcal{H}$ vers les caractères infinitisémaux. Cela vient du

fait que $\mathrm{Ker}\, B_\alpha$ est non trivial (il contient tous les éléments primitifs), contrairement à $\mathrm{Ker}\, Y$ qui se réduit à l'unité de $\mathcal{H}$.
Pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$ nous définissons une famille à un paramètre $h_{t,\alpha}$ dans $G_{\mathcal{A}}$ telle que :

$$\varphi_{t,\alpha} = \varphi * h_{t,\alpha},$$

et nous montrons que pour tout $\varphi \in G^{\alpha}_{\mathcal{A}}$, le terme constant de $h_{t,\alpha}$ defini par :

$$F_{t,\alpha}(\varphi)(x) = \lim_{z \longrightarrow 0} h_{t,\alpha}(x)(z)$$

est un sous-groupe à un paramètre de $G_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$, et que l'analogue β_α de fonction Bêta, le générateur de groupe à un paramètre $F_{t,\alpha}$, c'est-á-dire l'élément de $\mathcal{H}^*$ défini par :

$$\beta_\alpha(\varphi) := \frac{d}{dt}_{\big| t=0} F_{t,\alpha}(\varphi),$$

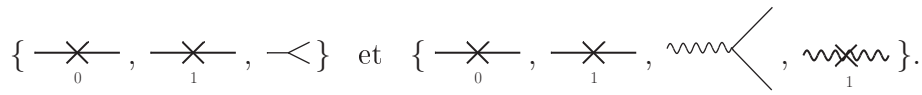
est liée au résidu de $\varphi_- \circ B_\alpha$. Nous montrons que

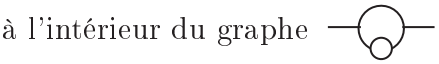
$$\begin{aligned} \beta_\alpha(\varphi) &= \mathrm{Res}(\varphi_-^{*-1} \circ B_\alpha) \\ &= -\mathrm{Res}(\varphi_- \circ B_\alpha). \end{aligned}$$

Dans le troisième chapitre nous étudions les graphes de Feynman et leurs structures extérieures. Nous nous intéressons à l'algèbre de Hopf des graphes de Feynman specifiés étudiées par A. Connes et D. Kreimer dans [10]. Dans la première partie nous étudions le cas plus simple des algèbres de Hopf des graphes de Feynman localement irréductibles à une particule ($1PI$), en négligeant dans un premier temps la spécification. En premier lieu on se donne une théorie des champs $\mathcal{T}$ (par exemple φ^3 [10], φ^4 [38], QCD et QED [38], [39] ...) qui donne naissance à des graphes de Feynman de type determiné par $\mathcal{T}$: le type d'un sommet est déterminé par le type des arêtes qui lui sont adjacentes. Nous construisons alors une structure de bigèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ commutative sur l'espace des graphes de $\mathcal{T}$ localement $1PI$. Le coproduit est donné par :

$$\Delta(\Gamma) = \sum_{\substack{\gamma \subseteq \Gamma \\ \Gamma/\gamma \in \mathcal{T}}} \gamma \otimes \Gamma/\gamma,$$

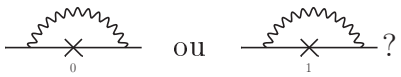
où la somme parcourt tous les sous-graphes couvrants localement $1PI$ de Γ, tels que le sous-graphe contracté Γ/γ soit dans la théorie $\mathcal{T}$ (autrement dit, les sous-graphes superficiellement divergents localement $1PI$ [2]). L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ est obtenue en prenant le quotient de la bigèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ ci dessus par l'idéal engendré par $\mathbf{1} - \Gamma$ où l'unité $\mathbf{1}$ est le graphe vide et Γ est un graphe 1PI sans arêtes internes. Ensuite nous introduisons la spécification : on est en effet amené en théorie quantique des champs à distinguer entre plusieurs sommets de même type. Par exemple les listes des sommets admis en théorie φ^3 et QED sont respectivement :



La contraction d'un sous-graphe sur un point pose alors un problème. Par exemple en théorie φ^3, si on contracte le sous-graphe à l'intérieur du graphe , va-t-on obtenir :



De même en QED, la contraction de sous-graphe  dans  donne-t-elle :

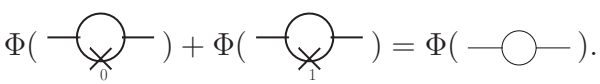


On y remédie en introduisant les graphes spécifiés $\bar{\Gamma} = (\Gamma, \underline{i})$ où $\underline{i}$ est un multi-indice qui repère le type de résidu de Γ, c'est-à-dire le sommet obtenu en contractant le graphe sur un point (exemple res  $=$ ). La formule du coproduit pour la bigèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ des graphes spécifiés s'ecrit alors :

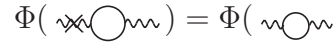
$$\Delta(\bar{\Gamma}) \quad = \quad \sum_{\substack{\bar{\gamma}\subseteq\bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma}\in\mathcal{T}}} \bar{\gamma} \otimes \bar{\Gamma}/\bar{\gamma},$$

où la somme porte sur les sous-graphes couvrants spécifiés $\bar{\gamma} = (\gamma, \underline{j})$ localement $1PI$ (voir la définition 27), tels que le graphe contracté $(\Gamma/(\gamma, \underline{j}), \underline{i})$ appartient à la théorie $\mathcal{T}$. Ici $\underline{j}$ est un multi-indice qui repère le résidu de chacune des composantes connexes de γ. L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ est là encore obtenue en identifiant les graphes spécifiés sans arêtes internes à l'unité.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous nous intéressons aux structures extérieures. Les règles de Feynman associeront à chaque graphe une fonction qui dépend des moments associés à chaque demi-arête du graphe, avec les contraintes $p_e + p_{e'} = 0$ pour chaque arête interne (ee') et $\sum_{e\in st(v)} p_e = 0$ pour tout sommet v, où $st(v)$ est l'ensemble des demi-arêtes adjacentes à v. Les règles de Feynman Φ dépendent des types raffinés de sommets, mais ne dépendent pas de la spécification du graphe. Les types raffinés de sommets se combinent de la façon suivante : Par exemple, en théorie φ^3,  et  se combinent en l'arête [10] :



De même en QED nous avons :



et

$$\Phi(\ \text{}\ ) + \Phi(\ \text{}\ ) = \Phi(\ \text{}\ ).$$

Considérant les relations ci-dessus, nous pouvons choisir un seul type de sommet bivalent pour φ^3 de même en QED nous pouvons choisir l'arête électron, et éliminer le sommet bivalent pour l'arête photon : ce sont les conventions adoptées dans [39]. Nous avons choisi de ne pas considérer cette simplification, afin de suivre [10] de plus près.
Nous introduisons un semi-groupe de caractères G de $\widetilde{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}}$ à valeurs dans une certaine algèbre commutative $\mathcal{B}$, et un produit de convolution $\circledast$ sur G. Nous retrouvons alors la renormalisation decrite par A.Connes et D.Kreimer dans [10], en remplaçant $\mathcal{B}$ par $\mathcal{A} := \mathcal{B}([z^{-1}, z]])$ et en montrant que chaque élément de G admet une unique décomposition de Birkhoff pour le schéma minimal de renormalisation $\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+$, avec $\mathcal{A}_+ := \mathcal{B}[[z]]$ et $\mathcal{A}_- := z^{-1}\mathcal{B}[z^{-1}]$. L'interêt de la construction presentée ici est le caractère purement combinatoire de la bigèbre $\widetilde{\mathcal{H}_{\mathcal{T}}}$ et de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$, toute l'analyse étant deplacée dans l'algèbre-cible $\mathcal{A}$.

Dans le dernier chapitre nous nous intéressons aux règles de Feynman proprement dites, données par l'intégration de ces fonctions sur les moments intérieurs. Nous commençons par définir le dédoublement $\widetilde{\mathcal{D}_{\mathcal{T}}}$ de la bigèbre des graphes de Feynman spécifiés. C'est l'espace vectoriel engendré par les couples $(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma})$ où $\bar{\Gamma}$ est un graphe spécifié localement $1PI$ de la théorie $\mathcal{T}$, $\bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma}$ localement $1PI$ et $\bar{\Gamma}/\bar{\gamma}$ est un graphe spécifié de $\mathcal{T}$, et nous considérons le coproduit suivant :

$$\Delta(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = \sum_{\substack{\bar{\delta} \subseteq \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} (\bar{\Gamma}, \bar{\delta}) \otimes (\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}).$$

Nous définissons alors le produit de convolution $\divideontimes$ sur les éléments de l'algèbre de Hopf $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ à valeurs dans une algèbre d'endomorphismes munie d'un produit commutatif $\bullet$ compatible avec la composition $\circ$, qui prend en compte la dépendance en les moments extérieurs :

$$\varphi \divideontimes \psi := \diamond(\varphi \otimes \psi)\Delta,$$

où $\diamond$ désigne l'opposé du produit de composition $\circ$. Autrement dit, pour tous graphes spécifiés $\bar{\gamma}$, $\bar{\Gamma}$ tels que $\bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma}$ on a :

$$(\varphi \divideontimes \psi)(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = \sum_{\substack{\bar{\delta} \subseteq \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} \psi(\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}) \circ \varphi(\bar{\Gamma}, \bar{\delta}).$$

Nous retrouvons alors la renormalisation telle qu'elle est formulée par A. Smirnov [36, §8.5, 8.6], en adoptant l'approche d'A. Connes et D. Kreimer pour deux schémas de renormalisation : le schéma minimal de renormalisation et le schéma de développement de Taylor.
Nous nous intéressons ensuite aux intégrales de Feynman qui sont en général divergentes.

Nous utilisons une approche algébrique pour réinterpréter l'approche de Smirnov [36, §8] dans le formalisme de Connes-Kreimer, en utilisant l'algèbre de Hopf $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ et une algèbre-cible qui n'est pas commutative, en raison de la composition des opérateurs. Nous utilisons le procédé de la regularisation dimensionnelle pour construire les intégrales D-dimensionnelles, qui consiste à écrire les intégrales divergentes que nous avons à régulariser de manière à ce que la dimension de l'espace-temps physique d puisse être remplacée par un nombre complexe quelconque D. Nous suivons l'approche de P. Etingof [19] (voir aussi [33]). Soient alors V l'espace-temps de dimension d et Γ un graphe de Feynman avec m arêtes extérieures et $q_1, \cdots, q_m \in V$ les moments correspondants, et avec $n-m$ boucles ($n \geq m$). L'amplitude de ce graphe s'écrit sous la forme :

$$I_{(q_1 \cdots q_m)}(f) := \int_{V^{n-m}} f(q_1 \cdots q_n) dq_{m+1} \cdots dq_n.$$

Soient Γ, γ et δ trois graphes de Feynman tels que $\delta \subseteq \gamma \subseteq \Gamma$, on désigne par :

$$E := \mathcal{E}(\Gamma), \qquad F := \mathcal{E}(\Gamma/\delta) \quad \text{ et } \quad G := \mathcal{E}(\Gamma/\gamma) = \mathcal{E}(\Gamma/\delta \Big/ \gamma/\delta),$$

les espaces vectoriels engendrés par les demi-arêtes des trois graphes Γ, Γ/δ et Γ/γ respectivement. On désigne par S^2E^* de l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E, par $\bar{S}^2_+E^*$ le sous ensemble des formes bilinéaires semi-définies positives sur E, et par $S^2_+E^*$ le sous ensemble des formes bilinéaires définies positives sur E, et par $\mathcal{S}(\bar{S}^2_+E^*)$ et $\mathcal{S}(S^2E^*)$ respectivement le deux espaces de Schwartz des fonctions sur $\bar{S}^2_+E^*$ et S^2E^*. On adopte les notations analogues pour F et G. On considère le n-uplet $q := (q_1, \cdots, q_n)$, où $q_j \in \mathbb{R}^d$, comme un élément de l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{R}^d)$. Le m-uplet $(q_1, \cdots, q_m)$ n'est autre que la restriction $q_{|F} \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{R}^d)$. La forme bilinéaire $q^*(\beta) \in \bar{S}^2_+E^*$ est la tirée en arrière de $\beta \in (S^2_+\mathbb{R}^d)^*$. Nous définissons alors l'intégrale d'une fonction f définie sur $\bar{S}^2_+E^*$ par :

$$I^d\big|_{k^*\beta}(f) = \int_{\{q \in \mathrm{Hom}(E,\mathbb{R}^d)/q_{|F}=k\}} f(q^*\beta) dq.$$

Nous montrons que pour tout A dans $S^2_+E^*$, pour tout B dans S^2_+E et pour $\phi_B(A) := \exp(-\mathrm{tr}(AB))$ on a :

$$I^d\big|_C(\phi_B) = \pi^{(n-m)d/2} \exp(-\mathrm{tr}(C.B^{F^*})).(\det B_{F^\perp})^{-d/2}.$$

Nous montrons l'existence de l'intégrale D-dimensionnelle à un paramètre $(I^D)_{D\in\mathbb{C}} : \mathcal{S}(\bar{S}^2_+E^*) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathcal{S}(\bar{S}^2_+F^*))$ définie par :

$$I^D\big|_C(\phi_B) = \pi^{(n-m)D/2} \exp(-\mathrm{tr}(C.B^{F^*})).(\det B_{F^\perp})^{-D/2}.$$

Nous définissons alors l'intégrale $I^D_{\Gamma,\delta} : \mathcal{S}(\bar{S}^2_+E^*) \longrightarrow \mathcal{S}(\bar{S}^2_+F^*)$ pour tout $C \in S^2_+F^*$ et $f \in \mathcal{S}(\bar{S}^2_+E^*)$, par :

$$I^D_{\Gamma,\delta}(f)(C) := I^D\big|_C(f),$$

cette expression est holomorphe en D.
Nous montrons que pour tous graphes Γ, γ et δ tels que $\delta \subseteq \gamma \subseteq \Gamma$ on a :

$$I^D_{\Gamma,\gamma} = I^D_{\Gamma,\delta} \circ I^D_{\Gamma/\delta,\Gamma/\gamma}.$$

Soit $\mathcal{F}(\bar{S}^2_+E^*)$ l'espace de fonctions de type Feynman sur $\bar{S}^2_+E^*$ et par $\widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2_+E^*)$ l'espace de fonctions sur $\mathbb{C} \times \bar{S}^2_+E^*$, méromorphes en la première variable, égales à $I^D_{E',E}(g)$ pour une certaine fonction $g \in \mathcal{F}(\bar{S}^2_+E'^*)$, où E' est un espace vectoriel contenant E. L'intégrale de Feynman $\widetilde{I}^D_{\Gamma,\gamma}$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \widetilde{I}^D_{\Gamma,\gamma} : \widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2_+E^*) &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2_+F^*) \\ f &\longmapsto \widetilde{I}^D_{\Gamma,\delta}(f) := I^D_{E,F}(f), \end{aligned}$$

et s'étend en une fonction méromorphe de D.
Les règles de Feynman proprement dites sont définies pour $U = \mathcal{E}(\operatorname{res}\Gamma)$ par :

$$\widetilde{I}_{\Gamma,\Gamma}\big(\varphi(\Gamma)\big) \in \widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2_+U^*),$$

où $\varphi(\Gamma)$ est l'intégrande défini par la formule :

$$\varphi(\Gamma)(p) = \prod_{v\in\mathcal{V}(\Gamma)} g_v \prod_{\{e,\sigma(e)\},\sigma(e)\neq e} G_{e\sigma(e)}(p^*\beta(e,e)) \prod_{\sigma(e)=e} G_e(p^*\beta(e,e)),$$

où g_v est la constante de couplage associée à chaque sommet et $G_{e\sigma(e)}$ est un propagateur associée à chaque arête et qui tient compte de la théorie et de type de l'arête $(e\sigma(e))$.
Soit G le groupe des caractères de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ à valeurs dans une certaine algèbre commutative $\mathcal{A}$ (voir [§6.1 ; §6.3]), munit du schéma minimal de renormalisation. Nous montrons que chaque élément φ de G admet une unique décomposition de Birkhoff compatible avec le schéma de renormalisation choisi :

$$\varphi = \varphi_-^{\circledast -1} \circledast \varphi_+,$$

avec :

$$\varphi_-(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) = -P\Big(\varphi(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) + \sum_{\substack{\bar{\delta}\subsetneq\bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta}\in\mathcal{T}}} \varphi(\bar{\Gamma}/\bar{\delta},\bar{\gamma}/\bar{\delta}) \circ \varphi_-(\bar{\Gamma},\bar{\delta})\Big),$$

$$\varphi_+(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) = (I-P)\Big(\varphi(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) + \sum_{\substack{\bar{\delta}\subsetneq\bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta}\in\mathcal{T}}} \varphi(\bar{\Gamma}/\bar{\delta},\bar{\gamma}/\bar{\delta}) \circ \varphi_-(\bar{\Gamma},\bar{\delta})\Big).$$

Ces formules constituent le cadre algébrique de l'approche de Smirnov [36, §8.2]. Les règles de Feynman définissent alors un élément $\widetilde{I}$ de G :

$$\widetilde{I} : \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathcal{A} \quad (\Gamma,\gamma) \longmapsto \widetilde{I}(\Gamma,\gamma) := \widetilde{I}^D_{\Gamma,\gamma},$$

$$\text{tel que :} \qquad \widetilde{I} = \widetilde{I}_-^{\circledast -1} \circledast \widetilde{I}_+,$$

où $\widetilde{I}_-$ est le caractère des contretermes et $\widetilde{I}_+$ est le caractère renormalisé évalué en $D = d$.

Chapitre 1

Algèbres de Hopf et renormalisation

Nous donnons dans ce chapitre des généralités sur les algèbres de Hopf et la renormalisation. Nous commençons par définir les notions d'algèbre, cogèbre, bigèbre, produit de convolution, algèbre de Hopf et antipode en donnant quelques exemples à la fin, ensuite nous décrivons le schema de renormalisation ainsi que la décomposition de Birkhoff d'un caractère d'une algèbre de Hopf à valeurs dans une algèbre commutative. Nous utilisons dans ce chapitre les réferences suivantes [1],[27], [21], [37] et [24]. Dans toute la suite, on désigne par k un corps de caractéristique nulle.

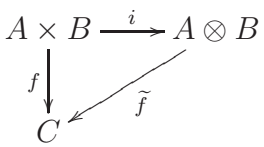
1 Algèbres, Cogèbres et Bigèbres

1.1 Produit tensoriel

Soit A et B deux espaces vectoriels sur k. Le produit tensoriel $A \otimes B$ est un espace vectoriel sur k qui satisfait la propriété universelle suivante : il existe une application bilinéaire

$$\begin{aligned} i : A \times B &\longrightarrow A \otimes B \\ (a, b) &\longmapsto a \otimes b \end{aligned}$$

telle que pour tout k-espace vectoriel C et pour toute application bilinéaire $f : A \times B \longrightarrow C$ il y a une unique application linéaire $\widetilde{f} : A \otimes B \longrightarrow C$ telle que $f = \widetilde{f} \circ i$, i.e le diagramme suivant est commutatif :



Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de A et $(f_j)_{j \in J}$ est une base de B, alors $(e_i \otimes f_j)_{i \in I, j \in J}$ est une base de $A \otimes B$.

1.2 Algèbres et modules

Définition 1. *Une k-algèbre est un k-espace vectoriel $\mathcal{A}$ muni d'une application bilinéaire :*

$$m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

qui est associative i.e :

$$m \circ (m \otimes Id) = m \circ (Id \otimes m). \tag{1.1}$$

L'associativité est exprimée encore par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{Id \otimes m} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\ \downarrow{\scriptstyle m \otimes Id} & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow[m]{} & \mathcal{A} \end{array}$$

L'algèbre $\mathcal{A}$ est unitaire si de plus elle est munie d'une unité $\mathbf{1}$ qui induit une application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} u : k & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \mathbf{1} \end{array}$$

satisfaisant :

$$m \circ (u \otimes Id) = Id = m \circ (Id \otimes u), \tag{1.2}$$

qui se traduit encore par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} k \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{u \otimes Id} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xleftarrow{Id \otimes u} & \mathcal{A} \otimes k \\ & {\scriptstyle Id} \searrow & \downarrow{\scriptstyle m} & \swarrow {\scriptstyle Id} & \\ & & \mathcal{A} & & \end{array}$$

Proposition 1. *L'algèbre $\mathcal{A}$ est commutative si et seulement si :*

$$m \circ \tau = m, \tag{1.3}$$

où $\tau : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ est la volte, définie par $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$.

Algèbre tensorielle

Pour tout $n \geq 1$, on note $V^{\otimes n} = V \otimes \cdots \otimes V$. Par convention $V^{\otimes 0} = k$. Les éléments de $V^{\otimes n}$ sont des combinaisons linéaires de tenseurs de longueur n d'éléments de V. L'algèbre tensorielle de V est défini par :

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}. \tag{1.4}$$

Les éléments de $T(V)$ sont des combinaisons linéaires de tenseurs d'éléments de V de longueur quelconque. Nous definissons une structure d'algèbre sur $T(V)$, le produit étant donné par la concatenation.

$$\begin{array}{rcl} T(V) \times T(V) & \longrightarrow & T(V) \\ (v_1 \cdots v_n, w_1 \cdots w_k) & \longmapsto & v_1 \cdots v_n w_1 \cdots w_k. \end{array}$$

Remarque 1. *Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux algèbres unitaires, on définit une structure d'algèbre unitaire sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ de la manière suivante :*

$$(x_1 \otimes y_1).(x_2 \otimes y_2) = x_1 x_2 \otimes y_1 y_2$$

L'unité $\mathbf{1}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}$ est donnée par $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$ et la multiplication est donnée par :

$$m_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} = (m_{\mathcal{A}} \otimes m_{\mathcal{B}}) \circ \tau_{23},$$

où $\tau_{23} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ est défini en permutant les termes intermédiaires :

$$\tau_{23}(x_1 \otimes y_1 \otimes x_2 \otimes y_2) = x_1 \otimes x_2 \otimes y_1 \otimes y_2.$$

Définition 2. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux algèbres et $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ une application linéaire. On dira que Φ est un morphisme d'algèbres unitaires si :*

$$m_{\mathcal{B}} \circ (\Phi \otimes \Phi) = \Phi \circ m_{\mathcal{A}}, \tag{1.5}$$

c'est-à-dire si le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi\otimes\Phi} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \\ {\scriptstyle m_{\mathcal{A}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_{\mathcal{B}}} \\ \mathcal{A} & \xrightarrow[\Phi]{} & \mathcal{B} \end{array}$$

et si :

$$\Phi \circ u_{\mathcal{A}} = u_{\mathcal{B}},$$

c'est-à-dire si le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{u_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \\ & {\scriptstyle u_{\mathcal{B}}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ & & \mathcal{B} \end{array}$$

Définition 3. *Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, m, u)$ une algèbre unitaire.*

1. *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ est dit sous-algèbre unitaire de $\mathcal{A}$ si :*

$$m(\mathcal{I} \otimes \mathcal{I}) \subset \mathcal{I} \text{ et } u(k) \subset \mathcal{I}.$$

2. *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ est dit idéal à gauche de $\mathcal{A}$ si :*

$$m(\mathcal{A} \otimes \mathcal{J}) \subset \mathcal{J}.$$

3. *un sous espace vectoriel $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ est dit idéal à droite de $\mathcal{A}$ si :*

$$m(\mathcal{J} \otimes \mathcal{A}) \subset \mathcal{J}.$$

4. *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ est dit idéal bilatère de $\mathcal{A}$ si :*

$$m(\mathcal{A} \otimes \mathcal{J} + \mathcal{I} \otimes \mathcal{A}) \subset \mathcal{I}.$$

5. *Un $\mathcal{A}$-module à gauche est un k-espace vectoriel $\mathcal{M}$ muni d'une application*

$$\alpha : \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

satisfaisant les deux axiomes suivants :

$$\alpha \circ (m \otimes Id) = \alpha \circ (Id \otimes \alpha), \tag{1.6}$$

c'est-à-dire si le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{Id \otimes \alpha} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \\ {\scriptstyle m \otimes Id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathcal{M} \end{array}$$

et :

$$\alpha \circ (u \otimes Id) = Id_{\mathcal{M}}. \tag{1.7}$$

c'est-à-dire si le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} k \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{u \otimes Id_{\mathcal{M}}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \\ & \searrow^{Id} & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ & & \mathcal{M} \end{array}$$

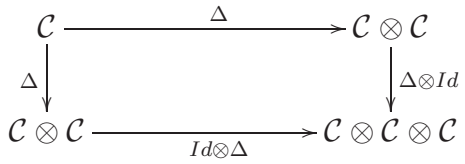
Un $\mathcal{A}$-module à droite est défini d'une manière similaire en remplacant $\mathcal{A} \otimes \mathcal{M}$ par $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$.

1.3 Cogèbres

Définition 4. *Une k-cogèbre est un k-espace vectoriel $\mathcal{C}$ muni d'une application linéaire, qu'on l'appelle coproduit, $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ qui est coassociative i.e :*

$$(\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta. \tag{1.8}$$

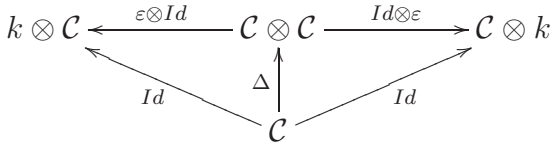
La coassociativité est donnée encore par le diagramme commutatif suivant :



Une cogèbre est co-unitaire si de plus elle est munie d'une co-unité $\varepsilon : \mathcal{C} \longrightarrow k$ satisfaisant :

$$(\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta = Id_{\mathcal{C}} = (Id \otimes \varepsilon) \circ \Delta. \tag{1.9}$$

qui se traduit encore par la commutativité du diagramme suivant



Remarque 2. *Remarquons que les axiomes des cogèbres sont obtenus en dualisant les axiomes des algèbres c'est-à-dire en inversant les flèches des diagrammes commutatifs.*

Notation de Sweedler. Le coproduit d'un élément est donc une somme finie d'éléments indécomposables. Pour décrire le coproduit, on utilise la notation suivante :

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_1 \otimes x_2. \tag{1.10}$$

Définition 5. *La cogèbre $\mathcal{C}$ est cocommutative si et seulement si :*

$$\tau \circ \Delta = \Delta$$

où $\tau : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ est la volte.

Remarque 3. *En utilisant la notation de Sweedler :*

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_1 \otimes x_2,$$

la coassociativité de Δ s'écrit :

$$\sum_{(x)} (x_1)_1 \otimes (x_1)_2 \otimes x_2 = \sum_{(x)} x_1 \otimes (x_2)_1 \otimes (x_2)_2$$

et la cocommutativité s'écrit :

$$\sum_{(x)} x_1 \otimes x_2 = \sum_{(x)} x_2 \otimes x_1$$

A tout espace vectoriel V, nous pouvons associer sa cogèbre tensorielle $T^c(V)$, isomorphe à $T(V)$ en tant qu'espace vectoriel. Le coproduit est donné par la déconcatenation :

$$\Delta(v_1 \cdots v_n) = \sum_{p=0}^{n} v_1 \cdots v_p \bigotimes v_{p+1} \cdots v_n. \tag{1.11}$$

La co-unité est la projection canonique sur k.

Remarque 4. *Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux cogèbres co-unitaires, on définit une structure de cogèbre co-unitaire sur $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ de la manière suivante : le coproduit est donné par*

$$\Delta_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}} = \tau_{23} \circ (\Delta_{\mathcal{C}} \otimes \Delta_{\mathcal{D}}), \tag{1.12}$$

où τ_{23} es la volte définie en permutant les termes intermédiaires et la co-unité $\varepsilon_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}$ est donnée par :

$$\varepsilon_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} = \varepsilon_{\mathcal{A}} \otimes \varepsilon_{\mathcal{B}}$$

Définition 6. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux cogèbres et $\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ une application linéaire. On dira que Φ est un morphisme de cogèbres co-unitaires si :*

$$\Delta_{\mathcal{D}} \circ \Phi = (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{C}}, \tag{1.13}$$

c'est-à-dire si le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{D} \\ {\scriptstyle \Delta_{\mathcal{C}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{\mathcal{D}}} \\ \mathcal{C}\otimes\mathcal{C} & \xrightarrow[\Phi\otimes\Phi]{} & \mathcal{D}\otimes\mathcal{D} \end{array}$$

et si :

$$\varepsilon_{\mathcal{D}} \circ \Phi = \varepsilon_{\mathcal{C}}, \tag{1.14}$$

c'est-à-dire si le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{D} \\ & {\scriptstyle \varepsilon_{\mathcal{C}}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{\mathcal{D}}} \\ & & k \end{array}$$

Définition 7. *Soit $\mathcal{C}$ une cogèbre.*

1. *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}$ est dit sous-cogèbre de $\mathcal{C}$ si :*

$$\Delta(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$$

2. *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}$ est dit co-idéal à gauche de $\mathcal{C}$ si :*

$$\Delta(\mathcal{V}) \subset \mathcal{C} \otimes \mathcal{V}.$$

3. *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}$ est dit co-idéal à droite de $\mathcal{C}$ si :*

$$\Delta(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V} \otimes \mathcal{C}.$$

4. *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{J} \subset \mathcal{C}$ est dit co-idéal bilatère de $\mathcal{C}$ si :*

$$\Delta(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V} \otimes \mathcal{C} + \mathcal{C} \otimes \mathcal{V},$$

et

$$\varepsilon(\mathcal{V}) = (0).$$

5. *Un $\mathcal{C}$-comodule à gauche est un k-espace vectoriel $\mathcal{M}$ muni d'une application*

$$\Psi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{M},$$

satisfaisant les deux axiomes suivants :

$$(\Delta \otimes Id_{\mathcal{M}}) \circ \Psi = (Id \otimes \Psi) \circ \Psi \tag{1.15}$$

et

$$(\varepsilon \otimes Id_{\mathcal{M}}) \circ \Psi = Id_{\mathcal{M}}. \tag{1.16}$$

c'est-à-dire les deux diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{M} & \xleftarrow{Id \otimes \Psi} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{M} \\ {\scriptstyle \Delta \otimes Id_{\mathcal{M}}} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \Psi} \\ \mathcal{C} \otimes \mathcal{M} & \xleftarrow[\Psi]{} & \mathcal{M} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} k \otimes \mathcal{M} & \xleftarrow{\varepsilon \otimes Id_{\mathcal{M}}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \\ & \nwarrow^{Id} & \uparrow {\scriptstyle \Psi} \\ & & \mathcal{M} \end{array}$$

En termes de la notation de Sweedler la coaction Ψ s'écrit sous la forme :

$$\Psi(x) = \sum_{(x)} x_1 \otimes x_0,$$

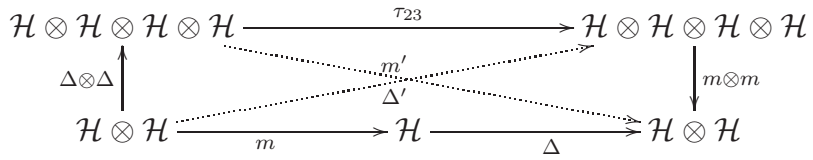
avec $x_0 \in \mathcal{M}$ et $x_1 \in \mathcal{C}$ et la propriété de comodule à gauche s'écrit :

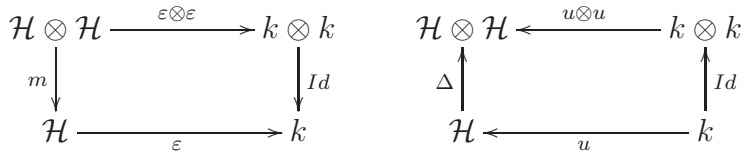
$$\sum_{(x)} (x_1)_1 \otimes (x_1)_2 \otimes (x_0) = \sum_{(x)} (x_1) \otimes (x_0)_1 \otimes (x_0)_0.$$

Un $\mathcal{C}$-comodule à droite est défini d'une manière similaire en remplacant $\mathcal{C} \otimes \mathcal{M}$ par $\mathcal{M} \otimes \mathcal{C}$.

1.4 Bigèbres

Définition 8. *Une bigèbre unitaire co-unitaire est un k-espace vectoriel $\mathcal{H}$ muni d'une structure d'algèbre unitaire $(\mathcal{H}, m, u)$ et d'une structure de cogèbre co-unitaire $(\mathcal{H}, \Delta, \varepsilon)$ avec une compatibilité entre les lois donnée par le fait que Δ et ε sont des morphismes d'algèbres unitaires ou, de manière équivalente m et u sont des morphismes de cogèbres co-unitaires. La compatibilité entre les lois peut se traduit par les diagrammes commutatifs suivants :*





Définition 9. *Soit $\mathcal{H}$ une bigèbre et x un élément $\mathcal{H}$.*

1. *x est dit élément de type groupe ou "grouplike", si x non nul et $\Delta(x) = x \otimes x$.*
2. *x est dit élément primitif si, $\Delta(x) = \mathbf{1} \otimes x + x \otimes \mathbf{1}$.*
   L'ensemble des éléments primitifs de $\mathcal{H}$ est noté $Prim(\mathcal{H})$.

Définition 10. *Soit $\mathcal{H}$ une bigèbre.*

1. *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ est une sous-bigèbre de $\mathcal{H}$ si $\mathcal{I}$ est un sous-algèbre et une sous-cogèbre de $\mathcal{H}$.*
2. *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ est un bi-idéal de $\mathcal{H}$ si $\mathcal{J}$ est un idéal et un co-idéal de $\mathcal{H}$.*

Définition 11. *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux bigèbres et $\Phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$. On dira que Φ est un morphisme de bigèbres si Φ est un morphisme d'algèbres et de cogèbres.*

2 Algèbres de Hopf graduées connexes

2.1 Convolution et algèbres de Hopf

Proposition 2. *Soit $\mathcal{C} = (\mathcal{C}; \Delta; \varepsilon)$ une cogèbre co-unitaire et $\mathcal{A} = (\mathcal{A}; m; u)$ une algèbre unitaire. L'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est munie d'une structure d'algèbre de la manière suivante : si $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$,*

$$f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta. \tag{1.17}$$

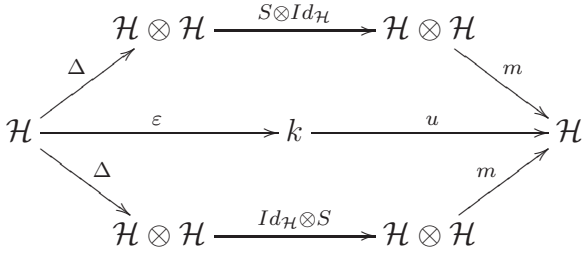
Autrement dit, pour tout $x \in \mathcal{C}$:

$$f * g(x) = \sum_{(x)} f(x_1)g(x_2). \tag{1.18}$$

Ce produit est appelé produit de convolution. L'unité est l'application $i : x \longrightarrow \varepsilon(x)\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$.

Preuve. L'associativité du produit de convolution $*$ est une conséquence immédiate de l'associativité du produit m et la coassociativité de coproduit Δ. □

Définition 12. *Soit $\mathcal{H}$ une bigèbre. On dira que $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf si $Id_{\mathcal{H}}$ possède un inverse dans l'algèbre de convolution* $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. *L'unique inverse de $Id_{\mathcal{H}}$ est appelé antipode de $\mathcal{H}$ et il est noté en général S. Autrement dit, $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf s'il existe une application linéaire $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ telle que le diagramme suivant commute :*



Autrement dit, pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$\sum_{(x)} S(x_1)x_2 = \varepsilon(x)\mathbf{1} = \sum_{(x)} x_1 S(x_2).$$

Définition 13. *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf et $\mathcal{I}$ un sous-espace de $\mathcal{H}$.*

1. *On dira que $\mathcal{I}$ est une sous-algèbre de Hopf de $\mathcal{H}$ si c'est une sous-bigèbre de $\mathcal{H}$ et $S(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.*
2. *On dira que $\mathcal{I}$ est un idéal de Hopf de $\mathcal{H}$ si c'est un bi-idéal et si $S(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.*

Définition 14. *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux algèbres de Hopf. Soit $\Phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ une application linéaire. On dira que Φ est un morphisme d'algèbres de Hopf si Φ est un morphisme de bigèbres et $\Phi \circ S_{\mathcal{H}} = S_{\mathcal{H}'} \circ \Phi$.*

Remarque 5. *La propriété $\Phi \circ S_{\mathcal{H}} = S_{\mathcal{H}'} \circ \Phi$ peut être éliminée, en fait si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux algèbres de Hopf et si $\Phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ est un morphisme de bigèbres, alors automatiquement on a $\Phi \circ S_{\mathcal{H}} = S_{\mathcal{H}'} \circ \Phi$.*

Proposition 3. *([37]) Soit $(\mathcal{H}, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf, alors on a :*

1. *$S \circ u = u$ et $\varepsilon \circ S = \varepsilon$.*

2. *S est un antimorphisme d'algèbres et un antimorphisme de cogèbres, i.e. si τ est la volte on a :*

$$m \circ (S \otimes S) \circ \tau = S \circ m, \qquad \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ S.$$

3. *Si $\mathcal{H}$ est commutative ou cocommutative, alors $S^2 = Id_{\mathcal{H}}$.*

Pour une preuve détaillée de cette proposition, voir [37], [27] ou [25].

Proposition 4. *([37]) Soit $(\mathcal{H}, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf.*

1. *Si x est un élément primitif de $\mathcal{H}$ alors $\varepsilon(x) = 0$ et $S(x) = -x$.*
2. *$Prim(\mathcal{H})$ est une algèbre de Lie.*

Preuve. 1. Soit $x \in Prim(\mathcal{H})$ alors on a :

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x) &= (\varepsilon \otimes \varepsilon)(x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) \\ &= 2\varepsilon(x)\varepsilon(\mathbf{1}) \\ &= 2\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Comme on a : $(\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x) = \varepsilon(x)$, on en déduit que $\varepsilon(x) = 0$.
De plus on a :

$$m(S \otimes Id) \circ \Delta(x) = u \circ \varepsilon(x)$$

Donc : $S(x) + x = 0$, et par suite : $S(x) = -x$.

2. Soit $x, y \in Prim(\mathcal{H})$. Il suffit de montrer que $[x, y] = xy - yx$ est un élément primitif.

$$\begin{aligned}\Delta([x,y]) &= \Delta(xy - yx) = \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x) \\ &= (x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x)(y \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes y) - (y \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes y)(x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) \\ &= xy \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes xy - yx \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes yx \\ &= (xy - yx) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (xy - yx).\end{aligned}$$

Ce qui prouve la proposition.

□

2.2 Graduation

Définition 15. *Une algèbre de Hopf graduée sur k est un k-espace vectoriel gradué :*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n \tag{1.19}$$

muni d'un produit $m : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, un coproduit $\Delta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, le tout verifiant les axiomes d'une algèbre de Hopf [37], et tel que :

$$m(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_q) \subset \mathcal{H}_{p+q},$$

$$\Delta(\mathcal{H}_n) \subset \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_q,$$

2.3 Dual gradué

Soit $V = \bigoplus_{n\geq 0} V_n$ un espace gradué. Soit $n \geq 0$. Alors V_n^* s'identifie au sous espace suivant de V^* :

$$V_n^* \approx \{f \in V^* / f(V_k) = (0) \ \ si\ k \neq n\}.$$

Par la suite, on identifiera les deux et on pourra écrire $V_n^* \subseteq V^*$.

Définition 16. *Soit V un espace gradué. Le dual gradué de V est le sous-espace suivant de V^* :*

$$V^\circ := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n^*.$$

Remarque 6. *Lorsque chaque V_n est de dimension finie, $V^{\circ\circ}$ est isomorphe à V comme espace gradué.*

2.4 Connexité

Définition 17. *Une algèbre de Hopf graduée $\mathcal{H}$ sur k est dite connexe si sa partie homogène de degré zéro est de dimension un, c'est-à-dire réduite à $k.\mathbf{1}$, où $\mathbf{1} = u(1)$ désigne l'unité.*

Les algèbres de Hopf graduées connexes (commutatives ou non) sont particulièrement bien adaptées aux raisonnements par récurrence sur le degré. Cela vient du fait que pour tout élément x homogène de degré n dans $\mathcal{H}$ on peut écrire en utilisant la notation de Sweedler :

$$\Delta x = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x + \sum_{(x)} x' \otimes x'', \tag{1.20}$$

où les x' et x'' sont homogènes de degré compris entre 1 et $n-1$. En particulier l'antipode est donné gratuitement par l'une des deux formules de récurrence ci-dessous :

$$S(x) = -x - \sum_{(x)} S(x')x'' \tag{1.21}$$

$$S(x) = -x - \sum_{(x)} x'S(x''). \tag{1.22}$$

La donnée d'une telle algèbre de Hopf $\mathcal{H}$, lorsqu'elle est de plus commutative, équivaut à la donnée du schéma en groupes pro-unipotents qui à toute algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ associe le groupe $G_{\mathcal{A}}$ des caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$. Le théorème de Cartier-Milnor-Moore permet de récupérer l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ comme le dual gradué de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_k)$ où $\mathfrak{g}_k$ est l'algèbre de Lie du groupe G_k, qui peut se voir comme l'ensemble des caractères infinitésimaux de $\mathcal{H}$ à valeurs dans k.

2.5 Exemples d'algèbres de Hopf

1. Soit G un groupe. Soit kG l'espace vectoriel engendré par les éléments de G. Le produit de G s'étend en une application bilinéaire de $kG \otimes kG$ sur kG. Ainsi kG est une algèbre, l'unité est donnée par l'élément neutre de G.
   On définit une structure de cogèbre co-unitaire sur kG pour tout $g_i \in G$ par :
   $$\Delta\Big(\sum_i \lambda_i g_i\Big) = \sum_i \lambda_i g_i \otimes g_i.$$
   Sa counité est donnée par :
   $$\varepsilon\Big(\sum_i \lambda_i g_i\Big) = \lambda_i$$
   De plus les lois vérifient bien les axiomes de compatibilité :
   $$\begin{aligned}
   \Delta\Big(\sum_i \lambda_i g_i \sum_j \mu_j h_j\Big) &= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j g_i h_j \otimes \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j g_i h_j \\
   &= \Big(\sum_i \lambda_i g_i \otimes \sum_i \lambda_i g_i\Big)\Big(\sum_j \mu_j h_j \otimes \sum_j \mu_j h_j\Big) \\
   &= \Delta\Big(\sum_i \lambda_i g_i\Big)\Delta\Big(\sum_j \mu_j h_j\Big), \\
   \varepsilon\Big(\sum_i \lambda_i g_i \sum_j \mu_j h_j\Big) &= \varepsilon\Big(\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j g_i h_j\Big) \\
   &= \lambda_i \mu_j = \varepsilon\Big(\sum_i \lambda_i g_i\Big)\varepsilon\Big(\sum_j \mu_j h_j\Big).
   \end{aligned}$$
   L'antipode de kG est défini pour tout $g \in G$ par :
   $$S(g) = g^{-1}.$$
2. Soit V un espace vectoriel et $T(V)$ l'algèbre tensorielle. il existe une structure d'algèbre de Hopf cocommutative définie par :
   $$\Delta(x) = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x \ \text{ pour tout } \ x \in V.$$
   La co-unité est défini par :
   $$\varepsilon(x) = 0 \ \text{ pour } \ x \in V.$$
   L'antipode est : $S(x_1 \cdots x_n) = (-1)^n x_n \cdots x_1$.
3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. L'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, notée $U(\mathfrak{g})$, est le quotient de $T(\mathfrak{g})$ par l'ideal engendré par $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$.
   $$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\big\langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y]\big\rangle.$$
   La structure de l'algèbre de Hopf sur $U(\mathfrak{g})$ est définie par :
   $$\Delta(x) = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x \ \ , \varepsilon(x) = 0 \ \text{ et } S(x) = -x.$$

3 Décomposition de Birkhoff et Renormalisation

Nous décrivons dans cette paragraphe la renormalisation de Connes-Kreimer dans le contexte des algèbres de Hopf ([10], [9] , [26]). Chaque caractère d'une algèbre de Hopf dans une algèbre commutative $\mathcal{A}$, munie d'un schéma de renormalisation, i.e d'une décomposition en somme directe de deux sous algèbres $\mathcal{A}_-$ et $\mathcal{A}_+$, admet une unique décomposition de Birkhoff $\varphi = \varphi_-^{*-1} * \varphi_+$ compatible avec le schéma de renormalisation choisi. Nous revenons à ce procedé avec plus de détails dans le contexte des algèbres de Hopf de graphes dans les prochains chapitres.

3.1 Groupe des caractères et algèbre de Lie des caractères infinitésimaux

Définition 18. *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf et $\mathcal{A}$ une algèbre commutative. Un caractère de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est un morphisme d'algèbre $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ i.e : $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ et pour tout x, $y \in \mathcal{H}$ on a :*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \tag{1.23}$$

Proposition 5. *L'ensemble des caractère de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ forme un groupe pour le produit de convolution, noté G. Pour tout $\varphi \in G$, l'inverse est :*

$$\varphi^{*-1} = \varphi \circ S. \tag{1.24}$$

Preuve. Soient φ et ψ deux éléments de G et soient x et y deux éléments de $\mathcal{H}$. Pour prouver la première partie de la proposition nous utilisons le fait que le coproduit Δ de $\mathcal{H}$ est un morphisme d'algèbres, ainsi que la commutativité de $\mathcal{A}$. On a :

$$(\varphi * \psi)(\mathbf{1}) = \varphi(\mathbf{1})\psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}.$$

De plus :

$$\begin{aligned}
(\varphi * \psi)(xy) &= \sum_{(x)(y)} \varphi(x_1 y_1)\psi(x_2 y_2) \\
&= \sum_{(xy)} \varphi(x_1)\varphi(y_1)\psi(x_2)\psi(y_2) \\
&= \sum_{(xy)} \varphi(x_1)\psi(x_2)\varphi(y_1)\psi(y_2) \\
&= (\varphi * \psi)(x)(\varphi * \psi)(y).
\end{aligned}$$

Vérifions maintenant que $\varphi \circ S$ appartient à G :

$$\begin{aligned}(\varphi \circ S)(xy) &= \varphi(S(y)S(x)) \\ &= \varphi(S(y))\varphi(S(x)) \\ &= \varphi \circ S(y)\varphi \circ S(x) \\ &= \varphi \circ S(x)\varphi \circ S(y).\end{aligned}$$

Donc $\varphi \circ S \in G$. Prouvons maintenant la deuxième partie de la proposition :

$$\begin{aligned}(\varphi \circ S) * \varphi(x) &= \sum_{(x)} \varphi(S(x_1))\varphi(x_2) \\ &= \sum_{(x)} \varphi(S(x_1)x_2) \\ &= \varphi(\sum_{(x)} S(x_1)x_2) \\ &= \varepsilon(x)\varphi(\mathbf{1}) \\ &= \varepsilon(x)\mathbf{1}.\end{aligned}$$

De manière analogue, $\varphi * (\varphi \circ S)(x) = \varepsilon(x)\mathbf{1}$, donc $\varphi^{*-1} = \varphi \circ S$. □

Définition 19. *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf et soit $\mathcal{A}$ une algèbre commutative. Un caractère infinitésimal de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est une application linéaire $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ telle que $\varphi(\mathbf{1}) = 0$ et pour tout x, $y \in \mathcal{H}$ on a :*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)e(y) + e(x)\varphi(y), \tag{1.25}$$

où $e = u \circ \varepsilon$.

Proposition 6. *L'ensemble des caractères infinitésimaux de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ forme une algèbre de Lie, notée $\mathfrak{g}$, pour le crochet induit par le produit de convolution défini pour tout $\varphi, \psi \in \mathfrak{g}$ par :*

$$\big[\varphi, \psi\big] = \varphi * \psi - \psi * \varphi.$$

Preuve. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathfrak{g}$ et soient x et y deux éléments de $\mathcal{H}$. Il suffit de montrer que $\big[\varphi, \psi\big]$ est un caractère infinitésimal, c'est-à-dire :

$$\big[\varphi, \psi\big](xy) = \varphi * \psi(xy) - \psi * \varphi(xy).$$

Calculons tout d'abord $\varphi * \psi(xy)$.

$$\begin{aligned}
\varphi * \psi(xy) &= \sum_{(xy)} \varphi(x_1 y_1)\psi(x_2 y_2) \\
&= \sum_{(xy)} \big(\varphi(x_1)e(y_1) + \varphi(y_1)e(x_1)\big)\big(\psi(x_2)e(y_2) + \psi(y_2)e(x_2)\big) \\
&= \sum_{(xy)} \big(\varphi(x_1)\psi(x_2)e(y_1)e(y_2) + \varphi(x_1)e(x_2)\psi(y_2)e(y_1)\big) \\
&+ \sum_{(xy)} \big(\varphi(y_1)e(y_2)\psi(x_2)e(x_1) + \varphi(y_1)\psi(y_2)e(x_2)e(x_1)\big) \\
&= \varphi * \psi(x)e(y) + \varphi(x)\psi(y) + \varphi(y)\psi(x) + \varphi * \psi(y)e(x).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\psi * \varphi(xy) = \psi * \varphi(x)e(y) + \psi(x)\varphi(y) + \psi(y)\varphi(x) + \psi * \varphi(y)e(x).$$

D'où :

$$\big[\varphi, \psi\big](xy) = \Big(\varphi * \psi - \psi * \varphi\Big)(x)e(y) + \Big(\varphi * \psi - \psi * \varphi\Big)(y)e(x),$$

et par suite $\big[\varphi, \psi\big]$ est un caractère infinitésimal. □

3.2 Schéma de renormalisation et décomposition de Birkhoff

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf graduée connexe. Nous pouvons maintenant expliquer comment renormaliser un caractère φ de $\mathcal{H}$: il faut pour cela que φ soit à valeurs dans une algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ munie d'un schéma de renormalisation, c'est-à-dire d'une décomposition :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+, \tag{1.26}$$

où $\mathcal{A}_-$ et $\mathcal{A}_+$ sont deux sous-algèbres de $\mathcal{A}$, avec $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_+$.

L'exemple le plus utilisé de schéma de renormalisation est donné par le schéma minimal qui correspond au cas où $\mathcal{A}$ est l'algèbre (sur $k = \mathbb{C}$) des fonctions méromorphes d'une variable, $\mathcal{A}_+$ est la sous-algèbre des fonctions qui sont holomorphes en un z_0 fixé, et $\mathcal{A}_-$ est la sous-algèbre des polynômes en $(z - z_0)^{-1}$ sans terme constant.

L'espace des applications linéaires de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{A}$ est muni du produit de convolution, donné par :

$$\varphi * \psi = m_{\mathcal{A}} \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta. \tag{1.27}$$

On a déjà montré que l'espace des caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est un groupe pour le produit de convolution. L'élément neutre e est donné par $e(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ et $e(x) = 0$ si x est homogène de degré ≥ 1. L'inverse est donné par la composition à droite avec l'antipode :

$$\varphi^{*-1} = \varphi \circ S. \tag{1.28}$$

Le théorème ci-dessous donne la décompostion de Birkhoff d'un tel caractère φ.

Théorème 1. *Soit φ caractère d'une algèbre de Hopf graduée connexe $\mathcal{H}$ à valeurs dans une algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ munie d'un schéma de renormalisation.*

1. *Chaque caractère φ admet une unique décomposition de Birkhoff :*

$$\varphi = \varphi_-^{*-1} * \varphi_+ \tag{1.29}$$

compatible avec le schéma de renormalisation choisi, c'est-à-dire telle que φ_+ prenne ses valeurs dans $\mathcal{A}_+$ et telle que $\varphi_-(x) \in \mathcal{A}_-$ pour tout x homogène de degré ≥ 1. Les composantes φ_+ et φ_- sont données par des formules récursives suivantes :

$$\varphi_-(x) = -\pi\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\right), \tag{1.30}$$

$$\varphi_+(x) = (I-\pi)\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\right), \tag{1.31}$$

où π la projection sur $\mathcal{A}_-$ parallèlement à $\mathcal{A}_+$.

2. *Les composantes φ_+ et φ_- sont encore des caractères. On appelle $\varphi_+(x)$ le caractère renormalisé et $\varphi_-(x)$ le caractère des contretermes.*

Preuve. 1. Le fait que φ_+ prenne ses valeurs dans $\mathcal{A}_+$ et que $\varphi_-(x) \in \mathcal{A}_-$ est immédiat par définition de projection π, et on peut vérifier que $\varphi_+ = \varphi_- \circledast \varphi$ à partir des formules récursives (1.30) et (1.31) :

$$\begin{aligned}
\varphi_+(x) &= (I-\pi)\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\right) \\
&= \varphi(x) - \pi\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\right) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'') \\
&= \varphi(x) + \varphi_-(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'') \\
&= \varphi_- * \varphi(x).
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que cette décomposition est unique. On suppose que φ admet deux décompositions c-à-d :

$$\varphi(x) = \varphi_-^{-1} * \varphi_+ = \psi_-^{-1} * \psi_+.$$

Donc on obtient l'égalité suivante : $\varphi_+ * \psi_+^{-1} = \varphi_- * \psi_-^{-1}$. Comme pour tout $x \in \mathcal{H}$ on a : $\varphi_+ * \psi_+^{-1}(x) \in \mathcal{A}_+$ et $\varphi_- * \psi_-^{-1}(x) \in \mathcal{A}_-$. Alors :

$$\varphi_+ * \psi_+^{-1} = \varphi_- * \psi_-^{-1} = e,$$

et par suite : $\varphi_+ = \psi_+$ et $\varphi_- = \psi_-$. D'où l'unicité de la décomposition de Birkhoff.

2. On se limite à montrer que φ_- est un caractère, $\varphi_+ = \varphi_- \circledast \varphi$ l'etant alors automatiquement. Ceci decoulera du fait que la projection π vérifie la propriété de Rota-Baxter [14] :

$$\pi(a)\pi(b) = \pi(\pi(a)b + a\pi(b) - ab) \tag{1.32}$$

On suppose que $\varphi_-(xy) = \varphi_-(x)\varphi_-(y)$ pour tout x, y tels que $deg(x) + deg(y) \leq n-1$, et on montre que l'egalité est vraie pour tout $x, y \in \mathcal{H}$ tels que $deg(x) + deg(y) = n$. Soit $\varphi_-(x) = -\pi(\bar{\varphi}(x))$ où :

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'').$$

On a :

$$\begin{aligned}
\varphi_-(xy) &= -\pi\Big(\varphi(xy) + \sum_{(xy)} \varphi_-(x'y')\varphi(x''y'')\Big) \\
&= -\pi\Big(\varphi(x)\varphi(y) + \sum_{(xy)} \varphi_-(x')\varphi_-(y')\varphi(x'')\varphi(y'')\Big) \\
&= -\pi\Big(\varphi(x)\varphi(y) + \varphi_-(y)\varphi(x) + \varphi_-(x)\varphi(y) \\
&+ \varphi(x)\sum_{(y)} \varphi_-(y')\varphi(y'') + \varphi_-(x)\sum_{(y)} \varphi_-(y')\varphi(y'') \\
&+ \varphi(y)\sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'') + \varphi_-(y)\sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'') \\
&+ \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\sum_{(y)} \varphi_-(y')\varphi(y'')\Big) \\
&= -\pi\Big[\big(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\big)\big(\varphi(y) + \sum_{(y)} \varphi_-(y')\varphi(y'')\big) \\
&+ \varphi_-(x)\big(\varphi(y) + \sum_{(y)} \varphi_-(y')\varphi(y'')\big) \\
&+ \varphi_-(y)\big(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\big)\Big] \\
&= -\pi\Big(\bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(y) - \pi(\bar{\varphi}(x))\bar{\varphi}(y) - \pi(\bar{\varphi}(y))\bar{\varphi}(x)\Big) \\
&= \pi\Big(\pi(\bar{\varphi}(y))\bar{\varphi}(x) + \pi(\bar{\varphi}(x))\bar{\varphi}(y) - \bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}(y)\Big) \\
&= \pi\big(\bar{\varphi}(x)\big)\pi\big(\bar{\varphi}(y)\big) \\
&= \varphi_-(x)\varphi_-(y).
\end{aligned}$$

D'où φ_- est un caractère et donc φ_+ aussi.

□

Remarque 7. *L'application linéaire $b(\varphi) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{A}$ donnée par $b(\varphi)(\mathbf{1}) = 0$ et pour tout*

$x \in \mathcal{H}$ *par :*

$$b(\varphi)(x) = \varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x''),$$

est nommée préparation de Bogoliubov et s'écrit $b(\varphi) = \varphi_- * (\varphi - e)$. *Les formules de récurrence* (1.30) *et* (1.31) *s'écrivent de manière plus compacte [16] :*

$$\begin{aligned} \varphi_- &= e + P(\varphi_- * \lambda) \\ &= e + P(\lambda) + P(P(\lambda) * \lambda) + ... + \underbrace{P(P(...P(}_{nfois}\lambda) * \lambda)....* \lambda) + ... \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= e + \widetilde{P}(\varphi_+ * \xi) \\ &= e + \widetilde{P}(\xi) + \widetilde{P}(\widetilde{P}(\xi) * \xi) + ... + \underbrace{\widetilde{P}(\widetilde{P}(...\widetilde{P}(}_{nfois}\xi) * \xi)....* \xi) + ... \end{aligned}$$

avec $\lambda := e - \varphi$, $\xi := e - \varphi^{-1}$, *et où* P *et* $\widetilde{P}$ *sont les projections sur* $L(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ *définies par* $P(\lambda) = \pi \circ \lambda$ *et* $\widetilde{P}(\xi) = (I - \pi) \circ \xi$, *respectivement.*

Chapitre 2

Groupes de renormalisation pour deux algèbres de Hopf en produit semi-direct

Dans ce chapitre, nous considérons deux algèbres de Hopf graduées connexes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ en interaction, $\mathcal{H}$ étant un comodule-cogèbre sur $\mathcal{K}$. Nous définissons alors l'analogue de l'opérateur de Dynkin, du groupe de renormalisation et de la fonction Bêta de Connes-Kreimer lorsque la bidérivation de graduation Y est remplacée par une bidérivation B_α provenant d'un caractère infinitésimal α de la deuxième algèbre de Hopf $\mathcal{K}$. Dans toute ce chapitre $\mathcal{A} = \mathbb{C}[z^{-1}, z]]$ désigne l'algèbre (sur $k = \mathbb{C}$) des séries de Laurent d'une variable complexe munie de schéma minimal de renormalisation c-à-d $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$ où $\mathcal{A}_+ = \mathbb{C}[[z]]$ est la sous-algèbre des fonctions qui sont holomorphes en 0 et où $\mathcal{A}_- = \mathbb{C}[z^{-1}]$ est la sous-algèbre des polynômes en z^{-1} sans terme constant.

1 Groupe de renormalisation et fonction Bêta de Connes-Kreimer

1.1 Opérateur de graduation et opérateur de Dynkin

Définition 20. *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf graduée connexe. La graduation induit une bidérivation $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, donné par $Y(x) = nx$ pour x homogène de degré n.*

La bidérivation Y donne naissance au sous-groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathcal{H}$ défini pour tout $x \in \mathcal{H}_n$ par :

$$\theta_t(x) = e^{nt}x,$$

et $\varphi \longmapsto \varphi \circ \theta_t$ est un automorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ pour tout $t \in k$. On en déduit une action de $\mathbb{C}$ sur le groupe $G_\mathcal{A}$ des caractères de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{A}$, donnée par :

$$\varphi_t(x)(z) = e^{tz|x|}\varphi(x)(z). \tag{2.1}$$

Proposition 7. *L'application : $\varphi \longmapsto \varphi \circ Y$ est une dérivation de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ pour le produit de convolution.*

Preuve. Soit φ et ψ deux éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$. Pour tout élément homogène $x \in \mathcal{H}$ on a :

$$\begin{aligned}
\varphi * (\psi \circ Y)(x) + (\varphi \circ Y) * \psi(x) &= \sum_x \varphi(x_1)\ (\psi \circ Y)(x_2) + (\varphi \circ Y)(x_1)\psi(x_2) \\
&= \sum_x |x_2|\varphi(x_1)\psi(x_2) + |x_1|\varphi(x_1)\psi(x_2) \\
&= \sum_x (|x_2| + |x_1|)\varphi(x_1)\psi(x_2) \\
&= |x| \sum_x \varphi(x_1)\psi(x_2) \\
&= (\varphi * \psi) \circ Y(x).
\end{aligned}$$

□

Définition 21. *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf commutative graduée connexe. On appelle opérateur de Dynkin D, l'endomorphisme de $\mathcal{H}$ défini par :*

$$D = S * Y,$$

où S est l'antipode de $\mathcal{H}$.

Théorème 2. *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf commutative graduée connexe, G désignant le groupe des caractères et $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie des caractères infinitésimaux de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$. L'application :*

$$\begin{aligned}
\Theta : G &\longrightarrow \mathfrak{g} \\
\varphi &\longmapsto \varphi \circ D
\end{aligned}$$

est une bijection. L'inverse Γ est donnée par :

$$\Gamma(\alpha) = \sum_n \sum_{k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{N}^*} \frac{\alpha_{k_1} * \cdots * \alpha_{k_n}}{k_1(k_1 + k_2) \cdots (k_1 + \cdots + k_n)}, \tag{2.2}$$

où $\alpha_k(x) = \alpha(x)$ si $|x| = k$ et $\alpha_k(x) = 0$ si $|x| \neq k$.

Preuve. Pour une preuve detaillée de ce théorème, voir [15]. L'opérateur de Dynkin a été aussi etudié par F. Patras et C. Reutenauer [35] dans le cadre général des algèbres de Hopf commutatives et cocommutatives. □

1.2 Groupe de renormalisation et fonction Bêta

Soit φ un élément du groupe des caractères $G_{\mathcal{A}}$. L'action de $\mathbb{C}$ sur le groupe $G_{\mathcal{A}}$ définie par l'equation (2.1) s'ecrit en termes de décomposition de Birkhoff sous la forme suivante :

$$\varphi_t = (\varphi_t)_-^{*-1} * (\varphi_t)_+,$$

on définit alors l'ensemble des caractères locaux :

Définition 22. *L'ensemble des caractères locaux est défini par :*

$$G_{\mathcal{A}}^{loc} = \{\varphi \in G_{\mathcal{A}}, \ \ \frac{d}{dt}(\varphi_t)_- = 0\}.$$

Les théorèmes ci-dessous donne le groupe de renormalisation et la fonction Bêta d'un caractère local φ définies par A. Connes et D. Kreimer dans [11].

Théorème 3. *[11] Le groupe de renormalisation d'un caractère local φ est défini par :*

$$F_t(\varphi)(x) = \lim_{z \longrightarrow 0} (\varphi^{*-1} * \varphi_t)(x)(z). \tag{2.3}$$

Définition 23. *La fonction Bêta, le générateur du groupe à un paramètre F_t est définie par :*

$$\beta(\varphi)(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_t(\varphi)(x). \tag{2.4}$$

Théorème 4. *[11] Pour tout caractère local φ, la fonction β est donnée par les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned} \beta(\varphi) &= \mathrm{Res}(\varphi_-^{*-1} \circ Y) \\ &= -\mathrm{Res}(\varphi_- \circ Y). \end{aligned}$$

2 Deux algèbres de Hopf graduées connexes en interaction

On se placera dans le cadre suivant : $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont deux algèbres de Hopf graduées connexes commutatives et $\Phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$ une coaction à gauche qui est en même temps un morphisme d'algèbres graduées, et telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \\ \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & & \downarrow{\scriptstyle I \otimes \Delta} \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi \otimes \Phi} & & \\ \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{m^{13}} & \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{K}} \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \circ \Phi = m^{1,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}}, \tag{2.5}$$

où $m^{1,3} : \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est défini par :

$$m^{1,3}(a \otimes b \otimes c \otimes d) = ac \otimes b \otimes d, \tag{2.6}$$

et Φ s'exprime en notation de Sweedler pour tout $x \in \mathcal{H}$ par :

$$\Phi(x) = \sum_{(x)} x_0 \otimes x_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes x + \sum_{(x)} x^{(')} \otimes x^{('')}, \tag{2.7}$$

avec : $1 \leq \left| x^{('')} \right| \leq \mid x \mid -1$ et $\left| x^{('')} \right| + deg\ x^{(')} = \mid x \mid$ où $|...|$ désigne le degré dans $\mathcal{H}$ et deg désigne le degré dans $\mathcal{K}$.

Exemple 1. *1. $\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$. En effet, on suppose qu'il existe $\lambda \in k^*$ tel que $\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = \lambda \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ on a alors :*

$$(\varepsilon \otimes Id) \circ \Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{H}} = \lambda \varepsilon(\mathbf{1}_{\mathcal{K}}) \mathbf{1}_{\mathcal{H}} = \lambda \mathbf{1}_{\mathcal{H}}.$$

Donc : $\lambda = 1$ et par suite :

$$\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}. \tag{2.8}$$

2. Pour tout $x \in \mathcal{H}$ tel que $|x| = 1$, on a $\Phi(x) = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes x$. En effet : on suppose tout d'abord que $\Phi(x) = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes y + z \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ avec $y \in Prim(\mathcal{H})$ et $z \in Prim(\mathcal{K})$ tels que $|y| = 1$ et $deg(z) = 1$ et on utilise l'équation (2.5) qui définit la co-action Φ. On obtient alors l'égalité suivante :

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{K}} \otimes \Delta_{\mathcal{H}})(\mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes y + z \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}}) = m^{1,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}}(\mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes y + z \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}}).$$

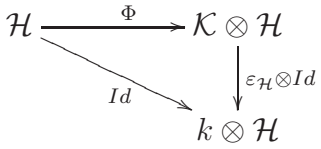
Donc on a :

$$\mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes y + \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes y \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + z \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes y + \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes y \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + 2z \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}.$$

D'ou

$$z = 0 \quad \textit{et donc on peut ecrire} \quad \Phi(x) = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes y.$$

On utilise maintenant la co-action de la co-unité qui se traduit par le diagramme suivant :



On obtient donc : $\mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes y = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes x$, D'ou : $y = x$, et par suite :

$$\Phi(x) = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes x. \tag{2.9}$$

Le cadre ci-dessus est inspiré par les deux exemples suivants :

2.1 Les arbres enracinés

D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard et D. Manchon ont etudié l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ de Connes-Kreimer graduée suivant le nombre de sommets, dans [7], comme comodule sur une algèbre de Hopf $\mathcal{K}$ d'arbres enracinés graduée suivant le nombre d'arêtes. Cette structure est définie de la façon suivante. Pour tout arbre non vide t on a :

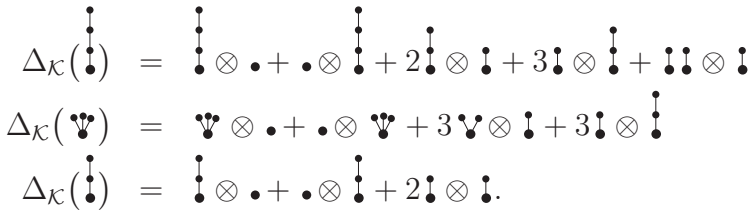
$$\Phi(t) = \Delta_{\mathcal{K}}(t) = \sum_{s \subseteq t} s \otimes t/s,$$

où la notation $s \subseteq t$ exprime le fait que s est une sous-forêts de l'arbre t, c-à-d s est soit la forêt triviale $\bullet$, ou une collection $(t_1, \cdots, t_n)$ de sous-arbres disjoints de t, chacun d'eux contenant au moins une arête. En particulier, deux sous-arbres d'une sous-forêts ne peuvent avoir aucun sommet en commun, et t/s est l'arbre obtenu par contraction des composantes connexes de s en un sommet, et pour $\mathbf{1}$ on a : $\Phi(\mathbf{1}) = \bullet \otimes \mathbf{1}$. On peut encore écrire $\Phi(t)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Delta_{\mathcal{K}}(t) = \sum_{s \subseteq t} s \otimes t/s \\ &= \bullet \otimes t + \left(t \otimes \bullet + \sum_{s \text{ sous-fort propre de } t} s \otimes t/s \right), \end{aligned}$$

ce qui montre que la formule (2.7) est vérifiée.

Exemple 2. *La forêt triviale $\bullet$ est identifié à l'unité de l'algèbre de Hopf $\mathcal{K}$.*

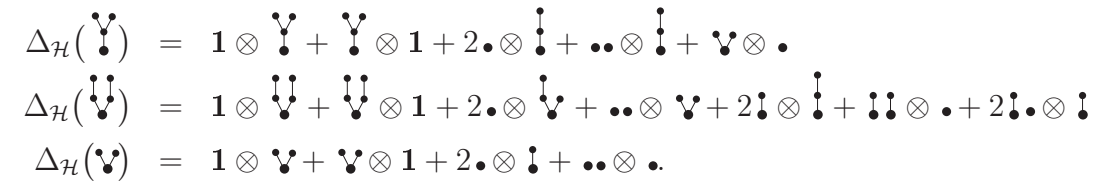


Le théorème suivant donne la relation entre cette structure de comodule et le coproduit de Connes-Kreimer $\Delta_{\mathcal{H}}$ défini par :

$$\Delta_{\mathcal{H}}(t) = t \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes t + \sum_{c \in \mathrm{Adm}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t), \tag{2.10}$$

où $\mathrm{Adm}(t)$ designe l'ensemble des coupes admissibles d'une forêt t (rappelons qu'une coupe admissible de t est une coupe non vide telle que tout trajet d'un sommet de t vers une feuille ne rencontre au plus qu'une seule coupe élémentaire). Une coupe admissible envoie t vers un couple $(P^c(t), R^c(t))$ telle que $R^c(t)$ est la composante connexe de la racine de t après la coupe, et $P^c(t)$ est la forêt formée par les autres composantes connexes. (Voir [7] et [20]).

Exemple 3.



Théorème 5. *[7] L'identité suivante est vérifiée :*

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{K}} \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \circ \Phi = m^{1,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}}, \tag{2.11}$$

où $m^{1,3} : \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ *est définie par :*

$$m^{1,3}(a \otimes b \otimes c \otimes d) = ac \otimes b \otimes d. \tag{2.12}$$

2.2 Les graphes de Feynman orientés sans cycle

Un graphe de Feynman orienté est un graphe orienté (non plan) avec un nombre fini de sommets et d'arêtes, qui peuvent être internes ou externes. Une arête interne est une arête connectée aux deux extrémités à un sommet, une arête externe est une arête avec une extrémité ouverte, l'autre extrémité étant reliée à un sommet.

Un cycle dans un graphe de Feynman orienté est une collection finie d'arêtes orientées internes $(e_1, ..., e_n)$ tels que le but de e_k coincide avec la source de e_{k+1} pour tout $k = 1, ..., n$ modulo n.

Pour toute partie non vide P de l'ensemble $\mathcal{V}(\Gamma)$ des sommets de Γ, le sous graphe $\Gamma(P)$ est défini comme suit : les arêtes internes de $\Gamma(P)$ sont les arêtes internes de Γ avec source et but dans P, et les arêtes externes sont les arêtes externes de Γ avec la source ou le but dans P, ainsi que les arêtes internes de Γ avec une extrémité dans P et l'autre extrémité hors de P.

Un sous-graphe couvrant de Γ est un graphe de Feynman orienté γ (pas forcement connexe), donné par une collection $\Gamma(P_1), ..., \Gamma(P_n)$ de sous-graphes connexes telle que $P_j \cap P_k = \emptyset$ pour $j \neq k$, et telle que tout sommet de Γ appartient à un certain P_j pour $j \in \{1, ..., n\}$.

Pour tout sous-graphe couvrant γ, le graphe contracté Γ/γ est défini par contraction de toutes les composantes connexes de γ sur un point. On dira qu'un sous-graphe couvrant γ de Γ est compatible avec l'ordre partiel si le graphe contracté Γ/γ est sans cycle.

Les graphes de Feynman orientés sans cycles engendrent à la fois une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ (graduée suivant le nombre des sommets) et une bigèbre $\widetilde{\mathcal{K}}$ (graduée suivant le nombre des

arêtes internes) [29]. La coaction à gauche de $\widetilde{\mathcal{K}}$ sur $\mathcal{H}$ est définie par :

$$\widetilde{\Phi}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = \mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{K}}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}},$$

et pour tout graphe non vide Γ par :

$$\widetilde{\Phi}(\Gamma) \;=\; \Delta_{\widetilde{\mathcal{K}}}(\Gamma) = \sum_{\substack{\gamma \text{ sous graphe couvrant de } \Gamma \\ \text{compatible avec l'ordre partiel}}} \gamma \otimes \Gamma/\gamma.$$

Exemple 4. *L'ordre partiel sur les sommets provient de l'orientation des arêtes du graphe. C'est un ordre partiel car le graphe est sans cycle.*

$\Delta_{\widetilde{\mathcal{K}}}($  $) \;=\;$ 

Le coproduit sur $\mathcal{H}$ est défini pour tout graphe orienté sans cycle Γ par :

$$\Delta_{\mathcal{H}}(\Gamma) = \sum_{V_1 \cup V_2 = \mathcal{V}(\Gamma), V_1 \prec V_2} \Gamma(V_1) \otimes \Gamma(V_2), \tag{2.13}$$

où l'inégalité $V_1 \prec V_2$ signifie que pour tout $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$ avec v_1 et v_2 comparables, on a $v_1 \prec v_2$ dans l'ensemble partiellement ordonné des sommets de Γ noté $\mathcal{V}(\Gamma)$.

Exemple 5.

$\Delta_{\mathcal{H}}($  $) \;=\; \mathbf{1} \otimes$  $+$  $\otimes \mathbf{1} +$ 

D'après [29, Theorem 2] le coproduit $\Delta_{\mathcal{H}}$ et la coaction $\widetilde{\Phi}$ vérifient bien :

$$(\mathrm{Id}_{\widetilde{\mathcal{K}}} \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \circ \widetilde{\Phi} = m^{1,3} \circ (\widetilde{\Phi} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{\mathcal{H}}. \tag{2.14}$$

En quotientant par l'idéal engendré par les éléments $\Gamma - \mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ où Γ est un graphe sans arêtes internes, la bigèbre $\widetilde{\mathcal{K}}$ donne naissance à une algèbre de Hopf graduée connexe $\mathcal{K}$, et la coaction Φ déduite de $\widetilde{\Phi}$ par passage au quotient vérifie la formule (2.5). La coaction Φ s'écrit alors :

$$\Phi(\Gamma) \;=\; \mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{K}}} \otimes \Gamma + \left(\Gamma \otimes \bullet + \sum_{\substack{\gamma \text{ sous graphe couvrant propre de } \Gamma \\ \text{compatible avec l'ordre partiel}}} \gamma \otimes \Gamma/\gamma \right),$$

et verifie bien la formule (2.7).

Dans toute la suite de chapitre nous considérons que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont deux algèbres de Hopf graduées connexes en interaction c-à-d, $\mathcal{K}$ est un comodule-cogèbre sur $\mathcal{H}$.

3 Bidérivation provenant d'un caractère infinitésimal

3.1 Groupes de caractères

On désigne par $G_{\mathcal{A}}$ (resp. $G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}$) le groupe des caractères de $\mathcal{H}$ (resp. de $\mathcal{K}$) à valeurs dans $\mathcal{A}$, par $G_{\mathcal{A}_+}$ (resp. $G_{\mathcal{A}_+}^{\mathcal{K}}$) le groupe des caractères de $\mathcal{H}$ (resp. de $\mathcal{K}$) à valeurs dans $\mathcal{A}_+$ et par G_c (resp. $G_c^{\mathcal{K}}$) le groupe des caractères de $\mathcal{H}$ (resp. de $\mathcal{K}$) à valeurs constantes.

Remarque 8. *Dans toute la suite on utilise des notations similaires ($\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$, $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}$, $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}_+}$, $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}_+}^{\mathcal{K}}$, $\mathfrak{g}_c$, $\mathfrak{g}_c^{\mathcal{K}}$) pour les algèbres de Lie des caractères infinitésimaux associées aux groupes des caractères.*

Tout $\alpha \in G_{\mathcal{A}_+}^{\mathcal{K}}$ s'écrit sous la forme $\exp^\star X$ où $X \in \mathfrak{g}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}$. On définit la bijection Z par :

$$\begin{array}{rcl} Z : G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}} & \longrightarrow & G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}} \\ \exp^\star X & \longmapsto & \exp^\star zX \end{array}$$

où $\exp^\star zX$ est défini par :

$$\exp^\star zX(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} X^{\star n}(x),$$

pour tout $x \in \mathcal{K}$. L'inverse de Z est donné par la formule suivante :

$$Z^{-1}(\exp^\star X)(x) = \exp^\star z^{-1}X(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{-n}}{n!} X^{\star n}(x). \tag{2.15}$$

Remarque 9. *La somme précédente est finie car elle s'arrête à $n = |x|$ où $|x|$ désigne le degré de x.*

Pour tout $g, g' \in G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}$ on pose :

$$g \star_z g' := Z^{-1}(Z(g) \star Z(g')).$$

Définition 24. *L'action de $G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}$ sur $G_{\mathcal{A}}$ est définie pour tout $g \in G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}, \varphi \in G_{\mathcal{A}}, x \in \mathcal{H}$ et $z \in \mathbb{C}$ par :*

$$(g \star_z \varphi)(x)(z) := (Z(g) \star \varphi)(x)(z).$$

Cette formule définit bien une action. En effet pour tout $g, g' \in G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}, \varphi \in G_{\mathcal{A}}$ on a :

$$\begin{array}{rcl} g \star_z (g' \star_z \varphi) & = & Z(g) \star (g' \star_z \varphi) \\ & = & Z(g) \star (Z(g') \star \varphi) \\ & = & (Z(g) \star Z(g')) \star \varphi \\ & = & Z(g \star_z g') \star \varphi \\ & = & (g \star_z g') \star_z \varphi. \end{array}$$

3.2 Bidérivation B_α

Proposition 8. *Soit $\alpha : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ une transformation linéaire. L'application $B_\alpha : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ définie par :*

$$B_\alpha = (\alpha \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}) \circ \Phi$$

i.e :

$$B_\alpha(x) = \sum_{(x)} < \alpha, x_1 > x_0 \tag{2.16}$$

satisfait l'identité :

$$\Delta_{\mathcal{H}} \circ B_\alpha = B_{{}^t m\alpha} \circ \Delta_{\mathcal{H}}, \tag{2.17}$$

où ${}^t m : \mathcal{K}^* \to (\mathcal{K} \otimes \mathcal{K})^*$ est défini par : ${}^t m(\alpha)(x \otimes y) := \alpha(xy)$ et

$$B_{{}^t m\alpha} := ({}^t m\alpha \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}) \circ \tau_{2,3} \circ (\Phi \otimes \Phi).$$

En particulier si $\alpha \in \mathcal{K}^\circ$ alors ${}^t m\alpha = \sum_{(\alpha)} \alpha_1 \otimes \alpha_2 \in \mathcal{K}^\circ \otimes \mathcal{K}^\circ$ et :

$$\Delta_{\mathcal{H}} \circ B_\alpha = \sum_{(\alpha)} (B_{\alpha_1} \otimes B_{\alpha_2}) \circ \Delta_{\mathcal{H}}. \tag{2.18}$$

Preuve. L'opérateur B_α est la transposée de l'opérateur de multiplication à gauche

$$L_\alpha : \mathcal{H}^\circ \to \mathcal{H}^\circ$$

donnée par la structure de $\mathcal{H}^\circ$-module à gauche (i.e. $L_\alpha(b) = \alpha \star b$). De même, si $\alpha \in \mathcal{K}^\circ$ alors ${}^t m\alpha \in \mathcal{K}^\circ \otimes \mathcal{K}^\circ$, et $B_{{}^t m\alpha}$ est la transposée de l'opérateur de multiplication à gauche

$$L_{{}^t m\alpha} : \mathcal{H}^\circ \otimes \mathcal{H}^\circ \to \mathcal{H}^\circ \otimes \mathcal{H}^\circ.$$

La structure de $\mathcal{H}^\circ \otimes \mathcal{H}^\circ$-module à gauche est donnée par la transposée de $\widetilde{\Phi} = \tau_{2,3} \circ (\Phi \otimes \Phi)$, où la notation $\tau_{2,3}$ désigne la permutation des deux termes intermédiaires, i.e :

$$\tau_{2,3}(a \otimes b \otimes c \otimes d) = a \otimes c \otimes b \otimes d.$$

La preuve de la proposition est un calcul direct basé sur la définition de la coaction Φ :

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{H}} \circ B_\alpha &= \Delta_{\mathcal{H}} \circ (\alpha \otimes \mathrm{Id}) \circ \Phi \\
&= (\alpha \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \circ \Phi \\
&= (\alpha \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}) \circ m^{1,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}} \\
&= ({}^t m\alpha \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}) \circ \tau_{2,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}} \\
&= B_{{}^t m\alpha} \circ \Delta_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 9. *Soit $\alpha : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ un caractère infinitésimal de $\mathcal{K}$, en particulier $\alpha(\mathbf{1}_{\mathcal{K}}) = 0$. Si x est un élément de $\mathcal{H}$ de degré 1 alors x appartient à $\ker B_\alpha$, i.e :*

$$B_\alpha(x) = 0. \tag{2.19}$$

Preuve. Soit $x \in \mathcal{H}_1$, alors d'après (2.9) on a : $\Phi(x) = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes x$, donc :

$$\begin{aligned} B_\alpha(x) &= (\alpha \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}) \circ \Phi(x) \\ &= (\alpha \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}})(\mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes x) \\ &= \alpha(\mathbf{1}_{\mathcal{K}})x \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 10. *Si $\alpha : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un caractère infinitésimal de $\mathcal{K}$ alors l'opérateur B_α est une bidérivation de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$.*

Preuve. Le fait que B_α est une codérivation découle immédiatement de la proposition 8 et du fait que α est infinitésimal. Montrons maintenant que B_α est une dérivation. Soient $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} B_\alpha(xy) &= \sum_{(xy)} < \alpha, (xy)_1 > (xy)_0 \\ &= \sum_{(x)}\sum_{(y)} < \alpha, x_1y_1 > x_0y_0 \\ &= \sum_{(x)}\sum_{(y)} (< \alpha, x_1 > e(y_1) + < \alpha, y_1 > e(x_1))x_0y_0 \\ &= \sum_{(x)} < \alpha, x_1 > x_0y + \sum_{(y)} < \alpha, y_1 > xy_0 \\ &= B_\alpha(x)y + xB_\alpha(y). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que B_α est une dérivation. □

Corollaire 1. *Si $\alpha : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un caractère infinitésimal de $\mathcal{K}$, alors $\varphi \longmapsto \varphi \circ B_\alpha = \alpha \star \varphi$ est une dérivation de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ pour le produit de convolution.*

Preuve. Soient $\varphi, \psi \in G_{\mathcal{A}}$.

$$\alpha \star (\varphi * \psi) = \sum_{(\alpha)} (\alpha_1 \star \varphi) * (\alpha_2 \star \psi).$$

Comme α est un caractère infinitésimal, alors il est primitif pour ${}^t m$. On a donc :

$${}^t m(\alpha) = \alpha \otimes 1_{\mathcal{K}^\circ} + 1_{\mathcal{K}^\circ} \otimes \alpha.$$

D'où : $\alpha \star (\varphi * \psi) = (\alpha \star \varphi) * \psi + \varphi * (\alpha \star \psi)$. □

4 Groupe de renormalisation et fonction β_α

4.1 Groupe à un paramètre d'automorphismes

Pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{A}_+}$, on obtient un groupe à un paramètre $\theta_{t,\alpha}$ d'automorphismes de $G_{\mathcal{A}}$ défini pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$ par :

$$\theta_{t,\alpha}(\varphi)(x)(z) = (exp^\star tz\alpha \star \varphi)(x)(z). \tag{2.20}$$

La formule (2.20) définit également un sous-groupe à un paramètre d'automorphismes de l'algèbre $(\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{A}),*)$. On note :

$$\varphi_{t,\alpha} := \theta_{t,\alpha}(\varphi). \tag{2.21}$$

En termes de décomposition de Birkhoff $\varphi_{t,\alpha}$ s'écrit :

$$\varphi_{t,\alpha} = (\varphi_{t,\alpha})_-^{*-1} * (\varphi_{t,\alpha})_+.$$

On note $G_{\mathcal{A}}^{\alpha}$ l'ensemble des caractères φ de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ qui vérifient :

$$\frac{d}{dt}(\varphi_{t,\alpha})_- = 0.$$

Proposition 11. *Pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{A}_+}$, l'équation :*

$$\alpha \star \varphi = \varphi * \gamma \tag{2.22}$$

définit une application :

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha : & G_{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{\mathcal{A}} \\ & \varphi & \longmapsto & \gamma \end{array}$$

Preuve. Pour $x = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$: $\gamma(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = 0$ et pour $|x| = 1$ l'équation (2.22) s'écrit en utilisant la notation de Sweedler :

$$\alpha(\mathbf{1}_{\mathcal{K}})\varphi(x) = \varphi(x)\gamma(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) + \varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}})\gamma(x).$$

Le fait que $\alpha(\mathbf{1}_{\mathcal{K}}) = \gamma(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = 0$ implique que $\gamma(x) = 0$ et pour $x \in \operatorname{Ker}\varepsilon$, l'équation (2.22) s'écrit en utilisant la notation de Sweedler :

$$\alpha(\mathbf{1}_{\mathcal{K}})\varphi(x) + \sum_x \alpha(x^{(')})\varphi(x^{('')}) = \gamma(x) + \sum_{(x)} \varphi(x')\gamma(x'').$$

$$\text{Donc : } \gamma(x) = \sum_x \alpha(x^{(')})\varphi(x^{('')}) - \sum_{(x)} \varphi(x')\gamma(x'').$$

Ce qui nous permet de définir $\gamma(x)$ par récurrence sur le degré de x''. Soient $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$ et $x, y \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned}
\gamma(xy) &= \varphi^{*-1} * (\alpha \star \varphi)(xy) \\
&= \varphi^{*-1} * (\varphi \circ B_\alpha)(xy) \\
&= \sum_{(xy)} \varphi^{*-1}((xy)_1)\varphi \circ B_\alpha((xy)_2) \\
&= \sum_{(x)(y)} \varphi^{*-1}(x_1y_1)\varphi \circ B_\alpha(x_2y_2) \\
&= \sum_{(x)(y)} \varphi^{*-1}(x_1)\varphi^{*-1}(y_1)\varphi(B_\alpha(x_2)y_2 + x_2B_\alpha(y_2)) \\
&= \sum_{(x)(y)} \varphi^{*-1}(x_1)\varphi^{*-1}(y_1)(\varphi \circ B_\alpha(x_2)\varphi(y_2) + \varphi(x_2)\varphi \circ B_\alpha(y_2)) \\
&= \varphi^{*-1} * (\varphi \circ B_\alpha)(x)e(y) + e(x)\varphi^{*-1} * (\varphi \circ B_\alpha)(y) \\
&= \gamma(x)e(y) + e(x)\gamma(y).
\end{aligned}$$

D'où γ est un caractère infinitésimal. □

Proposition 12. *Soit :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\alpha : \mathfrak{g}_{\mathcal{A}} &\longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{A}} \\
a &\longmapsto \gamma
\end{aligned}$$

définie par :

$$\mathcal{R}_\alpha(a) = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha \circ exp(a).$$

Alors on a : $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) = \varphi^{*-1} * (\alpha \star \varphi)$ *et* $\mathcal{R}_\alpha(a) = e^{*-a} * (\alpha \star e^{*a})$.

Preuve. $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) = \gamma$ alors en utilisant l'équation (2.22) on obtient : $\alpha \star \varphi = \varphi * \gamma$, d'où :

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) = \varphi^{*-1} * (\alpha \star \varphi)$$

Comme : $\mathcal{R}_\alpha = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha \circ exp$ on obtient immédiatement d'après le résultat ci dessus :

$$\mathcal{R}_\alpha(a) = e^{*-a} * (\alpha \star e^{*a}).$$

□

Remarque 10. *Si $\alpha = 0$ alors on a : $\theta_{t,\alpha}(\varphi) = \varphi$ et $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha \equiv 0$.*

4.2 L'opérateur E_α

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf graduée connexe, pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{A}_+}$ on définit l'opérateur E_α par :

$$E_\alpha := S * B_\alpha,$$

où S est l'antipode de $\mathcal{H}$.

Proposition 13. *Si $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf graduée connexe commutative la correspondance $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha$ se réduit à la composition à droite avec E_α, i.e : $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) = \varphi \circ E_\alpha$.*

Preuve.

$$\begin{aligned} \varphi \circ E_\alpha &= \varphi \circ (S * B_\alpha) \\ &= (\varphi \circ S) * (\varphi \circ B_\alpha) \\ &= \varphi^{*-1} * (\alpha \star \varphi) \\ &= \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi). \end{aligned}$$

□

Remarque 11. *L'analogue $\varphi \longmapsto \varphi \circ E_\alpha$ de la composition à droite par l'operateur de Dynkin $S * Y$ n'est pas une bijection des caractères de $\mathcal{H}$ vers les caractères infinitésimaux. Cela vient du fait que* $\operatorname{Ker} B_\alpha$ *est non trivial car il contient tous les éléments de degré* 1 *(proposition 9), contrairement à* $\operatorname{Ker} Y$ *qui se réduit à l'unité de $\mathcal{H}$.*

Proposition 14.

$$\mathcal{R}_\alpha(a) = \int_0^1 e^{*-sa} * (a \circ B_\alpha) * e^{*sa} ds = \frac{1 - e^{-ad\, a}}{ad\, a}.(a \circ B_\alpha).$$

Preuve. Pour tout $u \in \mathbb{C}$ nous avons :

$$e^{*ua} \circ B_\alpha = e^{*ua} * \mathcal{R}_\alpha(ua).$$

On pose $u = t + s$ et on utilise la propriété de groupe $e^{*(t+s)a} = e^{*ta} * e^{*sa}$. En utilisant la propriété de dérivation :

$$(e^{*ta} * e^{*sa}) \circ B_\alpha = (e^{*ta} \circ B_\alpha) * e^{*sa} + e^{*ta} * (e^{*sa} \circ B_\alpha).$$

On trouve :

$$e^{*(t+s)a} \circ B_\alpha = e^{*(t+s)a} * (\mathcal{R}_\alpha(sa) + e^{*-sa} * \mathcal{R}_\alpha(ta) * e^{*sa}).$$

En posant $\gamma(t) = \mathcal{R}_\alpha(ta)$: L'équation précédente devient :

$$\gamma(t + s) = \gamma(s) + e^{*-sa} * \gamma(t) * e^{*sa}.$$

Nous avons $\gamma(0) = 0$. En dérivant l'équation précédente par rapport à s et prenant $s = 0$, on obtient :

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(0) + [\gamma(t), a].$$

On dérive l'équation précédente par rapport à t, ce qui donne :

$$\ddot{\gamma}(t) = [\dot{\gamma}(t), a].$$

La solution de cette équation différentielle du premier ordre est donnée par :

$$\dot{\gamma}(t) = e^{*-ta} * \dot{\gamma}(0) * e^{*ta}.$$

En dérivant l'égalité $e^{*ta} \circ B_\alpha = e^{*ta} * \gamma(t)$ à $t = 0$ on obtient immédiatement :

$$\dot{\gamma}(0) = a \circ B_\alpha.$$

On intègre puis on prend $t = 1$, ce qui prouve la proposition. □

4.3 Groupe de renormalisation

On désigne par $G^\alpha_{\mathcal{A}_-}$ l'ensemble des éléments $\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}}$ tels que $\varphi = \varphi_-^{*-1}$. Comme la composition à droite avec B_α est une dérivation pour le produit de convolution, l'application $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha$ vérifie la propriété de cocycle :

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi * \psi) = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\psi) + \psi^{*-1} * \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) * \psi. \tag{2.23}$$

Définition 25. *Pour toute $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$, nous associons une forme linéaire* $\operatorname{Res}\varphi$ *sur $\mathcal{H}$ par extraction du coefficient de z^{-1} : plus précisément, si nous avons pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour tout z dans un voisinage de 0 :*

$$\varphi(x)(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} \varphi_n(x) z^n,$$

avec $\varphi_n(x) \in \mathbb{C}$, alors :

$$\operatorname{Res}\varphi(x) := \varphi_{-1}(x).$$

Théorème 6. *1. Pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$ il y a une famille à un paramètre $h_{t,\alpha}$ telle que : $\varphi_{t,\alpha} = \varphi * h_{t,\alpha}$ et on a :*

$$\dot{h}_{t,\alpha} = \frac{d}{dt} h_{t,\alpha} = h_{t,\alpha} * z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(h_{t,\alpha}) + z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) * h_{t,\alpha}. \tag{2.24}$$

2. $z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha$ se restreint en une application de $G^\alpha_{\mathcal{A}}$ dans $\mathfrak{g}^{\mathcal{A}} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}_+)$. Par ailleurs $z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha$ envoie $G^\alpha_{\mathcal{A}_-}$ sur l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}^{\mathcal{A}}$ à valeurs constantes.

3. *Pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}}^{\alpha}$, le terme constant de $h_{t,\alpha}$ defini par :*

$$F_{t,\alpha}(\varphi)(x) = \lim_{z \longrightarrow 0} h_{t,\alpha}(x)(z)$$

est un sous-groupe à un paramètre de $G_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$.

Preuve. 1. Pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$ on écrit : $\varphi_{t,\alpha} = \varphi * h_{t,\alpha}$.
D'une part en dérivant l'expression ci-dessus par rapport à t on a : $\dot{\varphi}_{t,\alpha} = \varphi * \dot{h}_{t,\alpha}$
D'autre part en dérivant la formule (2.20) par rapport à t on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{t,\alpha} &= z\alpha \star \varphi_{t,\alpha} \\ &= \varphi_{t,\alpha} * z\widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha}(\varphi), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \varphi * \dot{h}_{t,\alpha} &= \varphi_{t,\alpha} * z\widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha}(\varphi_{t,\alpha}) \\ &= \varphi * h_{t,\alpha} * z\widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha}(\varphi * h_{t,\alpha}). \end{aligned}$$

$\widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha}$ verifie la propriété de cocycle (2.23), donc on a :

$$\begin{aligned} \varphi * \dot{h}_{t,\alpha} &= \varphi * h_{t,\alpha} * z\left(\widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha}(h_{t,\alpha}) + h_{t,\alpha}^{*-1} * \widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha}(\varphi) * h_{t,\alpha}\right) \\ &= \varphi * h_{t,\alpha} * z\widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha}(h_{t,\alpha}) + \varphi * z\widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha}(\varphi) * h_{t,\alpha}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\dot{h}_{t,\alpha} = h_{t,\alpha} * z\widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha}(h_{t,\alpha}) + z\widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha}(\varphi) * h_{t,\alpha}.$$

2. Soit $\varphi \in G_{\mathcal{A}}^{\alpha}$. La décomposition de Birkhoff de $\varphi_{t,\alpha}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \varphi_{t,\alpha} &= (\varphi_{t,\alpha})_{-}^{*-1} * (\varphi_{t,\alpha})_{+} \\ &= (\varphi_{-})^{*-1} * (\varphi_{t,\alpha})_{+} \\ &= (\varphi * \varphi_{+}^{*-1}) * (\varphi_{t,\alpha})_{+} \\ &= \varphi * h_{t,\alpha}. \end{aligned}$$

Donc $h_{t,\alpha} \in G_{\mathcal{A}_+}$. Alors en écrivant la formule (2.24) à $t = 0$, on montre que $z\widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha}(\varphi)$ appartient à $\mathfrak{g}^{\mathcal{A}} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}_+)$, ce qui prouve la première partie.
En écrivant l'équation (2.24) à $t = 0$ on obtient :

$$z\widetilde{\mathcal{R}}_{\alpha}(\varphi) = \dot{h}_{\alpha}(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\varphi_{t,\alpha})_{+}. \tag{2.25}$$

Pour $\varphi \in G^{\alpha}_{\mathcal{A}_-} = \{\varphi \in G^{\alpha}_{\mathcal{A}} \text{ tel que } \varphi = \varphi_-^{*-1}\}$ on a, puisque $\varphi(\operatorname{Ker}\varepsilon) \subset \mathcal{A}_-$:

$$\begin{aligned} h_{t,\alpha}(x) &= (\varphi_{t,\alpha})_+(x) \\ &= (I-\pi)\left(\varphi_{t,\alpha}(x) + \sum_x \varphi^{*-1}(x')\varphi_{t,\alpha}(x'')\right) \\ &= t(I-\pi)\left(z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)(x) + z\sum_x \varphi^{*-1}(x')\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)(x'')\right) + O(t^2) \\ &= t\operatorname{Res}(\alpha \star \varphi) + O(t^2). \end{aligned}$$

Donc :

$$\dot{h}_\alpha(0) = \operatorname{Res}(\alpha \star \varphi). \tag{2.26}$$

Alors d'après la formule (2.25) pour tout $\varphi \in G^{\alpha}_{\mathcal{A}_-}$ on a :

$$z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) = \operatorname{Res}(\alpha \star \varphi). \tag{2.27}$$

Inversement, soit $\chi \in \mathfrak{g}^c$, on considère $\psi = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha^{-1}(z^{-1}\chi)$. Cet élément de $G_{\mathcal{A}}$ vérifie par définition, d'après l'équation (2.22) :

$$z\psi \circ B_\alpha = \psi * \chi.$$

Donc pour tout $x \in \operatorname{Ker}\varepsilon$ on a :

$$\begin{aligned} \alpha \star \psi(x) &= \frac{1}{z}\left(\chi(x)\psi(1_{\mathcal{H}}) + \psi(x)\chi(1_{\mathcal{H}}) + \sum_x \psi(x')\chi(x'')\right) \\ &= \frac{1}{z}\left(\chi(x) + \sum_x \psi(x')\chi(x'')\right). \end{aligned}$$

On suppose que $\alpha \in \mathfrak{g}^c_{\mathcal{K}}$ alors $\alpha \star \psi(x) \in \mathcal{A}_-$. En utilisant la notation de Sweedler on écrit :

$$\begin{aligned} \alpha \star \psi(x) &= \sum_x \alpha(x_0)\psi(x_1) \\ &= \alpha(1_{\mathcal{K}})\psi(x) + \sum_x \alpha(x')\psi(x'') \\ &= \psi(x) + \sum_x \alpha(x')\psi(x''). \end{aligned}$$

Donc :

$$\psi(x) = \alpha \star \psi(x) - \sum_x \alpha(x')\psi(x'').$$

Par récurrence sur le degré de x, la formule ci dessus nous permet de montrer que :

$$\psi(x) \in \mathcal{A}_-$$

par suite :

$$\psi = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha^{-1}(z^{-1}\chi) \in G^\alpha_{\mathcal{A}_-}.$$

3. Le deux équations $\varphi_{t,\alpha} = \varphi * h_{t,\alpha}$ et $(\varphi_{t,\alpha})_{s,\alpha} = \varphi_{t+s,\alpha}$ nous permettent d'écrire :

$$h_{s+t,\alpha} = h_{s,\alpha} * (h_{t,\alpha})_{s,\alpha}. \tag{2.28}$$

En effet :

$$\begin{aligned} h_{s+t,\alpha} &= \varphi^{*-1} * (\varphi_{t+s,\alpha}) \\ &= \varphi^{*-1} * (\varphi_{t,\alpha})_{s,\alpha} \\ &= \varphi^{*-1} * \varphi_{s,\alpha} * (h_{t,\alpha})_{s,\alpha} \\ &= h_{s,\alpha} * (h_{t,\alpha})_{s,\alpha}. \end{aligned}$$

En prenant $z = 0$ on obtient immédiatement la propriété de groupe à un paramètre :

$$F_{s+t,\alpha} = F_{s,\alpha} * F_{t,\alpha}. \tag{2.29}$$

□

Nous pouvons maintenant définir la fonction β_α.

4.4 Fonction β_α

Définition 26. *Pour tout $\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}}$ sa fonction β_α est le générateur de groupe à un paramètre $F_{t,\alpha}$, c'est-á-dire l'élement de $\mathcal{H}^*$ défini par :*

$$\beta_\alpha(\varphi) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_{t,\alpha}(\varphi).$$

Proposition 15. *Pour tout $\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}}$ sa fonction β_α coincide avec celle de la partie négative φ_-^{*-1} dans la décomposition de Birkhoff. Elle est donnée par les expressions :*

$$\begin{aligned} \beta_\alpha(\varphi) &= \mathrm{Res}(\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)) \\ &= \mathrm{Res}(\varphi_-^{*-1} \circ B_\alpha) \\ &= -\mathrm{Res}(\varphi_- \circ B_\alpha). \end{aligned}$$

Preuve. On suppose que $\varphi \in G^{\alpha}_{\mathcal{A}_-}$, alors $\varphi_-^{*-1} = \varphi$. D'où d'après la proposition 8, $z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)$ est constant. La proposition résulte alors des équations :

$$\dot{h}(0) = \mathrm{Res}(\varphi \circ B_\alpha) \quad \text{et} \quad z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) = \mathrm{Res}(\varphi \circ B_\alpha).$$

On suppose que $\varphi \in G^{\alpha}_{\mathcal{A}}$ et considerons la décomposition de Birkhoff. Comme φ^{*-1} et $\varphi_+ \in G^{\alpha}_{\mathcal{A}}$, en appliquant la proposition 8 nous obtenons :

$$\varphi_{t,\alpha} = \varphi * h_{t,\alpha}$$
$$(\varphi_-^{*-1})_{t,\alpha} = \varphi_-^{*-1} * v_{t,\alpha}$$
$$(\varphi_+)_{t,\alpha} = \varphi_+ * w_{t,\alpha},$$

et l'égalité :

$$\varphi_{t,\alpha} = (\varphi_-^{*-1})_{t,\alpha} * (\varphi_+)_{t,\alpha}$$

donne :

$$\begin{aligned} h_{t,\alpha} &= \varphi^{*-1} * \varphi_{t,\alpha} \\ &= \varphi^{*-1} * (\varphi_-^{*-1})_{t,\alpha} * (\varphi_+)_{t,\alpha} \\ &= \varphi^{*-1} * (\varphi_-^{*-1}) * v_{t,\alpha} * \varphi_+ * w_{t,\alpha}. \end{aligned}$$

Donc :

$$h_{t,\alpha} = (\varphi_+)^{*-1} * v_{t,\alpha} * \varphi_+ * w_{t,\alpha}. \tag{2.30}$$

On désigne par $F_{t,\alpha}, V_{t,\alpha}, W_{t,\alpha}$ respectivement les sous-groupes à un paramètre obtenus par $h_{t,\alpha}, v_{t,\alpha}, w_{t,\alpha}$ à $z = 0$, il est clair que $(\varphi_+)_{|z=0} = e$ et de même $W_{t,\alpha}$ est un groupe à un paramètre constant reduit à l'élément neutre e. Ainsi l'équation (2.30) à $z = 0$ se réduit en :

$$F_{t,\alpha} = V_{t,\alpha}.$$

Ce qui prouve la prémière affirmation. En utilisant la propriété de cocycle on obtient :

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-^{*-1} * \varphi_+) = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_+) + \varphi_+^{*-1} * \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-^{*-1}) * \varphi_+.$$

Donc :

$$\mathrm{Res}\left(\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)\right) = \mathrm{Res}\left(\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-^{*-1})\right).$$

Comme :

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(e) = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_- * \varphi_-^{*-1}) = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-) + \varphi_-^{*-1} * \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-^{*-1}) * \varphi_- = 0,$$

on a donc :

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-^{*-1}) = -\varphi_-^{*-1} * \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-) * \varphi_-,$$

d'où :

$$\mathrm{Res}(\varphi_-^{*-1} \circ B_\alpha) = -\mathrm{Res}(\varphi_- \circ B_\alpha).$$

□

Chapitre 3

Algèbres de Hopf de graphes de Feynman

Dans ce chapitre, nous construisons une structure d'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ sur l'espace des graphes de Feynman spécifiés d'une théorie quantique des champs $\mathcal{T}$. Nous définissons ainsi un produit de convolution $\circledast$ et un semi-groupe de caractères de cette algèbre de Hopf à valeurs dans une algèbre commutative qui prend en compte la dépendance en les moments extérieurs. Nous mettons en place alors la renormalisation décrite par A. Connes et D. Kreimer en [10] et la décomposition de Birkhoff pour deux schémas de renormalisation : le schéma minimal de renormalisation et le schéma de développement de Taylor. Le contenu de ce chapitre est le sujet d'un article en collaboration avec Dominique Manchon [4].

1 Définitions générales

Un graphe de Feynman est un graphe (non plan) avec un nombre fini de sommets et d'arêtes, qui peuvent être internes ou externes. Une arête interne est une arête connectée aux deux extrémités à un sommet, une arête externe est une arête avec une extrémité ouverte, l'autre extrémité étant reliée à un sommet. les arêtes s'obtiennent à l'aide de demi-arêtes.
Plus précisément, on considère deux ensembles finis $\mathcal{V}$ et $\mathcal{E}$. Un graphe Γ avec $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{E}$) comme ensemble des sommets (resp. demi-arêtes) est défini comme suit : Soit $\sigma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une involution et $\partial : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}$. Pour tout sommet $v \in \mathcal{V}$ on désigne par $st(v) = \{e \in \mathcal{E}/\partial(e) = v\}$ l'ensemble des demi-arêtes arrivant sur v. Les points fixes de σ sont les *arêtes externes* et les *arêtes internes* sont données par les paires $\{e, \sigma(e)\}$ pour $e \neq \sigma(e)$. Le graphe Γ associé à ces données est obtenu en attachant les demi–arêtes $e \in st(v)$ à tout sommet $v \in \mathcal{V}$, et en joignant les deux demi-arêtes e et $\sigma(e)$ si $\sigma(e) \neq e$.

On désigne par $\mathcal{I}(\Gamma)$ l'ensemble des arêtes internes et par $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ l'ensemble des arêtes externes. Le nombre de boucles d'un graphe Γ est défini par :

$$L(\Gamma) = |\mathcal{I}(\Gamma)| - |\mathcal{V}(\Gamma)| + |\pi_0(\Gamma)|\,,$$

où $\pi_0(\Gamma)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de Γ.

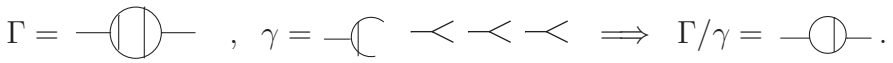
Un graphe irréductible à une particule (en bref, graphe $1PI$) est un graphe connexe et qui reste connexe quand on coupe toute arête interne. Un graphe non connexe est dit localement $1PI$ si toutes ses composantes connexes sont $1PI$.



Un sous-graphe couvrant de Γ est un graphe de Feynman γ (pas forcement connexe), obtenu à partir de Γ en coupant des arêtes internes. Autrement dit :

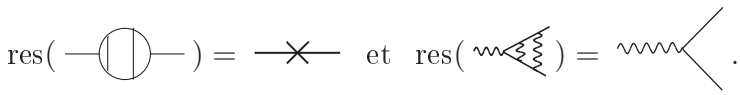
1. $\mathcal{V}(\gamma) = \mathcal{V}(\Gamma)$.
2. $\mathcal{E}(\gamma) = \mathcal{E}(\Gamma)$.
3. $\sigma_\Gamma(e) = e \Longrightarrow \sigma_\gamma(e) = e$.
4. Si $\sigma_\gamma(e) \neq \sigma_\Gamma(e)$ alors $\sigma_\gamma(e) = e$ et $\sigma_\gamma(\sigma_\Gamma(e)) = \sigma_\Gamma(e)$.

Pour tout sous-graphe couvrant γ, le graphe contracté Γ/γ est défini par contraction de toutes les composantes connexes de γ sur un point. Par exemple,

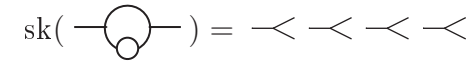


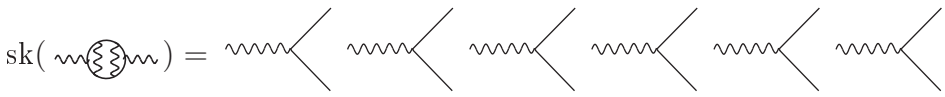


Le résidu d'un graphe Γ noté $\operatorname{res}\Gamma$ est le graphe contracté Γ/Γ, autrement dit c'est le graphe sans arêtes internes dont les arêtes externes sont celles de Γ.



Le squelette d'un graphe Γ noté $\operatorname{sk}\Gamma$ est graphe obtenu en coupant toutes les arêtes internes, par exemple :

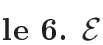




2 Algèbre de Hopf des graphes de Feynman non spécifiés

2.1 Bigèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$

On se placera dans le cadre d'une théorie physique $\mathcal{T}$ qui se traduit par l'apparition de graphes de Feynman d'un certain type : φ^3, φ^4, QED, QCD etc.
On désigne par $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ l'ensemble des types de demi-arêtes possibles et par $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ l'ensemble de types de sommets possibles.

Exemple 6. $\mathcal{E}(\varphi^3) = \{$  $\}$, $\mathcal{V}(\varphi^3) = \{$ $\}$

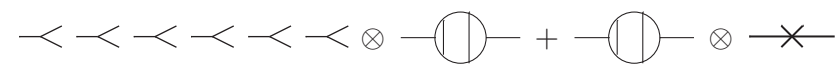
$\mathcal{E}(QED) = \{$ $\}$, $\mathcal{V}(QED) = \{$  $\}$

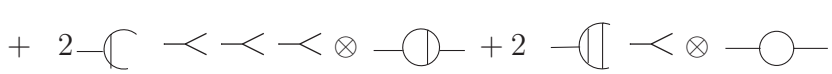
Un élément de $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ peut se voir comme une fonction de $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ dans $\mathbb{N}$ qui à chaque type d'arête associe le nombre d'arêtes de ce type arrivant sur le sommet en question. En fait la typologie des sommets presentée ici est encore trop grossière : nous y reviendrons à la section 2, avec l'introduction des graphes spécifiés.
Soit $\widetilde{V}_{\mathcal{T}}$ l'ensemble des graphes Γ connexes $1PI$ avec arêtes dans $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ et sommets dans $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ tels que $\operatorname{res}\Gamma$ soit un sommet dans $V_{\mathcal{T}}$ (condition de divergence superficielle [2], [10], [26]). Par exemple $\Gamma =$  est exclu de la théorie φ^3 car son résidu fait apparaître un sommet tétravalent.
Soit $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}} = S(\widetilde{V}_{\mathcal{T}})$ l'espace vectoriel engendré par des graphes de Feynman localement $1PI$ pas nécessairement connexes. Le produit est donné par la concaténation, l'unité $\mathbf{1}$ est identifiée avec le graphe vide et le coproduit est défini par :

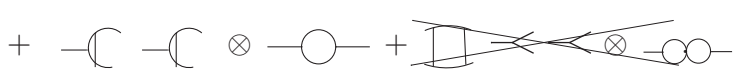
$$\Delta(\Gamma) = \sum_{\substack{\gamma\subseteq\Gamma \\ \Gamma/\gamma\in\mathcal{T}}} \gamma\otimes\Gamma/\gamma. \tag{3.1}$$

Dans la somme ci-dessus, γ parcourt tous les sous-graphes couvrants localement $1PI$ de Γ, tels que le sous-graphe contracté Γ/γ soit dans la théorie $\mathcal{T}$, c'est-à-dire tels que tous les sommets de Γ/γ sont d'un type appartenant à $\mathcal{V}(\mathcal{T})$.

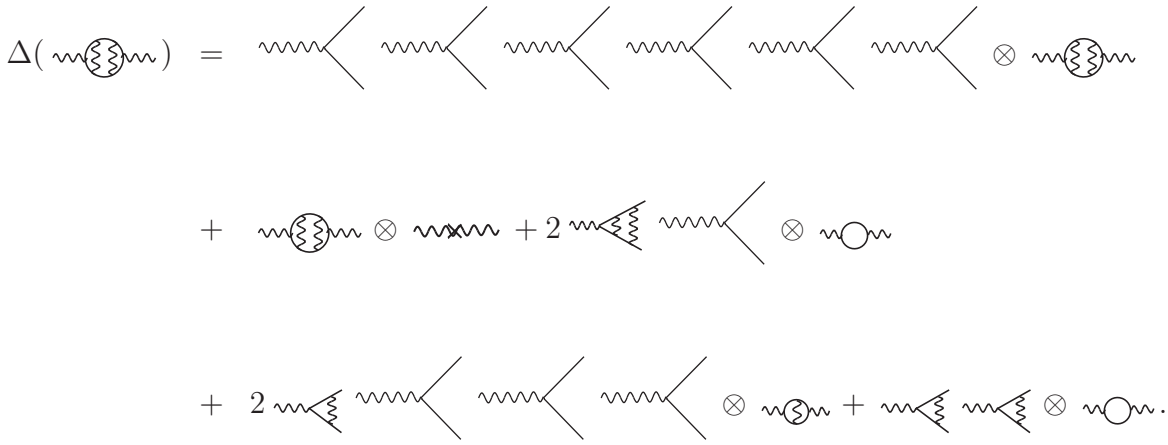
Exemple 7. En théorie φ^3 :

$\Delta($  $) =$ 





Le dernier terme est supprimé car  $\notin \mathcal{T}$.
En QED :



Théorème 7. *Munie de ce coproduit, $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ est une bigèbre.*

Preuve. Δ est coassociatif. En effet :

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)\Delta(\Gamma) &= \sum_{\substack{\gamma \subseteq \Gamma \\ \Gamma/\gamma \in \mathcal{T}}} \Delta(\gamma) \otimes \Gamma/\gamma \\ &= \sum_{\substack{\delta \subseteq \gamma \subseteq \Gamma \\ \gamma/\delta\ ; \Gamma/\gamma \in \mathcal{T}}} \delta \otimes \gamma/\delta \otimes \Gamma/\gamma.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta)\Delta(\Gamma) &= \sum_{\substack{\delta \subseteq \Gamma \\ \Gamma/\delta \in \mathcal{T}}} \delta \otimes \Delta(\Gamma/\delta) \\ &= \sum_{\substack{\delta \subseteq \Gamma\ ;\ \widetilde{\gamma} \subseteq \Gamma/\delta \\ (\Gamma/\delta)/\widetilde{\gamma}\ ;\ \Gamma/\delta \in \mathcal{T}}} \delta \otimes \widetilde{\gamma} \otimes (\Gamma/\delta)/\widetilde{\gamma}.\end{aligned}$$

Pour tout sous-graphe couvrant δ de Γ tel que $\Gamma/\delta \in \mathcal{T}$, il y a une bijection évidente $\gamma \mapsto \widetilde{\gamma} = \gamma/\delta$ de l'ensemble des sous-graphes de Γ contenant δ tels que $\Gamma/\gamma \in \mathcal{T}$ et $\gamma/\delta \in \mathcal{T}$, sur l'ensemble des sous-graphes couvrants de Γ/δ tels que $(\Gamma/\delta)/\widetilde{\gamma} \in \mathcal{T}$, donnée par la contraction de δ [29]. Pour tout $\widetilde{\gamma} \subseteq \Gamma/\delta$ il existe un unique sous-graphe couvrant γ de Γ contenant δ tel que : $\widetilde{\gamma} \cong \gamma/\delta$ et on a : $(\Gamma/\delta)/\widetilde{\gamma} \cong \Gamma/\gamma$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta)\Delta(\Gamma) &= \sum_{\substack{\delta \subseteq \gamma \subseteq \Gamma \\ \Gamma/\delta \in \mathcal{T}}} \delta \otimes \Delta(\Gamma/\delta) \\ &= \sum_{\substack{\delta \subseteq \gamma \subseteq \Gamma \\ \Gamma/\gamma\ ;\ \gamma/\delta \in \mathcal{T}}} \delta \otimes \gamma/\delta \otimes \Gamma/\gamma.\end{aligned}$$

Les deux expressions coïncident donc Δ est coassociatif. La co-unité est donnée par $\varepsilon(\Gamma) = 1$ si Γ n'a pas d'arêtes internes, et $\varepsilon(\Gamma) = 0$ pour tout graphe possédant au moins une arête interne. La bigèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ est graduée suivant le nombre de boucles L. □

2.2 Algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$

L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ est obtenue en identifiant tous les éléments de degré zéro (les résidus) à l'unité $\mathbf{1}$:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}/\mathcal{J} \tag{3.2}$$

où $\mathcal{J}$ est le (bi-) idéal engendré par les éléments $\mathbf{1} - \operatorname{res}\Gamma$ où Γ est un graphe $1PI$. La bigèbre $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ est évidemment graduée connexe, elle est donc une algèbre de Hopf graduée connexe, qui peut être identifiée comme algèbre commutative avec $S(\mathcal{V}_{\mathcal{T}})$, où $\mathcal{V}_{\mathcal{T}}$ est l'espace vectoriel engendré par les graphes de Feynman connexes $1PI$. Le coproduit devient alors :

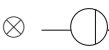
$$\Delta(\Gamma) = \mathbf{1} \otimes \Gamma + \Gamma \otimes \mathbf{1} + \sum_{\substack{\gamma \text{ sous graphe propre de } \Gamma \\ \text{loc 1PI. } \Gamma/\gamma \in \mathcal{T}}} \gamma \otimes \Gamma/\gamma, \tag{3.3}$$

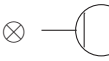
et l'antipode S est donné recursivement sur le degré du graphe Γ par :

$$S(\Gamma) = -\Gamma - \sum_{\substack{\gamma \text{ sous graphe propre de } \Gamma \\ \text{loc 1PI. } \Gamma/\gamma \in \mathcal{T}}} S(\gamma)\Gamma/\gamma. \tag{3.4}$$

Exemple 8. En théorie φ^3

$\Delta($  $) = \mathbf{1} \otimes$  $+$  $\otimes \mathbf{1}$

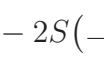
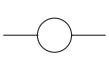
$\Delta($  $) = \mathbf{1} \otimes$  $+$  $\otimes \mathbf{1} + 2$ 

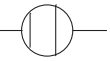
$\Delta($  $) = \mathbf{1} \otimes$  $+$  $\otimes \mathbf{1} + 2$ 

$+ \; 2$  $\otimes$  $+$  $\otimes$  $+$ 

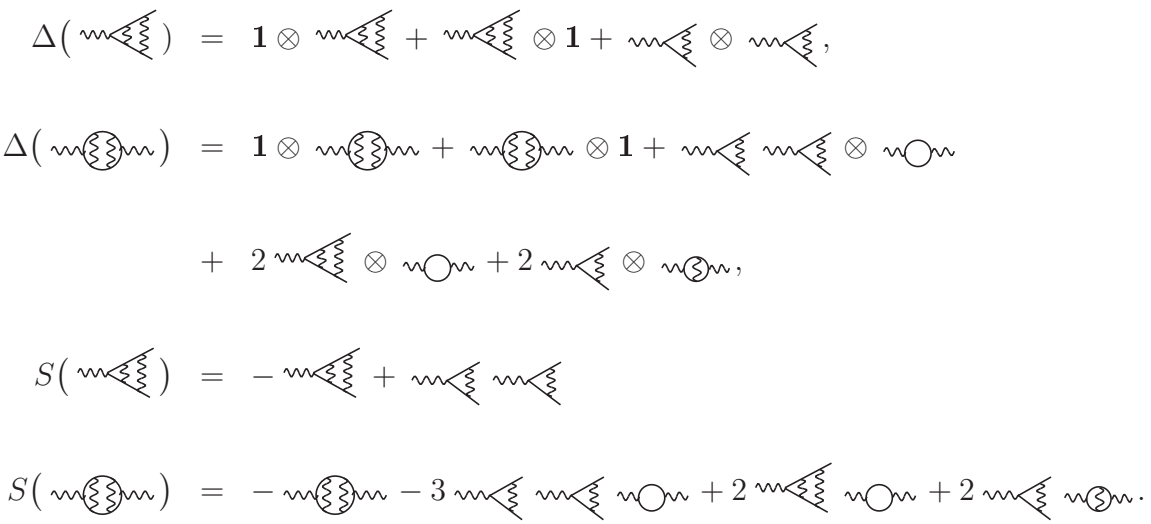
$S($  $) = -$

$S($  $) = -$ $+ 2$ 

$S($  $) = -$ $- 2S($  $)$  $- 2S($  $)$  $- S($  $)$ 

$= -$ $+ 2$   $+ 2$   $- 3$   .

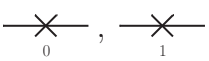
En QED :

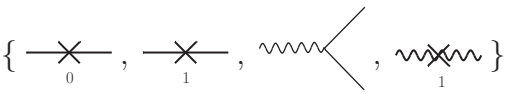


3 Algèbre de Hopf des graphes de Feynman specifiés

3.1 Bigèbre $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$

Dans ce paragraphe, on désigne par $\widetilde{\mathcal{V}}(\mathcal{T})$ l'ensemble de types raffinés de sommets possibles : Pour $t \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ on peut avoir des sommets de même type t mais de type raffiné différent. Pour tout type raffiné $\widetilde{t} \in \widetilde{\mathcal{V}}(\mathcal{T})$ on note $[\,\widetilde{t}\,]$ le type de sommet sous-jacent. On notera egalement $\widetilde{t} = (t, i)$ où l'indice i sert à distinguer les types raffinés de même type sous-jacent.

Exemple 9. $\widetilde{\mathcal{V}}(\varphi^3) = \{$  $\}$

$\widetilde{\mathcal{V}}(QED) = \{$  $\}$

Remarque 12. *Notons bien que les types des demi-arêtes adjacentes à un sommet v ne suffisent pas à determiner son type.*

Définition 27. *Un graphe spécifié de la théorie $\mathcal{T}$ est un couple $(\Gamma, \underline{i})$ où :*

1. *Γ est un graphe localement $1PI$ avec demi-arêtes et sommets de type prescrit dans $\mathcal{T}$.*
2. *$\underline{i} : \pi_0(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{N}$, les valeurs de $\underline{i}(\gamma)$ étant prescrites par les types possibles du sommet obtenu en contractant la composante connexe γ sur un point.*

$(\gamma, \underline{j})$ est un sous-graphe couvrant spécifié de $(\Gamma, \underline{i})$, $\big((\gamma, \underline{j}) \subset (\Gamma, \underline{i})\big)$ si :

1. *γ est un-sous graphe couvrant de Γ.*
2. *Si γ_0 est une composante connexe pleine de γ, i.e si γ_0 est aussi une composante connexe de Γ, alors $\underline{j}(\gamma_0) = \underline{i}(\gamma_0)$.*

Remarque 13. *Parfois on notera* $\bar{\Gamma} = (\Gamma, \underline{i})$ *un graphe spécifié, et on écrira* $\bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma}$ *pour* $(\gamma, \underline{j}) \subset (\Gamma, \underline{i})$.

Définition 28. *Soit* $(\gamma, \underline{j}) \subset (\Gamma, \underline{i})$. *Le graphe spécifié contracté s'écrit :*

$$\bar{\Gamma}/\bar{\gamma} = (\Gamma/\bar{\gamma}, \underline{i}), \tag{3.5}$$

où $\bar{\Gamma}/\bar{\gamma}$ *est obtenu en contractant chaque composante connexe de* γ *sur un point, et en spécifiant le sommet obtenu à l'aide de* $\underline{j}$.

Remarque 14. *La spécification* $\underline{i}$ *est la même pour le graphe* $\bar{\Gamma}$ *et le graphe contracté* $\bar{\Gamma}/\bar{\gamma}$.

Soit $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ l'espace vectoriel engendré par les graphes de Feynman spécifiés d'une théorie des champs $\mathcal{T}$. Le produit est donné par la concaténation, L'unité $\mathbf{1}$ est identifiée avec le graphe vide et le coproduit est défini par :

$$\Delta(\bar{\Gamma}) = \sum_{\substack{\bar{\gamma}\subseteq\bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma}\in\mathcal{T}}} \bar{\gamma} \otimes \bar{\Gamma}/\bar{\gamma}, \tag{3.6}$$

La somme porte sur les sous-graphes couvrants spécifiés $\bar{\gamma} = (\gamma, \underline{j})$ localement $1PI$, tels que le graphe contracté $(\Gamma/(\gamma, \underline{j}), \underline{i})$ appartient à la théorie $\mathcal{T}$.

Théorème 8. *Munie du coproduit* Δ, $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ *est une bigèbre.*

Preuve. Δ est coassociatif. En effet :

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)\Delta(\bar{\Gamma}) &= \sum_{\substack{\bar{\gamma}\subseteq\bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma}\in\mathcal{T}}} \Delta(\bar{\gamma}) \otimes \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \\ &= \sum_{\substack{\bar{\delta}\subseteq\bar{\gamma}\subseteq\bar{\Gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta}\ ;\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma}\in\mathcal{T}}} \bar{\delta} \otimes \bar{\gamma}/\bar{\delta} \otimes \bar{\Gamma}/\bar{\gamma}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta)\Delta(\bar{\Gamma}) &= \sum_{\substack{\bar{\delta}\subseteq\bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\delta}\in\mathcal{T}}} \bar{\delta} \otimes \Delta(\bar{\Gamma}/\bar{\delta}) \\ &= \sum_{\substack{\bar{\delta}\subseteq\bar{\Gamma}\ ;\ \bar{\alpha}\subseteq\bar{\Gamma}/\bar{\delta} \\ (\bar{\Gamma}/\bar{\delta})/\bar{\alpha}\ ;\ \bar{\Gamma}/\bar{\delta}\in\mathcal{T}}} \bar{\delta} \otimes \bar{\alpha} \otimes (\bar{\Gamma}/\bar{\delta})/\bar{\alpha}.\end{aligned}$$

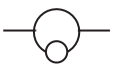
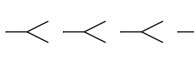
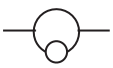
Pour tout sous-graphe spécifié $\bar{\delta}$ il y a une bijection évidente $\bar{\gamma} \mapsto \bar{\alpha} = \bar{\gamma}/\bar{\delta}$ de l'ensemble des sous-graphes couvrants de $\bar{\Gamma}$ contenant $\bar{\delta}$ tels que $(\bar{\Gamma}/\bar{\delta})/\bar{\alpha}; \bar{\Gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}$, sur l'ensemble des sous-graphes couvrants de $\bar{\Gamma}/\bar{\delta}$ tels que $\bar{\gamma}/\bar{\delta}\ ; \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}$, donnée par la contraction de $\bar{\delta}$. Donc

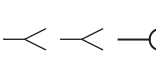
pour tout $\bar{\alpha} = (\alpha, \underline{j})$ sous-graphe spécifié de $\Gamma/\bar{\delta}$ il existe un unique $\bar{\gamma} = (\gamma, \underline{j})$ sous-graphe spécifié de $\bar{\Gamma}$ tel que $\delta \subseteq \gamma$ et $\alpha \cong \gamma/\delta$, d'où : $\bar{\alpha} \cong \bar{\gamma}/\bar{\delta}$ et $(\bar{\Gamma}/\bar{\delta})/\bar{\alpha} \cong \bar{\Gamma}/\bar{\gamma}$. On obtient alors :

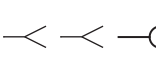
$$(id \otimes \Delta)\Delta(\bar{\Gamma}) \;=\; \sum_{\substack{\bar{\delta}\subseteq\bar{\gamma}\subseteq\bar{\Gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta}\ ;\bar{\Gamma}/\bar{\gamma}\in\mathcal{T}}} \bar{\delta} \otimes \bar{\gamma}/\bar{\delta} \otimes \bar{\Gamma}/\bar{\gamma}.$$

Donc Δ est coassociatif, $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ est donc une bigèbre dont la co-unité est donnée par $\varepsilon(\bar{\Gamma}) = 1$ si $\bar{\Gamma}$ est un graphe spécifié sans arêtes internes et $\varepsilon(\bar{\Gamma}) = 0$ pour $\bar{\Gamma}$ contenant au moins une arête interne. □

Exemple 10. En théorie φ^3 *:*

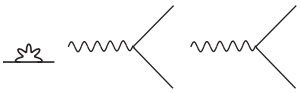
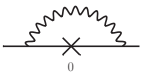
$\Delta($  $, 0) \;=\; ($  $, 0) \otimes$  $+$  $\otimes ($  $, 0)$

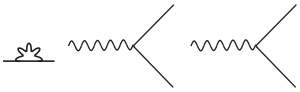
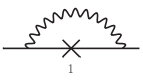
$+ \;($  $, 0) \otimes ($  $, 0)$

$+ \;($  $, 1) \otimes ($  $, 0).$

En QED :

$\Delta($  $, 1) \;=\;$  $\otimes ($  $, 1)$

$+ \;($  $, 1) \otimes$  $+ ($  $, 0) \otimes ($  $, 1)$

$+ \;($  $, 1) \otimes ($  $, 1).$

3.2 Algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$

L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ est obtenue en identifiant tous les éléments de degré zéro (les résidus) à l'unité $\mathbf{1}$:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}/\mathcal{J} \tag{3.7}$$

où $\mathcal{J}$ est le (bi-) idéal engendré par les éléments $\mathbf{1} - \operatorname{res}\bar{\Gamma}$ où $\bar{\Gamma}$ est un graphe spécifié. La bigèbre $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ est évidemment graduée, elle est donc une algèbre de Hopf graduée connexe. Le

coproduit devient alors :

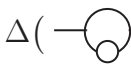
$$\Delta(\bar{\Gamma}) = \mathbf{1} \otimes \bar{\Gamma} + \bar{\Gamma} \otimes \mathbf{1} + \sum_{\substack{\bar{\gamma} \text{ sous graphe propre de } \bar{\Gamma} \\ \text{loc 1PI. } \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \bar{\gamma} \otimes \bar{\Gamma}/\bar{\gamma}, \tag{3.8}$$

et l'antipode est donné récursivement sur le degré de Γ par :

$$S(\bar{\Gamma}) = -\bar{\Gamma} - \sum_{\substack{\bar{\gamma} \text{ sous graphe propre de } \bar{\Gamma} \\ \text{loc 1PI. } \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} S(\bar{\gamma})\bar{\Gamma}/\bar{\gamma}, \tag{3.9}$$

Exemple 11. En prenant les même graphes que l'exemple 10 on obtient : en φ^3, [10] :

$\Delta($  $) = ($ $) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes ($ $)$

$\Delta($  $) = ($ $) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes ($ $)$

$+ ($ $) \otimes ($  $) + ($ $) \otimes ($ $),$

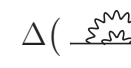
$S($ $) = -($ $)$

$S($ $) = -($ $) - S($ $)($ $) - S($ $)($ $)$

$= -($ $) + ($ $)($ $) + ($ $)($ $).$

En QED [39] :

$\Delta($  $) = \mathbf{1} \otimes ($ $) + ($ $) \otimes \mathbf{1}$

$\Delta($  $) = \mathbf{1} \otimes ($ $) + ($ $) \otimes \mathbf{1}$

$+ ($ $) \otimes ($  $) + ($ $) \otimes ($ $),$

$S($ $) = -($ $)$

$S($ $) = -($ $) - S($ $)($ $) - S($ $)($ $)$

$= -($ $) + ($ $)($ $) + ($ $)($ $).$

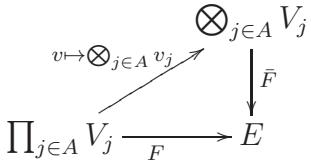
4 Structure extérieure

4.1 Produit tensoriel non ordonné

Soit A un ensemble fini, et V_j un espace vectoriel pour tout $j \in A$. Le produit $\prod_{j\in A} V_j$ est défini par :

$$\prod_{j\in A} V_j := \{v : A \longrightarrow \coprod_{j\in A} V_j \ , \ v(i) \ \in \ V_i, \ \forall \, i \ \in A\}.$$

L'espace $V := \bigotimes_{j\in A} V_j$ est alors défini par la propriété universelle suivante : pour tout espace vectoriel E et pour toute application multilinéaire $F : \prod_{j\in A} V_j \longrightarrow E$, il existe une unique application linéaire $\bar{F}$ tel que le diagramme suivant est commutatif :



Remarque 15. *Soit $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_j}$ une base de V_j. Une base de $\bigotimes_{j\in A} V_j$ est donnée par :*

$$\left(f_\mu = \bigotimes_{j\in A} e_{\mu(j)}\right)_{\mu\in\Lambda},$$

où $\Lambda = \prod_{j\in A} \Lambda_j = \{\mu : A \longrightarrow \coprod_{j\in A} \Lambda_j \ \ tel\ que \ \ \mu(j) \in \Lambda_j, \ \forall j \in A\}.$

4.2 Une algèbre de fonctions $\mathcal{C}^\infty$

Soit d un entier ≥ 1 (la dimension). Pour chaque demi-arête e de Γ on désigne par $p_e \in \mathbb{R}^d$ le moment correspondant. On désigne par $\mathcal{E}(\Gamma)$ l'espace vectoriel engendré par les demi-arêtes de Γ, et on prolonge $e \longmapsto p_e$ en une application linéaire de $\mathcal{E}(\Gamma)$ dans $\mathbb{R}^d$. Plus précisément l'espace des moments du graphe Γ est défini par :

$$W_\Gamma = \{p : \mathcal{E}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R}^d, \sum_{e\in st(v)} p_e = 0 \ \ \forall v \in \mathcal{V}(\Gamma), \ \ p_e + p_{\sigma(e)} = 0 \ \ \forall e \in \mathcal{E}(\Gamma) \ \ / \ \ e \neq \sigma(e)\}.$$

En particulier,

$$W_{\mathrm{res}\,\Gamma} = \{(p_1, \cdots, p_{|\mathrm{Ext}(\Gamma)|}), p_j \in \mathbb{R}^D, \sum_{j=1}^{|\mathrm{Ext}(\Gamma)|} p_j = 0\}.$$

On pose alors pour Γ connexe :

$$V_\Gamma = \mathcal{C}^\infty(W_\Gamma, \mathbb{C}),$$

pour $\Gamma = \Gamma_1 \cdots \Gamma_r$, on pose :

$$V_\Gamma = \bigotimes_{j\in\{1,\cdots,r\}} V_{\Gamma_j},$$

c'est le produit tensoriel non-ordonné des V_{Γ_j} où les Γ_j sont les composantes connexes de Γ. Et enfin :

$$\mathcal{B} := \prod_{\Gamma \text{ connexe ou non}} V_\Gamma. \tag{3.10}$$

L'espace V_Γ s'identifie naturellement à un sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(W_\Gamma, \mathbb{C})$ via :

$$\bigotimes_{j\in A} v_j(p) := \prod_{j\in A} v_j(p_j) \text{ avec } p_j := p_{|\mathcal{E}(\Gamma_j)}.$$

On munit par ailleurs $\mathcal{B}$ du produit de concaténation non-ordonné qu'on note $\bullet$: pour $v = \bigotimes_{j\in A} v_j \in V_\Gamma$ et $v' = \bigotimes_{j\in B} v_j \in V_{\Gamma'}$, le produit $v \bullet v' \in V_{\Gamma\Gamma'}$ est défini par :

$$v \bullet v' = \bigotimes_{j\in A\coprod B} v_j. \tag{3.11}$$

Le produit $\bullet$ est commutatif par définition. Cette définition s'étend naturellement en un produit bilinéaire : $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$.

Proposition 16. *Soient deux graphes Γ_1 et Γ_2 (pas forcément connexes), et soit $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2$. Pour tout $v_1, v_1' \in V_{\Gamma_1}$ et $v_2, v_2' \in V_{\Gamma_2}$ on a l'égalité suivante dans V_Γ :*

$$(v_1 v_1') \bullet (v_2 v_2') = (v_1 \bullet v_2)(v_1' \bullet v_2').$$

Preuve. Pour $p_1 \in W_{\Gamma_1}$ et $p_2 \in W_{\Gamma_2}$ on a :

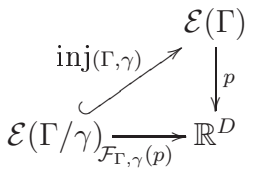
$$\begin{aligned}
(v_1 v_1') \bullet (v_2 v_2')(p_1, p_2) &= v_1 v_1'(p_1) v_2 v_2'(p_2) \\
&= v_1(p_1) v_1'(p_1) v_2(p_2) v_2'(p_2) \\
&= v_1(p_1) v_2(p_2) v_1'(p_1) v_2'(p_2) \\
&= (v_1 \bullet v_2)(p_1, p_2)(v_1' \bullet v_2')(p_1, p_2) \\
&= (v_1 \bullet v_2)(v_1' \bullet v_2')(p_1, p_2).
\end{aligned}$$

□

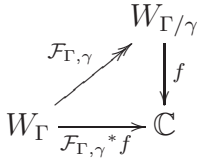
4.3 Produit de convolution $\circledast$

Soit Γ un graphe et γ un sous-graphe de Γ, on désigne par $i_{\Gamma,\gamma} : V_{\Gamma/\gamma} \hookrightarrow V_\Gamma$ et $\pi_{\gamma,\Gamma} : V_\gamma \twoheadrightarrow V_\Gamma$ deux morphismes d'algèbres qui sont définis comme suit :

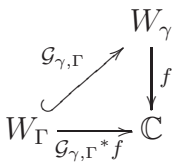
Soit $\mathcal{F}_{\Gamma,\gamma} : W_\Gamma \to W_{\Gamma/\gamma}$ la projection de W_Γ sur $W_{\Gamma/\gamma}$ en oubliant les moments intérieurs de γ, que l'on peut encore définir par le diagramme commutatif suivant :



où $\mathrm{inj}(\Gamma,\gamma)$ est l'injection naturelle et $\mathcal{F}_{\Gamma,\gamma} = \mathrm{inj}(\Gamma,\gamma)^*$. On considère maintenant le diagramme suivant :



On définit l'injection $i_{\Gamma,\gamma}$ par : $i_{\Gamma,\gamma} = \mathcal{F}_{\Gamma,\gamma}{}^*$. On désigne par $\mathcal{G}_{\gamma,\Gamma} : W_\Gamma \hookrightarrow W_\gamma$ l'inclusion naturelle de W_Γ dans W_γ et on considère le diagramme suivant :



On définit la surjection $\pi_{\gamma,\Gamma}$ par : $\pi_{\gamma,\Gamma} := \mathcal{G}_{\gamma,\Gamma}{}^* : V_\gamma \twoheadrightarrow V_\Gamma$.

Soit $\widetilde{\mathcal{H}}_\mathcal{T}$ la bigèbre de graphes de Feynman spécifiés associée à une théorie $\mathcal{T}$. On désigne par $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}}_\mathcal{T}, \mathcal{B})$ l'espace des applications $\mathbb{C}$-linéaires $\chi : \widetilde{\mathcal{H}}_\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{B}$, et par $\widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\mathcal{H}}_\mathcal{T}, \mathcal{B})$ le sous-espace de $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}}_\mathcal{T}, \mathcal{B})$ des χ tels que :

1. χ ne dépend pas de la spécification de Γ, c-à-d : $\chi(\Gamma, \underline{i}) = \chi(\Gamma)$.
2. $\chi(\Gamma) \in V_\Gamma$ pour tout graphe Γ.
3. $\chi(\Gamma) = \mathbf{1}_{V_\Gamma}$ si Γ n'a pas d'arêtes internes, où $\mathbf{1}_{V_\Gamma}$ désigne la fonction constante égale à $\mathbf{1}$ sur W_Γ.

On définit alors un produit de convolution $\circledast$ pour tout $\chi, \eta \in \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\mathcal{H}}_\mathcal{T}, \mathcal{B})$ et pour tout graphe spécifié $(\Gamma, \underline{i})$ par :

$$(\chi \circledast \eta)(\Gamma, \underline{i}) = (\chi \circledast \eta)(\Gamma) = \sum_{\substack{(\gamma,\underline{j}) \subset (\Gamma,\underline{i}) \\ (\Gamma,\underline{i})/(\gamma,\underline{j}) \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\chi(\gamma)] i_{\Gamma,\gamma}\big[\eta\big(\Gamma/(\gamma,\underline{j})\big)\big]. \tag{3.12}$$

Le produit utilisé dans le membre de droite est le produit point par point dans V_Γ.

Théorème 9. *Le produit $\circledast$ est associatif.*

Preuve. Soient χ, η et ξ trois éléments de $\widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}, \mathcal{B})$ et $(\Gamma, \underline{i})$ un graphe specifié. On notera indifféremment $\bar{\Gamma} = (\Gamma, \underline{i})$, $\bar{\gamma} = (\gamma, \underline{j})$, $\bar{\delta} = (\delta, \underline{k})$ et $\bar{\Gamma}/\bar{\gamma} = (\Gamma/(\gamma, \underline{j}), \underline{i})$. D'une part on a :

$$\begin{aligned}
\chi \circledast (\eta \circledast \xi)(\Gamma, \underline{i}) &= \chi \circledast (\eta \circledast \xi)(\Gamma) \\
&= \sum_{\substack{\bar{\delta} \subset \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} \pi_{\delta,\Gamma}[\chi(\delta)]\; i_{\Gamma,\delta}\Big[(\eta \circledast \xi)(\bar{\Gamma}/\bar{\delta})\Big] \\
&= \sum_{\substack{\bar{\delta} \subset \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} \pi_{\delta,\Gamma}[\chi(\delta)]\; i_{\Gamma,\delta}\Big[\sum_{\substack{\bar{\alpha} \subset \bar{\Gamma}/\delta \\ (\bar{\Gamma}/\bar{\delta})/\bar{\alpha} \in \mathcal{T}}} \pi_{\alpha,\Gamma/\delta}[\eta(\alpha)] i_{\Gamma/\delta,\alpha}[\xi((\bar{\Gamma}/\bar{\delta})/\bar{\alpha})]\Big].
\end{aligned}$$

En identifiant $\bar{\alpha}$ à $\bar{\gamma}/\bar{\delta}$ où $\bar{\gamma}$ est un sous-graphe de $\bar{\Gamma}$ contenant $\bar{\delta}$, et $(\bar{\Gamma}/\bar{\delta})/\bar{\alpha}$ à $\bar{\Gamma}/\bar{\gamma}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\chi \circledast (\eta \circledast \xi)(\Gamma, \underline{i}) &= \chi \circledast (\eta \circledast \xi)(\Gamma) \\
&= \sum_{\substack{\bar{\delta} \subset\, \bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta};\, \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\delta,\Gamma}[\chi(\delta)]\; i_{\Gamma,\delta}\Big[\pi_{\gamma/\delta,\Gamma/\delta}[\eta(\bar{\gamma}/\bar{\delta})] i_{\Gamma/\delta,\gamma/\delta}[\xi(\bar{\Gamma}/\bar{\gamma})]\Big] \\
&= \sum_{\substack{\bar{\delta} \subset\, \bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta};\, \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\delta,\Gamma}[\chi(\delta)]\; i_{\Gamma,\delta} \pi_{\gamma/\delta,\Gamma/\delta}[\eta(\bar{\gamma}/\bar{\delta})] i_{\Gamma,\delta} i_{\Gamma/\delta,\gamma/\delta}[\xi(\bar{\Gamma}/\bar{\gamma})].
\end{aligned}$$

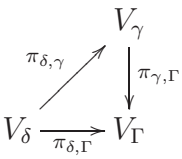
D'autre part on a :

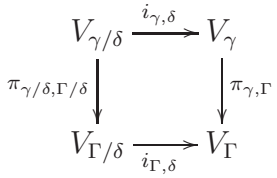
$$\begin{aligned}
(\chi \circledast \eta) \circledast \xi(\Gamma, \underline{i}) &= (\chi \circledast \eta) \circledast \xi(\Gamma) \\
&= \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\chi \circledast \xi(\gamma)]\; i_{\Gamma,\gamma}[\xi(\bar{\Gamma}/\bar{\gamma})] \\
&= \sum_{\substack{\bar{\delta} \subset\, \bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta};\, \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}\Big[\pi_{\delta,\gamma}\chi(\delta) i_{\delta,\gamma}[\eta(\bar{\gamma}/\bar{\delta})]\Big]\; i_{\Gamma,\gamma}[\xi(\bar{\Gamma}/\bar{\gamma})] \\
&= \sum_{\substack{\bar{\delta} \subset\, \bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta};\, \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}\pi_{\delta,\gamma}[\chi(\delta)] \pi_{\gamma,\Gamma} i_{\gamma,\delta}[\eta(\bar{\gamma}/\bar{\delta})]\; i_{\Gamma,\gamma}[\xi(\bar{\Gamma}/\bar{\gamma})].
\end{aligned}$$

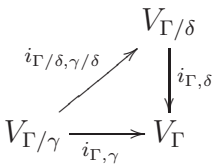
En utilisant les définitions de $\mathcal{G}_{\gamma,\Gamma}$ et $\mathcal{F}_{\Gamma,\gamma}$, il est clair que les trois diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
W_\gamma & & \\
{\scriptstyle \mathcal{G}_{\gamma,\Gamma}} \nearrow & \big\downarrow {\scriptstyle \mathcal{G}_{\delta,\gamma}} & \\
W_\Gamma & \xrightarrow[\mathcal{G}_{\delta,\Gamma}]{} & W_\delta
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
W_\Gamma & \xrightarrow{\mathcal{F}_{\Gamma,\delta}} & W_{\Gamma/\delta} \\
\big\downarrow {\scriptstyle \mathcal{G}_{\gamma,\Gamma}} & & \big\downarrow {\scriptstyle \mathcal{G}_{\gamma/\delta,\Gamma/\delta}} \\
W_\gamma & \xrightarrow[\mathcal{F}_{\gamma,\delta}]{} & W_{\gamma/\delta}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& & W_{\Gamma/\delta} \\
& {\scriptstyle \mathcal{F}_{\Gamma,\delta}} \nearrow & \big\downarrow {\scriptstyle \mathcal{F}_{\Gamma/\delta,\gamma/\delta}} \\
W_\Gamma & \xrightarrow[\mathcal{F}_{\Gamma,\gamma}]{} & W_{\Gamma/\gamma}
\end{array}$$

Par conséquent, on obtient par dualité les trois diagrammes commutatifs suivants :







Donc on peut écrire :

$$(\chi \circledast \eta) \circledast \xi(\Gamma, \underline{i}) \;=\; \sum_{\substack{\bar\delta \subset\, \bar\gamma \subset\, \bar\Gamma \\ \bar\gamma/\bar\delta;\, \bar\Gamma/\bar\gamma \in \mathcal{T}}} \pi_{\delta,\Gamma}[\chi(\delta)]\; i_{\Gamma,\delta}\pi_{\gamma/\delta,\Gamma/\delta}[\eta(\bar\gamma/\bar\delta)] i_{\Gamma,\delta} i_{\Gamma/\delta,\gamma/\delta}[\xi(\bar\Gamma/\bar\gamma)].$$

Et par suite, comme $(\chi \circledast \eta) \circledast \xi(\Gamma, \underline{i}) = \chi \circledast (\eta \circledast \xi)(\Gamma, \underline{i})$ pour tout graphe spécifié $(\Gamma, \underline{i})$, le produit $\circledast$ est associatif. □

Théorème 10. *Soit* $G = \{\varphi \in \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}, \mathcal{B})$ *tel que* $\varphi(\gamma\gamma') = \varphi(\gamma) \bullet \varphi(\gamma')$ *et* $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}\}$. *Muni du produit* $\circledast$, *l'ensemble* G *est un sous-groupe du semi-groupe des caractères de* $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ *à valeurs dans* $\mathcal{B}$.

Preuve. Soient φ, ψ deux éléments de G et $\bar\Gamma = (\Gamma, i)$, $\bar\Gamma' = (\Gamma', i')$ deux graphes spécifiés : par définition il est clair que $\varphi \circledast \psi \in \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}, \mathcal{B})$. En utilisant la proposition 16 on a donc :

$$\begin{aligned}
(\varphi \circledast \psi)(\bar\Gamma\bar\Gamma') &= (\varphi \circledast \psi)(\Gamma\Gamma') \\
&= \sum_{\substack{\bar\gamma\bar\gamma' \subset\, \bar\Gamma\bar\Gamma' \\ \bar\Gamma\bar\Gamma'/\bar\gamma\bar\gamma' \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma\gamma',\Gamma\Gamma'}[\varphi(\gamma\gamma')]\; i_{\Gamma\Gamma',\gamma\gamma'}\Big[\psi(\bar\Gamma\bar\Gamma'/\bar\gamma\bar\gamma')\Big] \\
&= \sum_{\substack{\bar\gamma \subset\, \bar\Gamma\,,\, \bar\gamma' \subset\, \bar\Gamma' \\ \bar\Gamma/\bar\gamma;\, \bar\Gamma'/\bar\gamma' \in \mathcal{T}}} \Big(\pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi(\gamma)] \bullet \pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi(\gamma')]\Big)\; \Big(i_{\Gamma,\gamma}\big[\psi(\bar\Gamma/\bar\gamma)\big] \bullet i_{\Gamma',\gamma'}\Big[\psi(\bar\Gamma'/\bar\gamma')\Big]\Big) \\
&= \sum_{\substack{\bar\gamma \subset\, \bar\Gamma\,,\, \bar\gamma' \subset\, \bar\Gamma' \\ \bar\Gamma/\bar\gamma;\, \bar\Gamma'/\bar\gamma' \in \mathcal{T}}} \Big(\pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi(\gamma)] i_{\Gamma,\gamma}\big[\psi(\bar\Gamma/\bar\gamma)\big]\Big) \bullet \Big(\pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi(\gamma')]\; i_{\Gamma',\gamma'}\big[\psi(\bar\Gamma'/\bar\gamma')\big]\Big) \\
&= (\varphi \circledast \psi)(\bar\Gamma)(\varphi \circledast \psi)(\bar\Gamma').
\end{aligned}$$

L'élément neutre e est défini par :

$$e(\bar\Gamma) = \begin{cases} \mathbf{1}_{V_\Gamma} & \text{si } \bar\Gamma \text{ est un graphe spécifié de degré zéro} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.13}$$

En effet pour tout $\varphi \in \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}, \mathcal{B})$ on a :
Si $\bar\Gamma$ de degré zéro,

$$(e \circledast \varphi)(\bar\Gamma) = e(\bar\Gamma)\varphi(\bar\Gamma) = \varphi(\Gamma)$$

De même :

$$(\varphi \circledast e)(\bar\Gamma) = \varphi(\bar\Gamma)e(\bar\Gamma) = \varphi(\Gamma)$$

Si $\bar{\Gamma}$ de degré ≥ 1 on a :

$$\begin{aligned}(e \circledast \varphi)(\bar{\Gamma}) &= \sum_{(\bar{\Gamma})} \pi_{\gamma,\Gamma}[e(\bar{\gamma})]\; i_{\Gamma,\gamma}[\varphi(\bar{\Gamma}/\bar{\gamma})] \\ &= \pi_{\mathrm{sk}\,\Gamma,\Gamma}[\mathbf{1}_{V_{\mathrm{sk}\,\Gamma}}]\; i_{\Gamma,\mathrm{sk}\,\Gamma}[\varphi(\Gamma)] \\ &= \varphi(\Gamma).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi \circledast e)(\bar{\Gamma}) &= \sum_{(\Gamma)} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi(\gamma)]\; i_{\Gamma,\gamma}[e(\bar{\Gamma}/\bar{\gamma})] \\ &= \pi_{\Gamma,\Gamma}[\varphi(\Gamma)]\; i_{\Gamma,\Gamma}[e(\mathrm{sk}\,\bar{\Gamma})] \\ &= \varphi(\Gamma).\end{aligned}$$

L'inverse d'un élément φ de G est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned}\varphi^{\circledast -1}(\bar{\Gamma}) &= (e-(e-\varphi))^{\circledast -1}(\bar{\Gamma}) \\ &= \sum_n (e-\varphi)^{\circledast n}(\bar{\Gamma}).\end{aligned}$$

Cette somme est bien définie : elle s'arrête à $n = q$ pour un graphe spécifié $\bar{\Gamma}$ de degré q. On a bien alors :

$$\varphi^{\circledast -1} \circledast \varphi = \varphi \circledast \varphi^{\circledast -1} = e.$$

□

4.4 Décomposition de Birkhoff

Dans ce paragraphe on va expliquer comment renormaliser un caractère φ de la bigèbre graduée de graphes spécifiés $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$: Soit φ un caractère à valeurs dans l'algèbre commutative unitaire $\mathcal{A} := \mathcal{B}([z^{-1}, z]])$ munie du schéma minimal de renormalisation :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+ \tag{3.14}$$

où :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_+ &:= \mathcal{B}[[z]], \\ \mathcal{A}_- &:= z^{-1}\mathcal{B}[z^{-1}].\end{aligned}$$

les espaces $\mathcal{A}_-$ et $\mathcal{A}_+$ sont deux sous-algèbres de $\mathcal{A}$, avec $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_+$. On note P la projection sur $\mathcal{A}_-$ parallèlement à $\mathcal{A}_+$. L'espace des applications linéaires de $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ dans $\mathcal{A}$ est muni du produit de convolution $\circledast$ défini pour tout $\varphi, \psi \in \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}, \mathcal{A})$ et tout graphe spécifié $(\Gamma, \underline{i})$ par :

$$(\varphi \circledast \psi)(\Gamma, \underline{i}) \;=\; (\varphi \circledast \psi)(\Gamma) = \sum_{\substack{(\gamma,\underline{j}) \subset (\Gamma,\underline{i}) \\ (\Gamma,\underline{i})/(\gamma,\underline{j}) \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi(\gamma)] i_{\Gamma,\gamma}\big[\psi\big(\Gamma/(\gamma,\underline{j})\big)\big].$$

On a vérifié dans le paragraphe précédent que l'espace des caractères de $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est un groupe pour le produit de convolution $\circledast$.

Théorème 11. *1. Chaque caractère $\varphi \in G$ admet une unique décomposition de Birkhoff dans G :*

$$\varphi = \varphi_-^{\circledast -1} \circledast \varphi_+ \tag{3.15}$$

compatible avec le schéma de renormalisation choisi, c-à-d telle que φ_+ prenne ses valeurs dans $\mathcal{A}_+$ et telle que $\varphi_-(\bar{\Gamma}) \in \mathcal{A}_-$ pour tout $(\Gamma, \underline{i})$ graphe spécifié de degré ≥ 1. Les composantes φ_+ et φ_- sont données par des formules récursives assez simples. Pour tout $\bar{\Gamma}$ de degré zéro (i.e sans arêtes internes) on pose : $\varphi_-(\bar{\Gamma}) = \varphi_+(\bar{\Gamma}) = \varphi(\bar{\Gamma}) = \mathbf{1}_{V_\Gamma}$, si on suppose que $\varphi_-(\bar{\Gamma})$ et $\varphi_+(\bar{\Gamma})$ sont connus pour $\bar{\Gamma}$ de degré $k \leq n-1$, on a alors pour tout graphe spécifié $\bar{\Gamma}$ homogène de degré n :

$$\varphi_-(\bar{\Gamma}) = \varphi_-(\Gamma) = -P\left(\varphi(\Gamma) + \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\; i_{\Gamma,\gamma}\Big[\varphi\left(\Gamma/(\gamma, \underline{j})\right)\Big]\right) \tag{3.16}$$

$$\varphi_+(\bar{\Gamma}) = \varphi_+(\Gamma) = (I-P)\left(\varphi(\Gamma) + \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\; i_{\Gamma,\gamma}\Big[\varphi\left(\Gamma/(\gamma, \underline{j})\right)\Big]\right). \tag{3.17}$$

2. φ_+ et φ_- sont deux caractères, on appelera φ_+ le caractère renormalisé et φ_- le caractère des contretermes.

Preuve. 1. Le fait que φ_+ prenne ses valeurs dans $\mathcal{A}_+$ et que $\varphi_-(\Gamma) \in \mathcal{A}_-$ est immédiat par définition de P, et on peut vérifier que $\varphi_+ = \varphi_- \circledast \varphi$ par un simple calcul :

$$\begin{aligned}
\varphi_+(\Gamma) &= (I-P)\left(\varphi(\Gamma) + \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\; i_{\Gamma,\gamma}\Big[\varphi\left(\Gamma/(\gamma, \underline{j})\right)\Big]\right) \\
&= \varphi(\Gamma) + \varphi_-(\Gamma) + \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\; i_{\Gamma,\gamma}\Big[\varphi\left(\Gamma/(\gamma, \underline{j})\right)\Big].
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\varphi_-(\Gamma) = \varphi(\Gamma) = \mathbf{1}_{V_\Gamma}$, pour un graphe Γ de degré zéro on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_- \circledast \varphi(\Gamma) &= \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\; i_{\Gamma,\gamma}\Big[\varphi\left(\Gamma/(\gamma, \underline{j})\right)\Big] \\
&= \pi_{\mathrm{sk}\,\Gamma,\Gamma}[\varphi_-(\mathrm{sk}\,\Gamma)] i_{\Gamma,\mathrm{sk}\,\Gamma}[\varphi(\Gamma)] + \pi_{\Gamma,\Gamma}[\varphi_-(\Gamma)] i_{\Gamma,\Gamma}[\varphi(\mathrm{res}\,\Gamma)] \\
&+ \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\; i_{\Gamma,\gamma}\Big[\varphi\left(\Gamma/(\gamma, \underline{j})\right)\Big]. \\
&= \varphi(\Gamma) + \varphi_-(\Gamma) + \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\; i_{\Gamma,\gamma}\Big[\varphi\left(\Gamma/(\gamma, \underline{j})\right)\Big].
\end{aligned}$$

D'où : $\varphi_+ = \varphi_- \circledast \varphi$, equivaut à dire que : $\varphi = \varphi_-^{\circledast -1} \circledast \varphi_+$.
Supposons maintenant que $\varphi = \varphi_-^{\circledast -1} \circledast \varphi_+ = \psi_-^{\circledast -1} \circledast \psi_+$ alors, on obtient :

$$\varphi_+ \circledast \psi_+^{\circledast -1} = \varphi_- \circledast \psi_-^{\circledast -1}.$$

Le terme de droite de l'egalité envoie tout graphe spécifié de degré ≥ 1 dans $\mathcal{A}_+$ par contre le terme de gauche l'envoie dans $\mathcal{A}_-$, donc pour tout graphe $\bar{\Gamma}$ de degré ≥ 1 on a :

$$\varphi_+ \circledast \psi_+^{\circledast -1}(\Gamma) = \varphi_- \circledast \psi_-^{\circledast -1}(\Gamma) = 0.$$

Donc : $\varphi_+ \circledast \psi_+^{\circledast -1} = \varphi_- \circledast \psi_-^{\circledast -1} = e$, ce qui prouve l'unicité de la décomposition de Birkhoff.

2. On se limite à montrer que φ_- est un caractère, $\varphi_+ = \varphi_- \circledast \varphi$ l'étant alors automatiquement. L'idée decoule du fait que la projection P vérifie l'egalité de Rota-Baxter :

$$P(a)P(b) = P\Big(- ab + P(a)b + P(b)a\Big). \tag{3.18}$$

Soit φ un élément de G. La démonstration se fait par récurrence sur le degré du graphe $\Gamma\Gamma'$. Pour $\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}'$ de degré zéro on a bien $\mathbf{1}_{V_\Gamma} \bullet \mathbf{1}_{V'_\Gamma} = \mathbf{1}_{V_{\Gamma\Gamma'}}$. Supposons que $\varphi_-(\Gamma\Gamma') = \varphi_-(\Gamma) \bullet \varphi_-(\Gamma')$ pour tous $\bar{\Gamma}$,$\bar{\Gamma}' \in \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ tels que : $deg(\bar{\Gamma}) + deg(\bar{\Gamma}') \leq d-1$ et montrons l'egalité pour $\bar{\Gamma}$,$\bar{\Gamma}' \in \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ tels que : $deg(\bar{\Gamma}) + deg(\bar{\Gamma}') = d$.
On a :

$$\varphi_-(\Gamma) \bullet \varphi_-(\Gamma') = P(X) \bullet P(Y),$$

où

$$X = \varphi(\Gamma) + \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\; i_{\Gamma,\gamma}\Big[\varphi\left(\Gamma/(\gamma,\underline{j})\right)\Big]$$

$$Y = \varphi(\Gamma') + \sum_{\substack{\bar{\gamma}' \subsetneq \bar{\Gamma}' \\ \bar{\Gamma}'/\bar{\gamma}' \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi_-(\gamma')]\; i_{\Gamma',\gamma'}\Big[\varphi\left(\Gamma'/(\gamma',\underline{j})\right)\Big].$$

On a :

$$\varphi_-(\Gamma) \bullet \varphi_-(\Gamma') = P(X) \bullet P(Y) = P\Big(- X \bullet Y + P(X) \bullet Y + X \bullet P(Y)\Big).$$

Comme $P(X) = -\varphi_-(\Gamma)$ et $P(Y) = -\varphi_-(\Gamma')$, on obtient :

$$\varphi_-(\Gamma) \bullet \varphi_-(\Gamma') = -P\Big(X \bullet Y + \varphi_-(\Gamma) \bullet Y + X \bullet \varphi_-(\Gamma')\Big).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\varphi_-(\Gamma)\bullet\varphi_-(\Gamma') &= -P\Big[\varphi(\Gamma)\bullet\varphi(\Gamma')+\varphi_-(\Gamma)\bullet\varphi(\Gamma')+\varphi(\Gamma)\bullet\varphi_-(\Gamma')\\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma\subsetneq\bar\Gamma\\ \bar\Gamma/\bar\gamma\in\mathcal{T}}}\Big(\pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\; i_{\Gamma,\gamma}\big[\varphi\left(\bar\Gamma/\bar\gamma\right)\big]\Big)\bullet\Big(\varphi_-(\Gamma')+\varphi(\Gamma')\Big)\\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma'\subsetneq\bar\Gamma'\\ \bar\Gamma'/\bar\gamma'\in\mathcal{T}}}\Big(\pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi_-(\gamma')]\; i_{\Gamma',\gamma'}\big[\varphi(\bar\Gamma'/\bar\gamma')\big]\Big)\bullet\Big(\varphi_-(\Gamma)+\varphi(\Gamma)\Big)\\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma\subsetneq\bar\Gamma,\bar\gamma'\subsetneq\bar\Gamma'\\ \bar\Gamma/\bar\gamma;\bar\Gamma'/\bar\gamma'\in\mathcal{T}}}\Big(\pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\; i_{\Gamma,\gamma}\big[\varphi(\bar\Gamma/\bar\gamma)\big]\Big)\bullet\Big(\pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi_-(\gamma')]\; i_{\Gamma',\gamma'}\big[\varphi(\bar\Gamma'/\bar\gamma')\big]\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Le coproduit $\Delta(\bar\Gamma\bar\Gamma')$ s'ecrit :

$$\begin{aligned}
\Delta(\bar\Gamma\bar\Gamma') &= \bar\Gamma\bar\Gamma'\otimes\operatorname{res}\bar\Gamma\operatorname{res}\bar\Gamma'+\operatorname{sk}\bar\Gamma\operatorname{sk}\bar\Gamma'\otimes\bar\Gamma\bar\Gamma'+\bar\Gamma\operatorname{sk}\bar\Gamma'\otimes\bar\Gamma'\operatorname{res}\bar\Gamma+\bar\Gamma'\operatorname{sk}\bar\Gamma\otimes\bar\Gamma\operatorname{res}\bar\Gamma'\\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma\subsetneq\bar\Gamma\\ \bar\Gamma/\bar\gamma\in\mathcal{T}}}\bar\gamma\bar\Gamma'\otimes(\bar\Gamma/\bar\gamma)\operatorname{res}\bar\Gamma'+\bar\gamma\operatorname{sk}\bar\Gamma'\otimes(\bar\Gamma/\bar\gamma)\bar\Gamma'\\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma'\subsetneq\bar\Gamma'\\ \bar\Gamma'/\bar\gamma'\in\mathcal{T}}}\bar\Gamma\bar\gamma'\otimes(\bar\Gamma'/\bar\gamma')\operatorname{res}\bar\Gamma+\bar\gamma'\operatorname{sk}\bar\Gamma\otimes\bar\Gamma(\bar\Gamma'/\bar\gamma')+\sum_{\substack{\bar\gamma\subsetneq\bar\Gamma\,\bar\gamma'\subsetneq\bar\Gamma'\\ \bar\Gamma/\bar\gamma;\bar\Gamma'/\bar\gamma'\in\mathcal{T}}}\bar\gamma\bar\gamma'\otimes(\bar\Gamma/\bar\gamma)(\bar\Gamma'/\bar\gamma').
\end{aligned}$$

Comme $\varphi_-(\Gamma\Gamma')=-P\Big(\varphi_-\circledast\varphi(\Gamma\Gamma')-\varphi_-(\Gamma\Gamma')\Big)$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_-(\Gamma\Gamma') &= -P\Big[\pi_{\Gamma\Gamma',\Gamma\Gamma'}[\varphi_-(\Gamma\Gamma')]i_{\Gamma\Gamma',\Gamma\Gamma'}[\varphi(\operatorname{res}\bar\Gamma\operatorname{res}\bar\Gamma')]\\
&\quad+\pi_{\operatorname{sk}\Gamma\operatorname{sk}\Gamma',\Gamma\Gamma'}[\varphi_-(\operatorname{sk}\bar\Gamma\operatorname{sk}\bar\Gamma')]i_{\Gamma\Gamma',\operatorname{sk}\Gamma\operatorname{sk}\Gamma'}[\varphi(\Gamma\Gamma')]\\
&\quad+\pi_{\Gamma\operatorname{sk}\Gamma',\Gamma\Gamma'}[\varphi_-(\Gamma\operatorname{sk}\bar\Gamma')]i_{\Gamma\Gamma',\Gamma\operatorname{sk}\Gamma'}\big[\varphi(\Gamma'\operatorname{res}\bar\Gamma)\big]\\
&\quad+\pi_{\Gamma'\operatorname{sk}\Gamma,\Gamma\Gamma'}[\varphi_-(\Gamma'\operatorname{sk}\bar\Gamma)]i_{\Gamma\Gamma',\Gamma'\operatorname{sk}\Gamma}[\varphi(\Gamma\operatorname{res}\bar\Gamma')]\\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma\subsetneq\bar\Gamma\\ \bar\Gamma/\bar\gamma\in\mathcal{T}}}\pi_{\gamma\gamma',\Gamma\Gamma'}[\varphi_-(\gamma\Gamma')]i_{\Gamma\Gamma',\gamma\gamma'}\big[\varphi(\bar\Gamma/\bar\gamma\operatorname{res}\bar\Gamma')\big]+\pi_{\gamma\gamma',\Gamma\Gamma'}[\varphi_-(\gamma\operatorname{sk}\bar\Gamma')]i_{\Gamma\Gamma',\gamma\gamma'}\big[\varphi(\bar\Gamma/\bar\gamma\Gamma')\big]\\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma'\subsetneq\bar\Gamma'\\ \bar\Gamma'/\bar\gamma'\in\mathcal{T}}}\pi_{\gamma\gamma',\Gamma\Gamma'}[\varphi_-(\gamma'\Gamma)]i_{\Gamma\Gamma',\gamma\gamma'}\big[\varphi(\bar\Gamma'/\bar\gamma'\operatorname{res}\bar\Gamma)\big]+\pi_{\gamma\gamma',\Gamma\Gamma'}[\varphi_-(\gamma'\operatorname{sk}\bar\Gamma)]i_{\Gamma\Gamma',\gamma\gamma'}\big[\varphi(\bar\Gamma'/\bar\gamma'\Gamma)\big]\\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma\subsetneq\bar\Gamma\,\bar\gamma'\subsetneq\bar\Gamma'\\ \bar\Gamma/\bar\gamma;\,\bar\Gamma'/\bar\gamma'\in\mathcal{T}}}\pi_{\gamma\gamma',\Gamma\Gamma'}[\varphi_-(\gamma\gamma')]i_{\Gamma\Gamma',\gamma\gamma'}\big[\varphi(\bar\Gamma/\bar\gamma\bar\Gamma'/\bar\gamma')\big]-\varphi_-(\Gamma\Gamma')\Big].
\end{aligned}$$

On remarque que le premier et le dernier termes se compensent. En utilisant le fait que φ est un caractère, $\varphi(\operatorname{sk}\bar\Gamma)=\varphi_-(\operatorname{sk}\bar\Gamma)=\mathbf{1}_{V_\Gamma}$, et en utilisant l'hypothèse de récurrence

on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi_-(\Gamma\Gamma') &= -P\Big[\varphi(\Gamma)\bullet\varphi(\Gamma') \\
&+\Big(\pi_{\Gamma\,\mathrm{sk}\,\Gamma',\Gamma\Gamma'}\,[\varphi_-(\Gamma)]\bullet\pi_{\Gamma\,\mathrm{sk}\,\Gamma',\Gamma\Gamma'}[\varphi_-(\mathrm{sk}\,\bar\Gamma')]\Big)\Big(i_{\Gamma\Gamma',\Gamma\,\mathrm{sk}\,\Gamma'}\big[\varphi(\Gamma')\big]\bullet i_{\Gamma\Gamma',\Gamma\,\mathrm{sk}\,\Gamma'}\big[\varphi(\mathrm{res}\,\bar\Gamma)\big]\Big) \\
&+\Big(\pi_{\Gamma'\,\mathrm{sk}\,\Gamma,\Gamma\Gamma'}\,[\varphi_-(\Gamma')]\bullet\pi_{\Gamma'\,\mathrm{sk}\,\Gamma,\Gamma\Gamma'}[\varphi_-(\mathrm{sk}\,\bar\Gamma)]\Big)\Big(i_{\Gamma\Gamma',\Gamma'\,\mathrm{sk}\,\Gamma}[\varphi(\Gamma)]\bullet i_{\Gamma\Gamma',\Gamma'\,\mathrm{sk}\,\Gamma}[\varphi(\mathrm{res}\,\bar\Gamma')]\Big) \\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma\subsetneq\bar\Gamma\\ \bar\Gamma/\bar\gamma\in\mathcal{T}}}\Big(\pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]i_{\Gamma,\gamma}\big[\varphi(\bar\Gamma/\bar\gamma)\big]\Big)\bullet\Big(\varphi_-(\Gamma')+\varphi(\Gamma')\Big) \\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma'\subsetneq\bar\Gamma'\\ \bar\Gamma'/\bar\gamma'\in\mathcal{T}}}\Big(\pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi_-(\gamma')]i_{\Gamma',\gamma'}\big[\varphi(\bar\Gamma'/\bar\gamma')\big]\Big)\bullet\Big(\varphi_-(\Gamma)+\varphi(\Gamma)\Big) \\
&+\sum_{\substack{\bar\gamma\subsetneq\bar\Gamma,\bar\gamma'\subsetneq\bar\Gamma'\\ \bar\Gamma/\bar\gamma;\bar\Gamma'/\bar\gamma'\in\mathcal{T}}}\Big(\pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\bullet\pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi_-(\gamma')]\Big)\Big(i_{\Gamma,\gamma}\big[\varphi(\bar\Gamma/\bar\gamma)\big]\bullet i_{\Gamma',\gamma'}\big[\varphi(\bar\Gamma'/\bar\gamma')\big]\Big)\Big].
\end{aligned}$$

La proposition 16 nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\varphi_-(\Gamma\Gamma') &= -P\Big[\varphi(\Gamma)\bullet\varphi(\Gamma')+\varphi_-(\Gamma)\bullet\varphi(\Gamma')+\varphi(\Gamma)\bullet\varphi_-(\Gamma') \\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma\subsetneq\bar\Gamma\\ \bar\Gamma/\bar\gamma\in\mathcal{T}}}\Big(\pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\;i_{\Gamma,\gamma}\big[\varphi\left(\bar\Gamma/\bar\gamma\right)\big]\Big)\bullet\Big(\varphi_-(\Gamma')+\varphi(\Gamma')\Big) \\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma'\subsetneq\bar\Gamma'\\ \bar\Gamma'/\bar\gamma'\in\mathcal{T}}}\Big(\pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi_-(\gamma')]\;i_{\Gamma',\gamma'}\big[\varphi(\bar\Gamma'/\bar\gamma')\big]\Big)\bullet\Big(\varphi_-(\Gamma)+\varphi(\Gamma)\Big) \\
&\quad+\sum_{\substack{\bar\gamma\subsetneq\bar\Gamma,\bar\gamma'\subsetneq\bar\Gamma'\\ \bar\Gamma/\bar\gamma;\bar\Gamma'/\bar\gamma'\in\mathcal{T}}}\Big(\pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\;i_{\Gamma,\gamma}\big[\varphi(\bar\Gamma/\bar\gamma)\big]\Big)\bullet\Big(\pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi_-(\gamma')]\;i_{\Gamma',\gamma'}\big[\varphi(\bar\Gamma'/\bar\gamma')\big]\Big)\Big] \\
&= \varphi_-(\Gamma)\bullet\varphi_-(\Gamma'),
\end{aligned}$$

ce qui montre que φ_- est bien un caractère.

□

4.5 Développement de Taylor

Nous adaptons ici la construction de [15, §9], utilisée encore dans [34, §3.7], (voir aussi [17, 18]).

Définition 29. *Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre commutative définie par* (3.10). *Pour $m\in\mathbb{N}$, l'opérateur de développement de Taylor d'ordre m est :*

$$P_m\in\mathrm{End}(\mathcal{B}),\qquad P_mf(v):=\sum_{|\beta|\le m}\frac{v^\beta}{\beta!}\partial_0^\beta f, \tag{3.19}$$

où $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ *avec les notations habituelles :* $|\beta| := \beta_1 + ... + \beta_n$, *et*

$$v^\beta = \prod_{1 \leq k \leq n} v_k^{\beta_k}, \qquad \beta! := \prod_{1 \leq k \leq n} \beta_k!, \qquad \partial_0^\beta := \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial^{\beta_k}}{\partial v_k^{\beta_k}}\Big|_{v_k=0}.$$

Nous pouvons maintenant mettre en oeuvre le "schema général des moments" en utilisant ces projections P_m. Soit φ un élément de G, nous définissons la décomposition de Birkhoff :

$$\varphi = \varphi_-^{\circledast -1} \circledast \varphi_+. \tag{3.20}$$

Les composantes φ_+ et φ_- sont données par les formules récursives suivantes. Pour tout $\bar{\Gamma}$ de degré zéro (i.e sans arêtes internes) on a : $\varphi_-(\bar{\Gamma}) = \varphi_+(\bar{\Gamma}) = \varphi(\bar{\Gamma}) = \mathbf{1}_{V_\Gamma}$. Si nous supposons que $\varphi_-(\bar{\Gamma})$ et $\varphi_+(\bar{\Gamma})$ sont connus pour $\bar{\Gamma}$ de degré $k \leq m-1$, nous avons alors pour tout graphe spécifié $\bar{\Gamma}$ de degré m :

$$\varphi_-(\bar{\Gamma}) = -P_m \left(\varphi(\Gamma) + \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\, i_{\Gamma,\gamma}\Big[\varphi\left(\Gamma/(\gamma, \underline{j})\right)\Big] \right) \tag{3.21}$$

$$\varphi_+(\bar{\Gamma}) = (I - P_m) \left(\varphi(\Gamma) + \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\, i_{\Gamma,\gamma}\Big[\varphi\left(\Gamma/(\gamma, \underline{j})\right)\Big] \right). \tag{3.22}$$

Les opérateurs P_m forment une famille de *Rota–Baxter* dans le sens de K. Ebrahimi-Fard, J. Gracia-Bondia et F. Patras [15, Proposition 9.1, Proposition 9.2]. L'analogue de l'égalité de Rota-Baxter défini par la formule (3.18) est donné par le théorème suivant [15, 34] :

Théorème 12. *Soit* Γ *un graphe, et soient* $f, g \in V_\Gamma$. *Pour tout* $s, t \in \mathbb{N}$, *l'opérateur de développement de Taylor satisfait :*

$$(P_s f)(P_t g) = P_{s+t}[(P_s f)g + f(P_t g) - fg]. \tag{3.23}$$

Preuve. On note par $\mu(f \otimes g) = fg$ le produit point par point sur V_Γ. En utilisant l'egalité de Leibniz :

$$\partial \circ \mu = \mu \circ (\partial \otimes Id + Id \otimes \partial), \tag{3.24}$$

et la formule

$$\partial_0^\alpha P_s = \partial_0^\alpha \sum_{|\beta| \leq s} \frac{v \mapsto v^\beta}{\beta!} \partial_0^\beta = \sum_{|\beta| \leq s} \frac{\partial_0^\alpha (v \mapsto v^\beta)}{\beta!} \partial_0^\beta = \begin{cases} \partial_0^\alpha & \text{si } |\alpha| \leq s \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{3.25}$$

Par la formule (3.19), il suffit de vérifier le résultat pour tout multiindice $|\alpha| \leq s+t$:

$$\begin{aligned}\partial_0^\alpha[(P_sf)g + f(P_tg) - fg] &= \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\mu\circ(\partial_0^\beta\otimes\partial_0^{\alpha-\beta})[(P_sf)\otimes g + f\otimes(P_tg) - f\otimes g] \\ &= \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\big[(\partial_0^\beta P_sf)(\partial_0^{\alpha-\beta}g) + (\partial_0^\beta f)(\partial_0^{\alpha-\beta}P_tg) - (\partial_0^\beta f)(\partial_0^{\alpha-\beta}g)\big].\end{aligned}$$

En effet, par la formule (3.25), les contributions de $|\beta| > s$ ou $|\alpha-\beta| > t$ donnent zéro. Par exemple, si $|\alpha-\beta| > t$ alors $|\alpha| - |\beta| > t \Longrightarrow |\beta| < |\alpha| - t$, puisque $|\alpha| \leq s+t$ alors $|\beta| < s$ et on a :

$$\partial_0^\beta P_s = \partial_0^\beta, \qquad \text{et} \quad \partial_0^{\alpha-\beta}P_t = 0,$$

alors

$$\underbrace{(\partial_0^\beta P_sf)}_{\partial_0^\beta f}(\partial_0^{\alpha-\beta}g) + (\partial_0^\beta f)\underbrace{(\partial_0^{\alpha-\beta}P_tg)}_{0} - (\partial_0^\beta f)(\partial_0^{\alpha-\beta}g) = 0.$$

De même on a :

$$(\partial_0^\beta P_sf)(\partial_0^{\alpha-\beta}P_tg) = 0.$$

Donc il ne reste que les termes en $|\beta| \leq s$ et $|\alpha-\beta| \leq t$, qui donnent :

$$\partial_0^\beta P_s = \partial_0^\beta \quad \text{et} \quad \partial_0^{\alpha-\beta}P_t = \partial_0^{\alpha-\beta},$$

donc nous avons :

$$\begin{aligned}(\partial_0^\beta P_sf)(\partial_0^{\alpha-\beta}g) + (\partial_0^\beta f)(\partial_0^{\alpha-\beta}P_tg) - (\partial_0^\beta f)(\partial_0^{\alpha-\beta}g) &= (\partial_0^\beta f)(\partial_0^{\alpha-\beta}g) \\ &= (\partial_0^\beta P_sf)(\partial_0^{\alpha-\beta}P_tg).\end{aligned}$$

D'où on a :

$$\begin{aligned}\partial_0^\alpha[(P_sf)g + f(P_tg) - fg] &= \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(\partial_0^\beta P_sf)(\partial_0^{\alpha-\beta}P_tg) \\ &= \partial_0^\alpha[(P_sf).(P_tg)],\end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème. □

Théorème 13. *Soit $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}}$ la bigèbre graduée des graphes de Feynman spécifiés et φ un caractère à valeurs dans une algèbre commutative unitaire $\mathcal{B}$. De plus soit $P_\cdot : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{B})$ un schéma de renormalisation indexé, c'est'à-dire une famille d'endomorphismes $(P_t)_{t\in\mathbb{N}}$ tels que :*

$$\mu\circ(P_s\otimes P_t) = P_{s+t}\circ\mu\circ[P_s\otimes Id + Id\otimes P_t - Id\otimes Id], \tag{3.26}$$

pour tout $s,t\in\mathbb{N}$. Alors φ_- and φ_+ définis par (3.21) et (3.22) sont deux caractères.

Preuve. On se limite à montrer que φ_- est un caractère. Le fait que $\varphi_+ = \varphi_- \circledast \varphi$ est aussi un caractère s'obtient automatiquement.
La preuve se fait par récurrence sur le degré du graphe $\Gamma\Gamma'$. Pour $|\Gamma\Gamma'| = 0$, le résultat est imédiat. Supposons que $\varphi_-(\Gamma\Gamma') = \varphi_-(\Gamma)\varphi_-(\Gamma')$ jusqu'a l'ordre $|\Gamma\Gamma'| - 1$.
Pour $\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}' \in \ker \varepsilon$, on écrit $\varphi_-(\bar{\Gamma}) = -P_{|\Gamma|}(\bar{\varphi}(\bar{\Gamma}))$, où

$$\bar{\varphi}(\bar{\Gamma}) = \varphi(\Gamma) + \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\, i_{\Gamma,\gamma}\big[\varphi\left(\Gamma/(\gamma, \underline{j})\right)\big].$$

Pour prouver ce théorème, nous utilisons l'hypothèse de récurrence et les formules (3.21) et (3.26).

$$\begin{aligned}
\varphi_-(\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}') &= -P_{|\Gamma\Gamma'|}\Big[\varphi(\Gamma) \bullet \varphi(\Gamma') + \varphi_-(\Gamma) \bullet \varphi(\Gamma') + \varphi(\Gamma) \bullet \varphi_-(\Gamma') \\
&+ \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \Big(\pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\, i_{\Gamma,\gamma}\big[\varphi\left(\bar{\Gamma}/\bar{\gamma}\right)\big]\Big) \bullet \Big(\varphi_-(\Gamma') + \varphi(\Gamma')\Big) \\
&+ \sum_{\substack{\bar{\gamma}' \subsetneq \bar{\Gamma}' \\ \bar{\Gamma}'/\bar{\gamma}' \in \mathcal{T}}} \Big(\pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi_-(\gamma')]\, i_{\Gamma',\gamma'}\big[\varphi(\bar{\Gamma}'/\bar{\gamma}')\big]\Big) \bullet \Big(\varphi_-(\Gamma) + \varphi(\Gamma)\Big) \\
&+ \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma}\,,\, \bar{\gamma}' \subsetneq \bar{\Gamma}' \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma}\,;\, \bar{\Gamma}'/\bar{\gamma}' \in \mathcal{T}}} \Big(\pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\, i_{\Gamma,\gamma}\big[\varphi(\bar{\Gamma}/\bar{\gamma})\big]\Big) \bullet \Big(\pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi_-(\gamma')]\, i_{\Gamma',\gamma'}\big[\varphi(\bar{\Gamma}'/\bar{\gamma}')\big]\Big)\Big] \\
&= -P_{|\Gamma|+|\Gamma'|}\Big[\Big(\varphi(\Gamma) + \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \big(\pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\, i_{\Gamma,\gamma}\big[\varphi\left(\bar{\Gamma}/\bar{\gamma}\right)\big]\big)\Big) \\
&\quad \bullet\Big(\varphi(\Gamma') + \sum_{\substack{\bar{\gamma}' \subsetneq \bar{\Gamma}' \\ \bar{\Gamma}'/\bar{\gamma}' \in \mathcal{T}}} \big(\pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi_-(\gamma')]\, i_{\Gamma',\gamma'}\big[\varphi(\bar{\Gamma}'/\bar{\gamma}')\big]\big)\Big) \\
&+ \varphi_-(\Gamma) \bullet \Big(\varphi(\Gamma') + \sum_{\substack{\bar{\gamma}' \subsetneq \bar{\Gamma}' \\ \bar{\Gamma}'/\bar{\gamma}' \in \mathcal{T}}} \big(\pi_{\gamma',\Gamma'}[\varphi_-(\gamma')]\, i_{\Gamma',\gamma'}\big[\varphi(\bar{\Gamma}'/\bar{\gamma}')\big]\big)\Big) \\
&+ \varphi_-(\Gamma') \bullet \Big(\varphi(\Gamma) + \sum_{\substack{\bar{\gamma} \subsetneq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \big(\pi_{\gamma,\Gamma}[\varphi_-(\gamma)]\, i_{\Gamma,\gamma}\big[\varphi(\bar{\Gamma}/\bar{\gamma})\big]\big)\Big)\Big] \\
&= -P_{|\Gamma|+|\Gamma'|}\Big[\bar{\varphi}(\bar{\Gamma}) \bullet \bar{\varphi}(\bar{\Gamma}') - P_{|\Gamma|}(\bar{\varphi}(\bar{\Gamma})) \bullet \bar{\varphi}(\bar{\Gamma}') - P_{|\Gamma'|}(\bar{\varphi}(\bar{\Gamma}')) \bullet \bar{\varphi}(\bar{\Gamma})\Big] \\
&= P_{|\Gamma|+|\Gamma'|}\Big[P_{|\Gamma'|}(\bar{\varphi}(\bar{\Gamma}')) \bullet \bar{\varphi}(\bar{\Gamma}) + P_{|\Gamma|}(\bar{\varphi}(\bar{\Gamma})) \bullet \bar{\varphi}(\bar{\Gamma}') - \bar{\varphi}(\bar{\Gamma}) \bullet \bar{\varphi}(\bar{\Gamma}')\Big] \\
&= P_{|\Gamma|}\big(\bar{\varphi}(\bar{\Gamma})\big) \bullet P_{|\Gamma'|}\big(\bar{\varphi}(\bar{\Gamma}')\big) \\
&= \varphi_-(\bar{\Gamma}) \bullet \varphi_-(\bar{\Gamma}').
\end{aligned}$$

□

Chapitre 4

Dédoublement de la bigèbre des graphes et règles de Feynman

Dans ce chapitre, nous définissons le dédoublement $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}}$ de la bigèbre des graphes de Feynman spécifiés. C'est l'espace vectoriel engendré par les couples $(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma})$ où $\bar{\Gamma}$ est un graphe spécifié localement $1PI$ de la théorie $\mathcal{T}$, $\bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma}$ localement $1PI$ et $\bar{\Gamma}/\bar{\gamma}$ est un graphe spécifié de $\mathcal{T}$. Nous définissons également un produit de convolution $\divideontimes$ sur les caractères de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ à valeurs dans une algèbre d'endomorphismes, munie d'un produit commutatif $\bullet$ compatible avec la composition. Nous retrouvons alors la renormalisation telle qu'elle est formulée par A. Smirnov [36, §8.5, 8.6], en adaptant l'approche d'A. Connes et D. Kreimer pour deux schémas de renormalisation : le schéma minimal de renormalisation et le schéma de développement de Taylor.
Enfin, nous nous intéressons aux intégrales de Feynman qui sont en général divergentes. Nous déterminons alors leurs parties finies en utilisant l'algorithme BPHZ, après avoir régularisé ces intégrales avec le procédé de la regularisation dimensionnelle. Nous suivons l'approche de P. Etingof [19] (voir aussi [33]).

1 Le dédoublement de la bigèbre

Soit $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}}$ l'espace vectoriel engendré par les couples $(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma})$ où $\bar{\Gamma}$ est un graphe spécifié localement $1PI$ de la théorie $\mathcal{T}$, $\bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma}$ localement $1PI$ et $\bar{\Gamma}/\bar{\gamma}$ est un graphe spécifié de $\mathcal{T}$. C'est encore l'algèbre commutative libre engendrée par les objets connexes correspondants, et nous considérons le coproduit suivant :

$$\Delta(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = \sum_{\substack{\bar{\delta} \subseteq \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta}; \bar{\Gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} (\bar{\Gamma}, \bar{\delta}) \otimes (\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}) \tag{4.1}$$

Proposition 17. *$(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}}, m, \Delta, u, \varepsilon)$ est une bigèbre graduée, et*

$$\begin{array}{rcl} P_2 : \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{T}} \\ (\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) & \longmapsto & \bar{\gamma} \end{array}$$

est un morphisme de bigèbres.

Preuve. L'unité $\mathbf{1}$ est identifiée avec le graphe vide, la counité ε est donnée par $\varepsilon(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = \varepsilon(\bar{\gamma})$ et la graduation est donnée par le nombre des boucles du sous-graphe :

$$|(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma})| = |\bar{\gamma}|. \tag{4.2}$$

On calcule maintenant :

$$\begin{array}{rcl} (\Delta \otimes id)\Delta(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) & = & (\Delta \otimes id)\Big(\displaystyle\sum_{\substack{\bar{\delta} \subseteq \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} (\bar{\Gamma}, \bar{\delta}) \otimes (\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}) \Big) \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{\bar{\sigma} \subseteq \bar{\delta} \subseteq \bar{\gamma} \\ \bar{\delta}/\bar{\sigma}\ ,\ \bar{\gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} (\bar{\Gamma}, \bar{\sigma}) \otimes (\bar{\Gamma}/\bar{\sigma}, \bar{\delta}/\bar{\sigma}) \otimes (\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}). \end{array}$$

Par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl} (id \otimes \Delta)\Delta(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) & = & (id \otimes \Delta)\Big(\displaystyle\sum_{\substack{\bar{\sigma} \subseteq \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\sigma} \in \mathcal{T}}} (\bar{\Gamma}, \bar{\sigma}) \otimes (\bar{\Gamma}/\bar{\sigma}, \bar{\gamma}/\bar{\sigma}) \Big) \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{\bar{\sigma} \subseteq \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\sigma} \in \mathcal{T}}} \sum_{\substack{\widetilde{\delta} \subseteq \bar{\gamma}/\bar{\sigma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\sigma}/\widetilde{\delta} \in \mathcal{T}}} (\bar{\Gamma}, \bar{\sigma}) \otimes (\bar{\Gamma}/\bar{\sigma}, \widetilde{\delta}) \otimes (\bar{\Gamma}/\bar{\sigma}\Big/\widetilde{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\sigma}\Big/\widetilde{\delta}) \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{\bar{\sigma} \subseteq \bar{\delta} \subseteq \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\sigma}\ ,\ \bar{\gamma}/\bar{\sigma} \in \mathcal{T}}} (\bar{\Gamma}, \bar{\sigma}) \otimes (\bar{\Gamma}/\bar{\sigma}, \bar{\delta}/\bar{\sigma}) \otimes (\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}). \end{array}$$

les conditions $\{\bar{\gamma}/\bar{\delta}\ ,\ \bar{\gamma}/\bar{\sigma} \in \mathcal{T}\}$ et $\{\bar{\gamma}/\bar{\delta}\ ,\ \bar{\delta}/\bar{\sigma} \in \mathcal{T}\}$ sont équivalentes, ce qui démontre la coassociativité. La compatibilité avec le produit est évidente, la compatibilité avec la graduation l'est aussi. Enfin P_2 est un morphisme d'algèbres, et on a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta \circ P_2(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) & = & \Delta(\bar{\gamma}) \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{\bar{\gamma} \subseteq \bar{\Gamma} \\ \bar{\Gamma}/\bar{\gamma} \in \mathcal{T}}} \bar{\delta} \otimes \bar{\gamma}/\bar{\delta} \\ & = & (P_2 \otimes P_2)\Delta(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}). \end{array}$$

□

2 Les règles de Feynman

2.1 Description de l'intégrande

Soit Γ un graphe, chaque sommet v vient avec sa constante de couplage g_v qui ne dépend que du type de v. Chaque arête intérieure (e_-e_+) (resp chaque arête extérieure e) vient avec un propagateur $G_{e_-e_+} : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{C}$ (resp G_e) qui ne dépend que du type de l'arête. C'est une fonction rationnelle, sans pôles réels dans le cas euclidien avec masse. Par exemple en théorie φ^3 ou φ^4 euclidienne, tout propagateur (intérieur ou extérieur) est donné par :

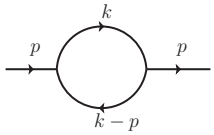
$$G(p) = \frac{1}{p^2 + m^2}.$$

Alors $\varphi(\Gamma)$ est un élément de $V_\Gamma = \mathcal{C}^\infty(W_\Gamma, \mathbb{C})$ défini par :

$$\varphi(\Gamma)(p) = \prod_{v \in \mathcal{V}(\Gamma)} g_v \prod_{\{e,\sigma(e)\},\sigma(e)\neq e} G_{e\sigma(e)}(p_e) \prod_{\sigma(e)=e} G_e(p_e). \tag{4.3}$$

Notons que si $G_{e\sigma(e)}$ n'est pas une fonction paire, on oriente l'arête interne correspondante et on pose $G_{\sigma(e)e}(p) = G_{e\sigma(e)}(-p)$.

Exemple 12. *On considère le graphe suivant en théorie φ^3 :*

$\Gamma =$ 

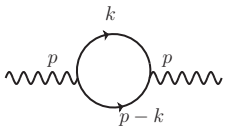
L'amplitude de Γ s'ecrit :

$$\varphi(\Gamma) = g^2 . \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} . \frac{1}{k^2 + m^2} . \frac{1}{(k-p)^2 + m^2}.$$

Exemple 13. *Dans les théorie de jauge, le propagateur des fermions a un numérateur différent de* 1. *Par exemple en* QED *il s'écrit :*

$$G_{e_-e_+}(p_e) = \frac{i < \gamma, p_e > +m}{p_e^2 + m^2},$$

avec $< \gamma, p_e >= i\gamma^0(p_e)_0 + \gamma^1(p_e)_1 + \gamma^2(p_e)_2 + \gamma^3(p_e)_3$, où les γ^j sont les matrices 4×4 de Dirac[1]. *On considère le graphe suivant en* QED *:*

$\Gamma =$ 

L'amplitude de Γ s'ecrit :

$$\varphi(\Gamma) = g^2 . \frac{1}{p^4} . \frac{i < \gamma, k > +m}{k^2 + m^2} . \frac{i < \gamma, (p-k) > +m}{(p-k)^2 + m^2},$$

le terme $\dfrac{1}{p^4}$ vient du fait que le photon est sans masse.

1. Cette formulation dans le formalisme euclidien correspond à $\dfrac{-i\gamma p_e + m}{p_e^2 + m^2 - i\varepsilon}$ dans le formalisme lorentzien [40].

2.2 Intégration de moments intérieurs

On met sur $\mathbb{R}$ la mesure de Lebesgue normalisée

$$đ\xi = \frac{d\xi}{2\pi}$$

et on lui associe la mesure de Lebesgue normalisée sur W_Γ.
Pour tout q dans $W_{\Gamma/\gamma}$ on pose :

$$I_{\Gamma,\gamma}\varphi(q) = \int_{\mathcal{F}^{-1}_{\Gamma,\gamma}(\{q\})\subset W_\Gamma} \varphi(p) đp \tag{4.4}$$

d'où à priori :

$$I_{\Gamma,\gamma} : V_\Gamma \longrightarrow V_{\Gamma/\gamma}$$

si l'intégrale converge. Par intégration par étapes on peut voir que si $\delta \subset \gamma \subset \Gamma$, on a :

$$I_{\Gamma,\gamma} = I_{\Gamma/\delta,\gamma/\delta} \circ I_{\Gamma,\delta}$$

La règle de Feynman proprement dite est donnée par :

$$\Gamma \longmapsto I_{\Gamma,\Gamma}(\varphi(\Gamma)) \in V_{\Gamma/\Gamma}.$$

Le problème qui se pose est que ces intégrales sont en général divergentes.

3 Algorithme de Bogoliubov

On note π une certaine projection sur les contretermes. Concrètement $\pi : V_\Gamma \twoheadrightarrow V_\Gamma$ est donnée par le développement de Taylor à un certain ordre, ou alors en regularisation dimensionnelle on prend souvent $\pi : V_\Gamma[z^{-1}, z]] \twoheadrightarrow z^{-1}V_\Gamma[z^{-1}]$ (schéma minimal).
Si $|\gamma| = 0$ on constate que : $I_{\Gamma,\gamma} = Id$.
Si $|\gamma| = 1$ on posera : $I^-_{\Gamma,\gamma} := -\pi \circ I_{\Gamma,\gamma}$.
Si $|\gamma| \geq 2$ on procède par récurrence :

$$I^-_{\Gamma,\gamma} := -\pi \circ \Big(I_{\Gamma,\gamma} + \sum_{\delta\subset\gamma} I_{\Gamma/\delta,\gamma/\delta} \circ I^-_{\Gamma,\delta} \Big), \tag{4.5}$$

$$I^+_{\Gamma,\gamma} := (Id - \pi) \circ \Big(I_{\Gamma,\gamma} + \sum_{\delta\subset\gamma} I_{\Gamma/\delta,\gamma/\delta} \circ I^-_{\Gamma,\delta} \Big). \tag{4.6}$$

Ces formules sont simulaires au formules de Connes-Kreimer, mais il y a quelques différences : le produit commutatif de l'algebre-cible $\mathcal{A}$ est remplacé par la composition des opérateurs. D'autre part, on peut dire que la bigèbre $\widetilde{\mathcal{D}}_\mathcal{T}$ doit jouer un rôle : c'est en effet le cas. De plus, comme $I_{\Gamma,\gamma} = Id$ pour tout γ de degré zéro, on peut plutôt travailler avec l'algèbre de Hopf $\mathcal{D}_\mathcal{T} := \widetilde{\mathcal{D}}_\mathcal{T}/\mathcal{J}$, où $\mathcal{J}$ est le (bi-) idéal engendré par les éléments $\mathbf{1} - (\bar{\Gamma}, \gamma)$, pour $|\gamma| = 0$.

4 Adaptation du formalisme de Connes et Kreimer

Nous voulons réinterpréter l'approche de Smirnov [36, §8] dans le formalisme de Connes-Kreimer, en utilisant l'algèbre de Hopf $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ et une algèbre-cible qui n'est pas commutative, en raison de la composition de opérateurs.

4.1 Quelques faits sur les fonctions de Schwartz

Définition 30. *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite à décroissance rapide si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| < c.$$

L'ensemble des fonctions à décroissance rapide est l'espace de Schwartz, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 31. *On considère $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$ et on écrit $\underline{\xi} = (\xi, \eta)$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit $I_\sigma(\xi)$ sur $\mathbb{R}^d$ par :*

$$I_\sigma(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{d'}} \sigma(\xi, \eta) d\eta.$$

Proposition 18. *Soit σ un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$). Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, la fonction $\eta \longmapsto \sigma(\xi, \eta)$ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'})$.*

Preuve. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ alors $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d, \alpha_{d+1}, \cdots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_d, \beta_{d+1}, \cdots, \beta_n)$, comme $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il existe $c > 0$ telle que :

$$\left|\underline{\xi}^\alpha \partial^\beta \sigma(\underline{\xi})\right| < c.$$

Comme $\underline{\xi}^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_d^{\alpha_d}\, \eta_1^{\alpha_{d+1}} \cdots \eta_{d'}^{\alpha_n}$ et $\partial^\beta = \partial_{\xi_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{\xi_d}^{\beta_d}\, \partial_{\eta_1}^{\beta_{d+1}} \cdots \partial_{\eta_{d'}}^{\beta_n}$, en choisissant $\alpha_1 = \cdots = \alpha_d = 0$ et $\beta_1 = \cdots = \beta_d = 0$, on obtient :

$$\left|\eta_1^{\alpha_{d+1}} \cdots \eta_{d'}^{\alpha_n} \partial_{\eta_1}^{\beta_{d+1}} \cdots \partial_{\eta_{d'}}^{\beta_n} \sigma(\underline{\xi})\right| < c.$$

Donc pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{d'}$, il existe $c > 0$ telle que pour tout $\eta \in \mathbb{R}^{d'}$ on a :

$$\left|\eta^\alpha \partial^\beta \sigma(\xi, \eta)\right| < c,$$

et par suite : $\eta \longmapsto \sigma(\xi, \eta)$ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'})$. □

Proposition 19. *Soit $\underline{\xi} = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$ et Soit σ un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors la fonction $\xi \longmapsto I_\sigma(\xi)$ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$. D'après la proposition 18, $\eta \longmapsto \sigma(\xi, \eta)$ est à décroissance rapide pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. On peut donc dériver sous signe intégral.

$$\begin{aligned}
\left|\xi^\alpha \partial^\beta I(\xi)\right| &= \left|\xi^\alpha \partial^\beta \int_{\mathbb{R}^{d'}} \sigma(\xi,\eta) d\eta\right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^{d'}} \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(\xi,\eta) d\eta\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{d'}} \left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(\xi,\eta)\right| d\eta.
\end{aligned}$$

On introduit ici la notation $\Lambda(\eta) = \sqrt{1 + ||\eta||^2}$. Comme σ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et $k \geq 0$, il existe $C_{\alpha,\beta,k} > 0$ telle que l'on a :

$$\left|\xi^\alpha \partial^\beta \sigma(\xi,\eta)\right| \leq C_{\alpha,\beta,k} (\Lambda(\xi,\eta))^{-k}.$$

On prend alors $k = d' + 1$ et on utilise le fait que $\int_{\mathbb{R}^{d'}} (\Lambda(\eta))^{-d'-1} d\eta$ converge. On a donc :

$$\begin{aligned}
\left|\xi^\alpha \partial^\beta I_\sigma(\xi)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^{d'}} \left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(\xi,\eta)\right| d\eta \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{d'}} C_{\alpha,\beta,d'+1} (\Lambda(\xi,\eta))^{-d'-1} d\eta \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{d'}} C_{\alpha,\beta,d'+1} (\Lambda(\eta))^{-d'-1} d\eta \\
&\leq C_{\alpha,\beta,d'+1} \int_{\mathbb{R}^{d'}} (\Lambda(\eta))^{-d'-1} d\eta \\
&\leq C'_{\alpha,\beta,d'+1}.
\end{aligned}$$

Donc la fonction $\xi \longmapsto I_\sigma(\xi)$ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. □

4.2 Une algèbre de fonctions de Schwartz

Soit $\mathcal{T}$ une théorie quantique des champs et soit Γ un graphe connexe de la théorie $\mathcal{T}$. On rappelle ici que l'espace des moments du graphe Γ est défini par :

$$W_\Gamma = \{p : \mathcal{E}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{R}^d, \sum_{e \in st(v)} p_e = 0 \ \ \forall v \in \mathcal{V}(\Gamma), \ \ p_e + p_{\sigma(e)} = 0 \ \ \forall e \in \mathcal{E}(\Gamma) \ \ / \ \ e \neq \sigma(e)\}.$$

On pose :

$$V_\Gamma := \mathcal{S}(W_\Gamma). \tag{4.7}$$

Pour $\Gamma = \Gamma_1 \cdots \Gamma_r$ non connexe, on pose :

$$V_\Gamma = \bigotimes_{j \in \{1,\ldots,r\}} V_{\Gamma_j},$$

$$\mathcal{B} := \prod_{\Gamma \in \mathcal{T}} V_\Gamma. \tag{4.8}$$

Le produit court sur tous les graphes de la théorie (sans spécification éventuelle), localement $1PI$, connexes ou non, divergents (i.e tels que Γ/Γ donne un sommet dont le sous-type soit dans la théorie).

Tout $a \in \operatorname{End}\mathcal{B}$ s'écrit comme une matrice bloc dont les coefficients sont de la forme suivante :

$$a_{\Gamma\Gamma'} : V_\Gamma \longrightarrow V'_\Gamma.$$

On définit sur $\mathcal{B}$ un produit noté $\bullet$ par :

$$\begin{array}{rcl} a_{\Gamma_1\Gamma'_1} \bullet a_{\Gamma_2\Gamma'_2} : V_{\Gamma_1\Gamma_2} & \longrightarrow & V_{\Gamma'_1\Gamma'_2} \\ \bigotimes_{i\in\{1,2\}} v_i & \longmapsto & \bigotimes_{i\in\{1,2\}} a_{\Gamma_i\Gamma'_i}(v_i) \end{array}$$

Cette définition s'étend naturellement en un produit bilinéaire commutatif sur $\operatorname{End}\mathcal{B}$:

$$(a \bullet b)_{\Gamma\Gamma'} = \sum_{\substack{\partial\delta=\Gamma \\ \partial'\delta'=\Gamma'}} a_{\partial\partial'} \bullet a_{\delta\delta'}. \tag{4.9}$$

Considérant quatre application linéaires :

$$a_1 : V_{\Gamma_1} \longrightarrow V_{\Gamma'_1}; \qquad b_1 : V_{\Gamma'_1} \longrightarrow V_{\Gamma''_1},$$

$$a_2 : V_{\Gamma_2} \longrightarrow V_{\Gamma'_2}; \qquad b_2 : V_{\Gamma'_2} \longrightarrow V_{\Gamma''_2},$$

on a le résultat suivant :

Proposition 20.

$$(b_1 \circ a_1) \bullet (b_2 \circ a_2) = (b_1 \bullet b_2) \circ (a_1 \bullet a_2).$$

Preuve.

$$(b_1 \circ a_1) \bullet (b_2 \circ a_2)(\bigotimes_{i\in\{1,2\}} v_i) \;=\; \bigotimes_{i\in\{1,2\}} (b_i \circ a_i)(v_i)$$

$$\begin{array}{rcl} (b_1 \bullet b_2) \circ (a_1 \bullet a_2)(\bigotimes_{i\in\{1,2\}} v_i) & = & b_1 \bullet b_2(\bigotimes_{i\in\{1,2\}} a_i(v_i)) \\ & = & b_1 \bullet b_2(\bigotimes_{i\in\{1,2\}} b_i(a_i(v_i))) \\ & = & \bigotimes_{i\in\{1,2\}} (b_i \circ a_i)(v_i). \end{array}$$

□

4.3 Produit de convolution $\circledast$

On désigne par $\diamond$ l'opposé du produit de composition dans $\mathrm{End}\,\mathcal{B}$. On définit alors un produit de convolution $\circledast$ pour tout $\varphi,\ \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\mathcal{T}}, \mathrm{End}\,\mathcal{B})$ par :

$$\varphi \circledast \psi := \diamond(\varphi \otimes \psi)\Delta, \tag{4.10}$$

autrement dit, pour tous graphes spécifiés $\bar{\gamma}$, $\bar{\Gamma}$ tels que $\bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma}$ on a :

$$(\varphi \circledast \psi)(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = \sum_{\substack{\bar{\delta} \subseteq \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} \psi(\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}) \circ \varphi(\bar{\Gamma}, \bar{\delta}). \tag{4.11}$$

Théorème 14. *Soit G l'ensemble des morphismes d'algèbres unitaires : $\mathcal{D}_{\mathcal{T}} \longrightarrow (\mathrm{End}\,\mathcal{B}, \bullet)$. Muni du produit $\circledast$, l'ensemble G est un groupe.*

Preuve. L'associativité de $\circledast$ est immédiate, elle découle de l'associativité de $\diamond$ et la coassociativité de Δ. L'élément neutre E est defini par :

$$E(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = \begin{cases} Id_{\mathcal{B}} & \text{si } \bar{\gamma} \text{ est un graphe spécifié de degré zéro} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.12}$$

L'inverse d'un élément φ de G est donné récursivement par la formule suivante :

$$\begin{cases} \varphi^{\circledast -1}(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = \varphi(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = Id_{\mathcal{B}} \quad \text{si } |\gamma| = 0 \\ \\ \varphi^{\circledast -1}(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = \displaystyle\sum_{\substack{\bar{\delta} \subseteq \bar{\gamma} \\ |\delta| \geq 1}} \varphi^{\circledast -1}(\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}) \circ \varphi(\bar{\Gamma}, \bar{\delta}) \quad \text{si } |\gamma| \geq 1. \end{cases} \tag{4.13}$$

Le fait que pour tout $\varphi,\ \psi \in G$ on a $\varphi \circledast \psi \in G$ est une conséquence de la compatibilité entre les produits $\diamond$ et $\bullet$. En effet :

$$\begin{aligned}
(\varphi \circledast \psi)(\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}', \bar{\gamma}\bar{\gamma}') &= (\varphi \circledast \psi)(\Gamma\Gamma', \gamma\bar{\gamma}') \\
&= \sum_{\substack{\bar{\delta} \subseteq \bar{\gamma}\bar{\gamma}' \\ (\bar{\gamma}\bar{\gamma}')/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} \psi(\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}'/\bar{\delta}, (\bar{\gamma}\bar{\gamma}')/\bar{\delta}) \circ \varphi(\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}', \bar{\delta}) \\
&= \sum_{\substack{\bar{\delta} \subset \bar{\gamma},\ \bar{\delta}' \subset \bar{\gamma}' \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta}; \bar{\gamma}'/\bar{\delta}' \in \mathcal{T}}} \psi(\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}'/\bar{\delta}\bar{\delta}', \bar{\gamma}\bar{\gamma}'/\bar{\delta}\bar{\delta}') \circ \varphi(\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}', \bar{\delta}\bar{\delta}') \\
&= \sum_{\substack{\bar{\delta} \subset \bar{\gamma},\ \bar{\delta}' \subset \bar{\gamma}' \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta}; \bar{\gamma}'/\bar{\delta}' \in \mathcal{T}}} \Big(\psi(\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}) \bullet \psi(\bar{\Gamma}'/\bar{\delta}', \bar{\gamma}'/\bar{\delta}')\Big) \circ \Big(\varphi(\bar{\Gamma}, \bar{\delta}) \bullet \varphi(\bar{\Gamma}', \bar{\delta}')\Big) \\
&= \sum_{\substack{\bar{\delta} \subset \bar{\gamma},\ \bar{\delta}' \subset \bar{\gamma}' \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta}; \bar{\gamma}'/\bar{\delta}' \in \mathcal{T}}} \Big(\psi(\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}) \circ \varphi(\bar{\Gamma}, \bar{\delta})\Big) \bullet \Big(\psi(\bar{\Gamma}'/\bar{\delta}', \bar{\gamma}'/\bar{\delta}') \circ \varphi(\bar{\Gamma}', \bar{\delta}')\Big) \\
&= (\varphi \circledast \psi)(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) \bullet (\varphi \circledast \psi)(\bar{\Gamma}', \bar{\gamma}').
\end{aligned}$$

□

4.4 Développement de Taylor

Dans cet paragraphe nous adoptons les notations du Paragraphe §3.5. Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre commutative définie par (4.8). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'opérateur de développement de Taylor d'ordre m défini par :

$$P_m \in \mathrm{End}(\mathcal{B}), \quad P_m f(v) := \sum_{|\beta| \leq m} \frac{v^\beta}{\beta!} \partial_0^\beta f \tag{4.14}$$

Soit φ un élément de G. Nous définissons la décomposition de Birkhoff :

$$\varphi = \varphi_-^{*-1} \circledast \varphi_+. \tag{4.15}$$

Les composantes φ_+ et φ_- sont données par les formules récursives suivantes. Pour tout $(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma})$ de degré zéro (i.e sans arêtes internes) on a : $\varphi_-(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = \varphi_+(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = \varphi(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = Id_{\mathcal{B}}$. Si nous supposons que $\varphi_-(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma})$ et $\varphi_+(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma})$ sont connus pour $(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma})$ de degré $k \leq m-1$, nous avons alors pour tout couple de graphes spécifiés $(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma})$ de degré m :

$$\varphi_-(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = -P_m \left(\varphi(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) + \sum_{\substack{\bar{\delta} \subsetneq \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} \varphi(\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}) \circ \varphi_-(\bar{\Gamma}, \bar{\delta}) \right) \tag{4.16}$$

$$\varphi_+(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = (I - P_m) \left(\varphi(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) + \sum_{\substack{\bar{\delta} \subsetneq \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} \varphi(\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}) \circ \varphi_-(\bar{\Gamma}, \bar{\delta}) \right). \tag{4.17}$$

Les opérateurs P_m forment *une famille de Rota-Baxter*. Pour tout graphe Γ, pour tout $f, g \in V_\Gamma$ et pour tout $s, t \in \mathbb{N}$ on a :

$$(P_s f)(P_t g) = P_{s+t}[(P_s f)g + f(P_t g) - fg]. \tag{4.18}$$

Théorème 15. *Soit $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}}$ le dédoublement de bigèbre des graphes de Feynman spécifiés et φ un caractère de $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}}$ à valeurs dans l'algèbre commutative unitaire $\mathcal{B}$. De plus soit $P_\cdot : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{B})$ un schéma de renormalisation indexé, c'est-à-dire une famille d'endomorphismes $(P_t)_{t \in \mathbb{N}}$ tels que :*

$$\mu \circ (P_s \otimes P_t) = P_{s+t} \circ \mu \circ [P_s \otimes Id + Id \otimes P_t - Id \otimes Id], \tag{4.19}$$

pour tout $s, t \in \mathbb{N}$. Alors φ_- et φ_+ définis par (4.16) et (4.17) sont deux caractères de $(\mathcal{B}, \bullet)$.

Preuve. On se limite à montrer que φ_- est un caractère. Le fait que φ_+ est aussi un caractère s'obtient automatiquement.
Pour $(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}), (\bar{\Gamma}', \bar{\gamma}') \in \ker \varepsilon$, on écrit $\varphi_-(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = -P_{|(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma})|}(\bar{\varphi}(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}))$, où :

$$\bar{\varphi}(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = \varphi(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) + \sum_{\substack{\bar{\delta} \subsetneq \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} \varphi(\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}) \circ \varphi_-(\bar{\Gamma}, \bar{\delta}).$$

Pour prouver ce théorème, nous utilisons les formules (4.16) et (4.19).

$$
\begin{aligned}
\varphi_-(\bar\Gamma\bar\Gamma',\bar\gamma\bar\gamma') &= -P_{|(\bar\Gamma\bar\Gamma',\bar\gamma\bar\gamma')|}\Big(\varphi(\bar\Gamma\bar\Gamma',\bar\gamma\bar\gamma') + \sum_{\substack{\bar\delta\bar\delta'\subsetneq\bar\gamma\bar\gamma'\\ \bar\gamma\bar\gamma'/\bar\delta\bar\delta'\in\mathcal{T}}} \varphi(\bar\Gamma\bar\Gamma'/\bar\delta\bar\delta',\bar\gamma\bar\gamma'/\bar\delta\bar\delta')\circ\varphi_-(\bar\Gamma\bar\Gamma',\bar\delta\bar\delta')\Big)\\
&= -P_{|(\bar\Gamma\bar\Gamma',\bar\gamma\bar\gamma')|}\Big[\varphi(\bar\Gamma,\bar\gamma)\bullet\varphi(\bar\Gamma',\bar\gamma') + \varphi_-(\bar\Gamma,\bar\gamma)\bullet\varphi(\bar\Gamma',\bar\gamma') + \varphi(\bar\Gamma,\bar\gamma)\bullet\varphi_-(\bar\Gamma',\bar\gamma')\\
&+ \sum_{\substack{\bar\delta\subsetneq\bar\gamma\\ \bar\gamma/\bar\delta\in\mathcal{T}}} \big(\varphi(\bar\Gamma/\bar\delta,\bar\gamma/\bar\delta)\circ\varphi_-(\bar\Gamma,\bar\delta)\big)\bullet\big(\varphi_-(\bar\Gamma',\bar\gamma') + \varphi(\bar\Gamma',\bar\gamma')\big)\\
&+ \sum_{\substack{\bar\delta'\subsetneq\bar\gamma'\\ \bar\gamma'/\bar\delta'\in\mathcal{T}}} \big(\varphi(\bar\Gamma'/\bar\delta',\bar\gamma'/\bar\delta')\circ\varphi_-(\bar\Gamma',\bar\delta')\big)\bullet\big(\varphi_-(\bar\Gamma,\bar\gamma) + \varphi(\bar\Gamma,\bar\gamma)\big)\\
&+ \sum_{\substack{\bar\delta\subsetneq\bar\gamma\,,\,\bar\delta'\subsetneq\bar\gamma'\\ \bar\gamma/\bar\delta\,;\,\bar\gamma'/\bar\delta'\in\mathcal{T}}} \Big(\varphi(\bar\Gamma/\bar\delta,\bar\gamma/\bar\delta)\circ\varphi_-(\bar\Gamma,\bar\delta)\Big)\bullet\Big(\varphi(\bar\Gamma'/\bar\delta',\bar\gamma'/\bar\delta')\circ\varphi_-(\bar\Gamma',\bar\delta')\Big)\Big]\\
&= -P_{|(\bar\Gamma,\bar\gamma)|+|(\bar\Gamma',\bar\gamma')|}\Big[\Big(\varphi(\bar\Gamma,\bar\gamma) + \sum_{\substack{\bar\delta\subsetneq\bar\gamma\\ \bar\gamma/\bar\delta\in\mathcal{T}}} \varphi(\bar\Gamma/\bar\delta,\bar\gamma/\bar\delta)\circ\varphi_-(\bar\Gamma,\bar\delta)\Big)\\
&\qquad\qquad\bullet\Big(\varphi(\bar\Gamma',\bar\gamma') + \sum_{\substack{\bar\delta'\subsetneq\bar\gamma'\\ \bar\gamma'/\bar\delta'\in\mathcal{T}}} \varphi(\bar\Gamma'/\bar\delta',\bar\gamma'/\bar\delta')\circ\varphi_-(\bar\Gamma',\bar\delta')\Big)\\
&+ \varphi_-(\bar\Gamma',\bar\gamma')\bullet\Big(\varphi(\bar\Gamma,\bar\gamma) + \sum_{\substack{\bar\delta\subsetneq\bar\gamma\\ \bar\gamma/\bar\delta\in\mathcal{T}}} \varphi(\bar\Gamma/\bar\delta,\bar\gamma/\bar\delta)\circ\varphi_-(\bar\Gamma,\bar\delta)\Big)\\
&+ \varphi_-(\bar\Gamma,\bar\gamma)\bullet\Big(\varphi(\bar\Gamma',\bar\gamma') + \sum_{\substack{\bar\delta'\subsetneq\bar\gamma'\\ \bar\gamma'/\bar\delta'\in\mathcal{T}}} \varphi(\Gamma'/\delta',\gamma'/\delta')\circ\varphi_-(\bar\Gamma',\bar\delta')\Big)\Big]\\
&= -P_{|(\bar\Gamma,\bar\gamma)|+|(\bar\Gamma',\bar\gamma')|}\Big[\bar\varphi(\bar\Gamma,\bar\gamma)\bullet\bar\varphi(\bar\Gamma',\bar\gamma') - P_{|(\bar\Gamma,\bar\gamma)|}(\bar\varphi(\bar\Gamma,\bar\gamma))\bullet\bar\varphi(\bar\Gamma',\bar\gamma')\\
&\qquad\qquad -P_{|(\bar\Gamma',\bar\gamma')|}(\bar\varphi(\bar\Gamma',\bar\gamma'))\bullet\bar\varphi(\bar\Gamma,\bar\gamma)\Big]\\
&= P_{|(\bar\Gamma,\bar\gamma)|+|(\bar\Gamma',\bar\gamma')|}\Big[P_{|(\bar\Gamma',\bar\gamma')|}(\bar\varphi(\bar\Gamma',\bar\gamma'))\bullet\bar\varphi(\bar\Gamma,\bar\gamma) + P_{|(\bar\Gamma,\bar\gamma)|}(\bar\varphi(\bar\Gamma,\bar\gamma))\bullet\bar\varphi(\bar\Gamma',\bar\gamma')\\
&\qquad\qquad -\bar\varphi(\bar\Gamma,\bar\gamma)\bullet\bar\varphi(\bar\Gamma',\bar\gamma')\Big]\\
&= P_{|(\bar\Gamma,\bar\gamma)|}\big(\bar\varphi(\bar\Gamma,\bar\gamma)\big)\bullet P_{|(\bar\Gamma',\bar\gamma')|}\big(\bar\varphi(\bar\Gamma',\bar\gamma')\big)\\
&= \varphi_-(\bar\Gamma,\bar\gamma)\bullet\varphi_-(\bar\Gamma',\bar\gamma').
\end{aligned}
$$

□

5 Régularisation dimensionnelle

Le problème de la théorie de la renormalisation perturbative est de donner un sens à certaines intégrales divergentes résultant de graphes de Feynman. La difficulté analytique est de

régulariser les intégrales divergentes qui se produisent en associant à chaque graphe de Feynman une famille de valeurs finies indexée par un paramètre. Une des procédures pour régulariser une intégrale est appelée régularisation dimensionnelle. L'idée de base de la régularisation dimensionnelle est d'écrire les intégrales divergentes que nous avons à régulariser de manière à ce que la dimension de l'espace-temps physique d puisse être remplacée par un nombre complexe quelconque. La valeur régularisée est obtenue par la soustraction minimale : nous soustrayons la partie polaire dans le développement de Laurent autour de d et évaluons la fonction restante en d. Nous reprenons l'approche de Pavel Etingof [19] et Ralf Meyer [33].

5.1 Idée générale

Soit V l'espace-temps de dimension d. Considérons un graphe de Feynman avec m arêtes extérieures et $q_1, \cdots, q_m \in V$ les moments correspondants, et avec $n-m$ boucles ($n \geq m$). L'amplitude de ce graphe peut être écrite sous cette forme :

$$I_{(q_1 \cdots q_m)}(f) := \int_{V^{n-m}} f(q_1 \cdots q_n) dq_{m+1} \cdots dq_n, \tag{4.20}$$

où nous supposerons dans un premier temps que f est une fonction de Schwartz. La dimension d de l'espace-temps est devenue un paramètre externe qui peut être remplacé par n'importe quel nombre complexe D. Nous obtenons ainsi les résultats suivants : d'abord, pour $\operatorname{Re} D > n+1$ et $\operatorname{Re} D < 0$ l'intégrale $I^D(f)$ existe, d'autre part, cette fonction en D admet une extension holomorphe sur $\mathbb{C}$. Si f est une fonction rationnelle, $I^D(f)$ est encore définie sur un demi-plan et admet une extension méromorphe.
Une fois que nous avons une fonction méromorphe $I^D(f)$, la valeur de régularisation de l'intégrale est obtenue par la soustraction minimale à la dimension physique $D = d$. Nous considérons la série de Laurent autour de d :

$$I^D(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n.(D-d)^n. \tag{4.21}$$

Alors la partie polaire est donnée par :

$$I^D_-(f) := \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n.(D-d)^n, \tag{4.22}$$

et la valeur régularisée est :

$$I^{reg}(f) := a_0. \tag{4.23}$$

5.2 L'integrale D-dimensionnelle

Dans cette section, nous construisons l'intégrale D-dimensionnelle pour les fonctions de Schwartz. Nous allons travailler avec le modèle euclidien de l'espace-temps. Soit alors $V = \mathbb{R}^d$

l'espace-temps euclidien, β est la métrique définie positive canonique sur V. On note d la dimension physique de l'espace-temps et on utilise D pour la dimension lorsqu'elle est considérée comme une variable complexe. Le groupe de Lorentz est remplacé par le groupe orthogonal $O(d)$.

Soit W un espace vectoriel de dimension finie. On désigne par S^2W^* l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur W, par $\bar{S}^2_+W^*$ les sous ensemble des formes bilinéaires semi-définies positives sur W, et par $S^2_+W^*$ le sous ensemble des formes bilinéaires définies positives sur W. Ainsi :

$$S^2_+W^* \subset \bar{S}^2_+W^* \subset S^2W^*.$$

On désigne par $\mathcal{S}(\bar{S}^2_+W^*)$ et $\mathcal{S}(S^2W^*)$ le deux espaces de Schwartz des fonctions sur $\bar{S}^2_+W^*$ et S^2W^* respectivement. Par définition, une fonction sur $\bar{S}^2_+W^*$ est une fonction de Schwartz si et seulement si elle est une restriction d'une fonction de Schwartz sur S^2W^*.
Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace de E. On considère le n-uplet $q := (q_1, \cdots, q_n)$, où $q_j \in \mathbb{R}^d$, comme un élément de l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{R}^d)$. Le m-uplet $(q_1, \cdots, q_m)$ n'est autre que la restriction $q_{|F} \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{R}^d)$. La forme bilinéaire $q^*(\beta) \in \bar{S}^2_+E^*$ est la tirée en arrière de $\beta \in (S^2_+\mathbb{R}^d)^*$.

Proposition 21. *[33] Soit q_1 et q_2 deux éléments de* $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{R}^d)$. *Alors q_1 et q_2 appartiennent à la même $O(d)$-orbite si et seulement si $q_1^*\beta = q_2^*\beta$.*

On suppose que la fonction f est définie sur $\bar{S}^2_+E^*$. Alors son intégrale est définie par :

$$I^d\big|_{k^*\beta}(f) = \int_{\{q \in \mathrm{Hom}(E,\mathbb{R}^d)/q_{|F}=k\}} f(q^*\beta)dq, \tag{4.24}$$

pour $k \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{R}^d)$. Le côté droit ne dépend que de $k^*\beta$ et non pas k lui-même. L'intégrale $I^d\big|_C(f)$ est bien définie sauf si $\mathrm{rang}(C) \leq d$.

5.3 Extrapolation aux dimensions complexes

Soit $\phi_B(A)$, définie pour tout A dans $S^2_+E^*$ et B dans S^2_+E par :

$$\phi_B(A) := \exp(-\mathrm{tr}(AB)).$$

La fonction ϕ_B est une fonction de Schwartz sur $\bar{S}^2_+E^*$ par positivité.

Proposition 22. *Soit $B \in S^2_+E^*$. On désigne par $B_{F^\perp}$, la restriction de B à $F^\perp = (E/F)^* \subseteq E^*$ et $B^{F^*} \in S^2_+F^*$ est la forme bilinéaire sur F. L'integrale $I^d\big|_C(\phi_B)$ est définie pour $C \in \bar{S}^2_+F^*$ telle que* $\mathrm{rang}(C) \leq d$, *et est donnée par :*

$$I^d\big|_C(\phi_B) = \pi^{(n-m)d/2} \exp(-\mathrm{tr}(C.B^{F^*})).(\det B_{F^\perp})^{-d/2}. \tag{4.25}$$

Preuve. On décompose E de la manière suivante : $E = F \oplus F^{\perp}$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale de E telle que B est diagonale sur $(e_1, \ldots, e_n)$. On prend alors $(e_1, \cdots, e_m)$ une base de F pour $B_{|F} = B^{F^*}$ et $(e_{m+1}, \ldots, e_n)$ une base orthogonale de $F^{\perp}$ et on note $\mu_i = B(e_i, e_i)$. La condition $\mathrm{rang}(C) \leq d$ implique l'existence d'une forme bilinéaire symétrique β sur $\mathbb{R}^d$ telle que $C = k^*\beta$ avec $k \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{R}^d)$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
I^d\big|_C(\phi_B) &= \int_{\{q \in \mathrm{Hom}(E,V)/q_{|F}=k\}} \exp\Big(- \mathrm{tr}(C.B)\Big) dq \\
&= \int_{\{q \in \mathrm{Hom}(E,V)/q_{|F}=k\}} \exp\Big(- \sum_{i=1}^{n} \mu_i q^*\beta(e_i, e_i)\Big) dq \\
&= \int_{\{q \in \mathrm{Hom}(E,V)/q_{|F}=k\}} \exp\Big(- \sum_{i=1}^{n} \mu_i ||q(e_i)||^2\Big) dq \\
&= \exp\big(- \sum_{i=1}^{m} \mu_i ||k_j||^2\big) \int_{\{q \in \mathrm{Hom}(E,V)/q_{|F}=k\}} \exp\Big(- \sum_{i=m+1}^{n} \mu_i ||q(e_i)||^2\Big) dq \\
&= \exp\Big(- \mathrm{tr}\big(k^*\beta_{|F}.B^{F^*}\big)\Big) \prod_{i=m+1}^{n} \int \exp\Big(\mu_i ||q(e_i)||^2\Big) dq_i \\
&= \exp\Big(- \mathrm{tr}\big(C.B^{F^*}\big)\Big) \prod_{i=m+1}^{n} \pi^{d/2} \mu_i^{-d/2} \\
&= \pi^{(n-m)d/2} \exp\Big(- \mathrm{tr}\big(C.B^{F^*}\big)\Big) (\det B_{F^{\perp}})^{-d/2}.
\end{aligned}$$

□

Nous écrivons E sous la forme $E \cong F \oplus G$ et décrivons B par une matrice-bloc (B_{ij}) qui respecte la décomposition $E^* = F^* \oplus G^*$, alors nous obtenons :

$$B_{F^{\perp}} = B_{22}, \qquad\qquad B^{F^*} = B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}. \tag{4.26}$$

Si la décomposition de E diagonalise la matrice B, nous obtenons alors $B^{F^*} = B_{11}$

Théorème 16. *[33] Il existe une unique distribution $I^D\big|_C \in \mathcal{S}(\bar{S}^2_+E^*)'$ qui satisfait :*

$$I^D\big|_C(\phi_B) = \pi^{(n-m)D/2} \exp(-\mathrm{tr}(C.B^{F^*})).(\det B_{F^{\perp}})^{-D/2} \tag{4.27}$$

pour tout $B \in S^2_+E$, $C \in \bar{S}^2_+F^*$ et $D \in \mathbb{C}$. Ces distributions constituent une application linéaire continue :

$$I = (I^D)_{D\in\mathbb{C}} : \mathcal{S}(\bar{S}^2_+E^*) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathcal{S}(\bar{S}^2_+F^*)).$$

Définition 32. *L'operateur I^D est appelée intégrale D-dimensionnelle à un paramètre. Si $F = \{0\}$, I^D est appelé intégrale D-dimensionnelle.*

5.4 Construction de l'intégrale D-dimensionnelle à paramètres

Pour prouver le théorème 16, nous présentons deux descriptions pour construire une distribution $I^D\big|_C$ satisfaisant (4.27). La première est définie pour $\mathrm{Re}\, D > n-1$. La seconde est définie pour $\mathrm{Re} < 0$ et on l'utilise pour étendre la première description à tout $D \in \mathbb{C}$.
Pour tout $l \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{C}$, on définit :

$$\Gamma_l(x) := \pi^{l(l-1)/4} \prod_{j=0}^{l-1} \Gamma(x - \frac{j}{2}).$$

Pour $\mathrm{Re}\, D > n-1$ et $C \in S^2_+F^*$, On définit :

$$A \longmapsto \rho^D(A,C) := \pi^{(n-m)D/2}.\frac{\Gamma_m(D/2)}{\Gamma_n(D/2)}.\frac{(\det A)^{(D-n-1)/2}}{(\det C)^{(D-m-1)/2}}.\delta(A_F - C).$$

Cette distribution est bien définie car $(\det A)^{-1}$ est localement intégrable sur S^2E^*.

Lemme 1. *[33] Soit* $\mathrm{Re}\, D > n-1$, $C \in S^2_+F^*$ *et* $B \in S^2_+E$. *Alors :*

$$\int_{S^2_+E^*} \rho^D(A,C)\phi_B(A)dA = \pi^{(n-m)D/2} \exp(-\operatorname{tr}(C.B^{F^*})).(\det B_{F^\perp})^{-D/2}.$$

Preuve. Les deux côtés de l'équation sont définis de manière indépendamment du choix d'une base : ils n'utilisent que le sous-espace $F \subseteq E$, les formes volume sur E et F, et les formes bilinéaires définies positives C et B. Soit $(x_i)_{1\le i\le n}$ une base de E telle que $F =< x_1, \ldots, x_m >$ et $G =< x_{m+1}, \ldots, x_n >$. On désigne par $(x_i^*)_{1\le i\le n}$ la base duale de E^*. On pose :

$$G := F^{\perp_B} =< x_{m+1}, \ldots, x_n > \subseteq E, \qquad G^* = F^\perp \subseteq E^*,$$

les formes bilinéaires définies positives B et C sont alors écrites sous la forme :

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B^{F^*} & 0 \\ 0 & B_{F^\perp} \end{pmatrix}.$$

Soit A un élément de $S^2_+E^*$, on represente A par une matrice-bloc (A_{ij}) qui respecte la décompostion $E = F \oplus G$. Si A est définie positive, A_{11} aussi. D'où A_{11} est inversible et on peut définir :

$$Y := A_{21}A_{11}^{-1}, \qquad Y^* := A_{11}^{-1}A_{12}, \qquad X := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

L'egalité suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & Y^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

montre que $A > 0$ si et seulement si $A_{11} > 0$ et $X > 0$ et que $\det A = \det A_{11}.\det X$. Nous utilisons le changement de variables suivant : $A \longmapsto (A_{11}, X, A_{21})$ qui identifie

$$S_+^2 E^* \cong S_+^2 F^* \times S_+^2 F^\perp \times \mathrm{Hom}(F^*, F^\perp).$$

Le déterminant du jacobien est égal à 1. En simplifiant tout d'abord la fonction δ puis l'intégrale gaussienne de A_{21}, on obtient :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{S_+^2 E^*} \rho^D(A,C)\phi_B(A)dA \\
&= \int_{S_+^2 E^*} \pi^{(n-m)D/2} \frac{\Gamma_m(D/2)}{\Gamma_n(D/2)} \frac{(\det A)^{(D-n-1)/2}}{(\det C)^{(D-m-1)/2}} \exp\big(-\mathrm{tr}(AB)\big).\delta(A_F - C)dA \\
&= \int_{S_+^2 F^* \times S_+^2 F^\perp \times \mathrm{Hom}(F^*,F^\perp)} \pi^{(n-m)D/2} \frac{\Gamma_m(D/2)}{\Gamma_n(D/2)} \frac{(\det A_{11}.\det X)^{(D-n-1)/2}}{(\det C)^{(D-m-1)/2}} \\
&\qquad \exp\big(-\mathrm{tr}(A_{11}B_{11}) - \mathrm{tr}(A_{22}B_{22})\big).\delta(A_F - C)dA_{11}dA_{21}dX \\
&= \int_{S_+^2 F^* \times S_+^2 F^\perp \times \mathrm{Hom}(F^*,F^\perp)} \pi^{(n-m)D/2} \frac{\Gamma_m(D/2)}{\Gamma_n(D/2)} \frac{(\det A_{11}.\det X)^{(D-n-1)/2}}{(\det C)^{(D-m-1)/2}} \\
&\qquad \exp\big(-\mathrm{tr}(A_{11}B_{11}) - \mathrm{tr}(X + A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})B_{22}\big).\delta(A_F - C)dA_{11}dA_{21}dX \\
&= \pi^{(n-m)D/2}.\frac{\Gamma_m(D/2)}{\Gamma_n(D/2)}(\det C)^{(m-n)/2} \exp\big(-\mathrm{tr}(B^{F^*}C)\big) \\
&\qquad \int_{S_+^2 F^\perp} (\det X)^{(D-n-1)/2} \exp\big(-tr(B_F^\perp X)\big) \\
&\qquad \int_{\mathrm{Hom}(F^*,F^\perp)} \exp\big(-\mathrm{tr}(B_{F^\perp}A_{21}C^{-1}A_{21}^t)\big)dA_{21}dX.
\end{aligned}$$

Soit $J = \displaystyle\int_{\mathrm{Hom}(F^*,F^\perp)} \exp\big(-\mathrm{tr}(B_{F^\perp}A_{21}C^{-1}A_{21}^t)\big)dA_{21}$, on effectue le changement de variables suivant :

$$A'_{21} = C^{-1/2}A_{21},$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
dA_{21} &= (\det C)^{m(n-m)/2m} dA'_{21} \\
&= (\det C)^{(n-m)/2} dA'_{21},
\end{aligned}$$

et J devient :

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\mathrm{Hom}(F^*,F^\perp)} \exp\big(-\mathrm{tr}(B_{F^\perp}A_{21}C^{-1}A_{21}^t)\big)dA_{21} \\
&= (\det C)^{(n-m)/2} \int_{\mathrm{Hom}(F^*,F^\perp)} \exp\big(-\mathrm{tr}(B_{F^\perp}A_{21}A_{21}^t)\big)dA_{21}.
\end{aligned}$$

On effectue un autre changement de variables :

$$A'_{21} = (B_{F^\perp})^{1/2} A_{21} = (b_{F^\perp})^{1/2} A_{21},$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} dA_{21} &= (\det B_{F^\perp})^{-m(n-m)/2(n-m)} dA'_{21} \\ &= (\det B_{F^\perp})^{-m/2} dA'_{21}, \end{aligned}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} J &= (\det C)^{(n-m)/2} (\det B_{F^\perp})^{-m/2} \int_{\mathrm{Hom}(F^*, F^\perp)} \exp\big(-\mathrm{tr}(A_{21} A_{21}^t)\big) dA_{21} \\ &= \pi^{m(n-m)/2} (\det C)^{(n-m)/2} (\det B_{F^\perp})^{-m/2}, \end{aligned}$$

et l'intégrale I devient :

$$\begin{aligned} I &= \pi^{(n-m)D/2} . \frac{\Gamma_m(D/2)}{\Gamma_n(D/2)} (2\pi)^{m(n-m)/2} \exp\big(-\mathrm{tr}(B^{F^*} C)\big) \\ &\qquad \int_{S^2_+ F^\perp} (\det B_{F^\perp})^{-m/2} (\det X)^{(D-n-1)/2} \exp\big(-\mathrm{tr}(B_F^\perp X)\big) dX. \end{aligned}$$

Soit $K = \displaystyle\int_{S^2_+ F^\perp} (\det B_{F^\perp})^{-m/2} (\det X)^{(D-n-1)/2} \exp\big(-\mathrm{tr}(B_{F^\perp} X)\big) dX$. On effectue le changement de variables suivant :

$$X' = B_{F^\perp} X = b_{F^\perp} X,$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} dX &= (\det B_{F^\perp})^{-(n-m)(n-m+1)/2(n-m)} dX' \\ &= (\det B_{F^\perp})^{-(n-m+1)/2} dX', \end{aligned}$$

et l'intégrale K devient :

$$\begin{aligned} K &= (\det B_{F^\perp})^{-m/2} (\det B_{F^\perp})^{-(n-m+1)/2} \int_{S^2_+ F^\perp} (\det {b_{F^\perp}}^{-1} X)^{(D-n-1)/2} \exp\big(-\mathrm{tr} X\big) dX \\ &= (\det B_{F^\perp})^{[-m-(n-m+1)-(D-n-1)]/2} \int_{S^2_+ F^\perp} (\det X)^{(D-n-1)/2} \exp\big(-\mathrm{tr} X\big) dX \\ &= (\det B_{F^\perp})^{-D/2} \int_{S^2_+ F^\perp} (\det X)^{(D-n-1)/2} \exp\big(-\mathrm{tr} X\big) dX. \end{aligned}$$

On décompose maintenant $G = F^\perp := G_1 \oplus G_2$ avec $\dim G_1 = 1$. On écrit $X = (X_{ij})$, et $X_{11} = x_{11}$, et on pose :

$$T := X_{21} X_{11}^{-1}, \qquad T^* := X_{11}^{-1} X_{12}, \qquad L := X_{22} - X_{21} X_{11}^{-1} X_{12}.$$

Par calcul on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & T^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Cette égalité montre que $X > 0$ si et seulement si $X_{11} > 0$ et $L > 0$ et que $\det X = \det X_{11}.\det L$. Nous utilisons le changement des variables suivant : $X \longmapsto (X_{11}, L, X_{21})$. L'intégrale K s'écrit :

$$\begin{aligned} K &= (\det B_{F^\perp})^{-D/2} \int_{S_+^2 F^\perp} (\det X)^{(D-n-1)/2} \exp\big(-\mathrm{tr}X\big) dX \\ &= (\det B_{F^\perp})^{-D/2} \int_{S_+^2 G_1 \times S_+^2 G_2 \times \mathrm{Hom}(G_1,G_2)} (\det X_{11})^{(D-n-1)/2} \exp\big(-\mathrm{tr}X_{11}\big) \\ &\qquad (\det L)^{(D-n-1)/2} \exp\big(-\mathrm{tr}(L + X_{21}X_{11}^{-1}X_{12})\big) dX_{11} dL dX_{21} \\ &= (\det B_{F^\perp})^{-D/2} \int_{S_+^2 G_1 \times S_+^2 G_2} (\det X_{11})^{(D-n-1)/2} \exp\big(-\mathrm{tr}X_{11}\big) (\det L)^{(D-n-1)/2} \\ &\qquad \exp\big(-\mathrm{tr}(L)\big) \int_{\mathrm{Hom}(G_1,G_2)} \exp\big(-\mathrm{tr}(X_{21}X_{11}^{-1}X_{12})\big) dX_{21}\, dX_{11} dL. \end{aligned}$$

L'intégrale

$$\int_{\mathrm{Hom}(G_1,G_2)} \exp\big(-\mathrm{tr}(X_{21}X_{11}^{-1}X_{12})\big) dX_{21}$$

est égale à $\pi^{(n-m-1)/2}(\det X_{11})^{(n-m-1)/2}$, donc :

$$\begin{aligned} K &= \pi^{(n-m-1)/2} (\det B_{F^\perp})^{-D/2} \int_{S_+^2 G_1} (\det X_{11})^{[(D-n-1)/2 + (n-m-1)/2]} \exp(-X_{11}) dX_{11} \\ &\qquad \int_{S_+^2 G_2} (\det L)^{(D-n-1)/2} \exp\big(-\mathrm{tr}(L)\big) dL \\ &= \pi^{(n-m-1)/2} (\det B_{F^\perp})^{-D/2} \int_{S_+^2 G_1} X_{11}^{(D-m-2)/2} \exp(-X_{11}) dX_{11} \\ &\qquad \int_{S_+^2 G_2} (\det L)^{(D-n-1)/2} \exp\big(-\mathrm{tr}(L)\big) dL \\ &= \pi^{(n-m-1)/2} (\det B_{F^\perp})^{-D/2} \Gamma\big(D/2 - m/2\big) . \int_{S_+^2 G_2} (\det L)^{(D-n-1)/2} \exp\big(-\mathrm{tr}(L)\big) dL. \end{aligned}$$

On répète ce raisonnement $n - m + 1$ fois, ce qui fait apparaître un produit de fonctions

Gamma et de puissances de π :

$$\begin{aligned} I &= \pi^{(n-m)D/2}.\frac{\Gamma_m(D/2)}{\Gamma_n(D/2)}\exp\big(-\mathrm{tr}(B^{F^*}C)\big)(\det B_{F^\perp})^{-D/2}. \\ &\quad \pi^{m(n-m)/2}.\pi^{(n-m-1)/2}.\Gamma\big(D/2-m/2\big).\pi^{(n-m-2)/2}.\Gamma\big(D/2-(m+1)/2\big)\cdots \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\pi^0.\Gamma\big(D/2-(n-1)/2\big) \\ &= \pi^{(n-m)D/2}\frac{\pi^{\frac{(m-n)(m+n-1)}{4}}}{\prod_{j=m}^{n-1}\Gamma\big(D/2-j/2\big)}\exp\big(-\mathrm{tr}(B^{F^*}C)\big)(\det B_{F^\perp})^{-D/2} \\ &\quad \pi^{(n-m)m/2}\pi^{\sum_{j=m+1}^{n}(n-j)/2}.\prod_{j=m}^{n-1}\Gamma\big(D/2-j/2\big) \\ &= \pi^{(n-m)D/2}\frac{\pi^{\frac{(m-n)(m+n-1)}{4}}}{\prod_{j=m}^{n-1}\Gamma\big(D/2-j/2\big)}\exp\big(-\mathrm{tr}(B^{F^*}C)\big)(\det B_{F^\perp})^{-D/2} \\ &\quad \pi^{\frac{(n-m)(m+n-1)}{4}}.\prod_{j=m}^{n-1}\Gamma\big(D/2-j/2\big) \\ &= \pi^{(n-m)D/2}\exp\big(-\mathrm{tr}(B^{F^*}C)\big)(\det B_{F^\perp})^{-D/2}. \end{aligned}$$

D'où le résultat final :

$$\int_{S^2_+E^*}\rho^D(A,C)\phi_B(A)dA = \pi^{(n-m)D/2}\exp(-\mathrm{tr}(C.B^{F^*})).(\det B_{F^\perp})^{-D/2}.$$

□

Ainsi, nous pouvons définir $I^D\big|_C$ pour $\mathrm{Re}D > n-1$ et $C \in S^2_+F^*$ par :

$$I^D\big|_C := \rho^D(.,C).$$

Définition 33. *On définit $I^D_{E,F} : \mathcal{S}(\bar{S}^2_+E^*) \longrightarrow \mathcal{S}(\bar{S}^2_+F^*)$ pour tout $C \in S^2_+F^*$ et $f \in \mathcal{S}(\bar{S}^2_+E^*)$, par :*

$$I^D_{E,F}(f)(C) := I^D\big|_C(f). \tag{4.28}$$

Proposition 23. *Soient E, F et G trois espaces vectoriels tels que $G \subseteq F \subseteq E$. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\bar{S}^2_+E^*) & \xrightarrow{I^D_{E,F}} & \mathcal{S}(\bar{S}^2_+F^*) \\ & \searrow^{I^D_{E,G}} & \downarrow{\scriptstyle I^D_{F,G}} \\ & & \mathcal{S}(\bar{S}^2_+G^*) \end{array}$$

Preuve. Soient $C \in S_+^2 F^*$, $C' \in S_+^2 G^*$ avec $C_{|G} = C'$ et $B \in S_+^2 E$, on a bien :

$$\begin{aligned}
I_{F,G}^D\big(I_{E,F}^D(\phi_B)\big)(C') &= \int_{S_+^2 F^*} \rho^D(C,C') \int_{S_+^2 E^*} \rho^D(A,C)\phi_B(A)dAdC \\
&= \pi^{(n-p)D/2}\frac{\Gamma_p(D/2)}{\Gamma_m(D/2)}\frac{\Gamma_m(D/2)}{\Gamma_n(D/2)}\int_{S_+^2 F^*}\frac{(\det C)^{(D-m-1)/2}}{(\det C')^{(D-p-1)/2}} \\
&\quad \int_{S_+^2 E^*}\frac{(\det A)^{(D-n-1)/2}}{(\det C)^{(D-m-1)/2}}\phi_B(A)\delta(C_G - C')\delta(A_F - C)dAdC \\
&= \pi^{(n-p)D/2}\frac{\Gamma_p(D/2)}{\Gamma_n(D/2)}\int_{S_+^2 F^*}\frac{(\det A)^{(D-n-1)/2}}{(\det C')^{(D-p-1)/2}} \\
&\quad \int_{S_+^2 E^*}\phi_B(A)\delta(C_G - C')\delta(A_F - C)dAdC \\
&= \int_{S_+^2 E^*}\pi^{(n-p)D/2}\frac{\Gamma_p(D/2)}{\Gamma_n(D/2)}\frac{(\det A)^{(D-n-1)/2}}{(\det C')^{(D-p-1)/2}}\phi_B(A)\delta(A_G - C')dA \\
&= \int_{S_+^2 E^*}\rho^D(A,C')\phi_B(A)dA \\
&= I_{E,G}^D\big(\phi_B\big)(C').
\end{aligned}$$

D'où : $I_{E,G}^D = I_{F,G}^D \circ I_{E,F}^D$. □

5.5 Intégrale D-dimensionnelle d'une fonction de type Feynman

Définition 34. *Une fonction $f \in \bar{S}_+^2 E^*$ est dite fonction de type Feynman, si elle est écrite sous la forme :*

$$f(A) = \frac{P(A)}{\prod_{j=1}^{l}\big(tr(AB_j) + m_j^2\big)}, \tag{4.29}$$

où P est un polynôme, $B_j \in \bar{S}_+^2 E^*$ telles que $B(t) := \big(\sum t_j B_j\big) \in S_+^2 E^*$ pour tout $t_j > 0$, et les m_j sont des réels strictement positifs. En particulier pour tout sous-espace $F \subset E$, $B(t)_{F^\perp}$ est non dégénérée. La fonction f est sans pôles dans $\bar{S}_+^2 E^*$.

Proposition 24. *[19] Si f est une fonction de type Feynman, l'intégrale D-dimensionnelle $I_{E,F}^D(f)$ s'etend en une fonction méromorphe de la variable D pour tout sous-espace F de E.*

Preuve. On prouve d'abord la proposition pour $P = 1$, le cas où $P \neq 1$ sera prouvé ultérieurement. On utilise tout d'abord l'égalité suivante :

$$\int_0^\infty \exp(-at)dt = a^{-1} \text{ pour tout } a > 0.$$

Soient $t = (t_1, \cdots, t_l)$ et $B(t) = \sum_{j=1}^{l} t_j B_j$. Comme on a :

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{1}{\prod_{j=1}^{l} \big(\mathrm{tr}(AB_j) + m_j^2\big)} \\ &= \prod_{j=1}^{l} \big(\mathrm{tr}(AB_j) + m_j^2\big)^{-1} \\ &= \prod_{j=1}^{l} \int_{t_j>0} \exp\big(-t_j(\mathrm{tr}(AB_j) + m_j^2)\big) dt_j \\ &= \int_{t_j>0} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} \mathrm{tr}A(t_j B_j)\big) \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) dt_1 \cdots dt_l \\ &= \int_{t_j>0} \exp\big(-\mathrm{tr}A(\sum_{j=1}^{l} t_j B_j)\big) \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) dt, \end{aligned}$$

on obtient pour tout $C \in S_+^2 F^*$:

$$I_{E,F}^D(f)(C) = \int_{t_j>0} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) I_{E,F}^D\Big(\exp\big(-\mathrm{tr}(C\sum_{j=1}^{l} t_j B_j)\big)\Big) dt.$$

En utilisant le lemme 1 nous pouvons écrire :

$$I_{E,F}^D(f)(C) = \pi^{(n-m)D/2} \int_{t_j>0} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2 - \mathrm{tr}(C.B(t)^{F^*})\big).(\det B(t)_{F^\perp})^{-D/2} dt. \quad (4.30)$$

Pour finir la preuve du proposition nous allons utiliser le théorème de Bernstein [5] (voir aussi [13]) et un corollaire.

Théorème 17. *Soit Q un polynome à l variables. Alors il existe un opérateur différentiel $L(D)$ en l variables, à coefficients qui dépendent de D et un polynome q en D tels que :*

$$L(D)Q^{-D/2} = q(D)Q^{-1-D/2}. \quad (4.31)$$

Corollaire 2. *On suppose que Q prend des valeurs positives pour $t_j > 0$. Soit g une fonction à décroissance rapide définie pour $t_j > 0$, et telle que ses dérivées sont encore à décroissance rapide. Alors l'intégrale*

$$I(D, g) := \int_{t_j>0} g(t) Q^{-D/2}(t) dt, \quad (4.32)$$

converge pour $\mathrm{Re}\, D << 0$, et s'étend en une fonction méromorphe à tout le plan complexe.

Preuve. Les formules (4.31) et (4.32) nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} I(D+2,g) &= \int_{t_j>0} g(t)Q^{-D/2-1}(t)dt \\ &= \int_{t_j>0} g(t)q(D)^{-1}L(D)Q^{-D/2}(t)dt \\ &= q(D)^{-1}\int_{t_j>0} g(t)L(D)Q^{-D/2}(t)dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties suivante :

$$g(t) \longrightarrow L(D)^*(g(t)) \quad \text{et} \quad L(D)Q^{-D/2}(t) \longrightarrow Q^{-D/2}(t)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} I(D+2,g) &= q(D)^{-1}\int_{t_j>0} L(D)^*(g(t))Q^{-D/2}(t)dt + C(D) \\ &= q(D)^{-1}I(D, L(D)^*(g(t))) + C(D), \end{aligned}$$

où $C(D)$ est une somme d'intégrales du même type sur le bord. Ce terme est donc méromorphe par l'hypothèse de récurrence, puisque le bord de $(\mathbb{R}_+)^l$ s'écrit comme la réunion de l copies de $(\mathbb{R}_+)^{l-1}$ et de strates de dimension $\leq l-2$. □

En utilisant le théorème de Bernstein et le corollaire précedent, on peut conclure alors que :

$$I^D_{E,F}(f)(C) = \pi^{(n-m)D/2}\int_{t_j>0} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2 - \mathrm{tr}(C.B(t)^{F^*})\big).(\det B(t)_{F^\perp})^{-D/2}dt$$

s'étend en une fonction méromorphe en D, ce qui prouve la proposition pour $P=1$.

Pour $P \neq 1$, nous obtenons les mêmes résultats : comme

$$f(A) = \frac{P(A)}{\prod_{j=1}^{l}\big(\mathrm{tr}(AB_j)+m_j^2\big)},$$

l'intégrale $I^D_{E,F}(f)(C)$ va s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} I^D_{E,F}(f)(C) &= \int_{t_j>0} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) I^D_{E,F}\big(P\exp(-\mathrm{tr}(.B(t))\big)(C)dt \\ &= \int_{t_j>0} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) I^D_{E,F}\big(P\phi_{B(t)}\big)(C)dt \\ &= \int_{t_j>0} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) I^D_{E,F}\big(\bar{P}(\partial_B)\phi_{(B(t))}\big)(C)dt, \end{aligned}$$

où $\bar{P}(\partial_B)$ est un opérateur differentiel à coefficients constants, défini comme suit : pour $A = (a_{ij})$ et $B(t) = (b_{ij}(t))$ on a :

$$\mathrm{tr}(AB(t)) = \sum_{k,i} a_{ik} b_{ki}(t),$$

et alors :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial b_{qp}} \exp\big(-\mathrm{tr}(A.B(t))\big) &= a_{pq} \exp\big(-\sum_{k,i} a_{ik} b_{ki}(t)\big) \\ &= a_{pq} \exp\big(-\mathrm{tr}(A.B(t))\big), \end{aligned}$$

ce qui définit le polynome $\bar{P}$ pour $P(A) = a_{pq}$, et donc pour tout P en itérant le procédé. Par suite :

$$\begin{aligned} I^D_{E,F}\big(\bar{P}(\partial_B)\phi_{(B(t))}\big)(C) &= \bar{P}(\partial_B) I^D_{E,F}\big(\phi_{(B(t))}\big)(C) \\ &= \bar{P}(\partial_B)\pi^{(n-m)D/2} \exp\big(-\mathrm{tr}(C.B(t)^{F^*})\big).(\det B(t)_{F^\perp})^{-D/2} \\ &= \sum_{r=0}^{\deg \bar{P}} g_{r,C}(t)(\det B(t)_{F^\perp})^{-D/2-r}, \end{aligned}$$

où $t \longmapsto g_{r,C}(t)$ est une fonction de Schwartz. on obtient donc :

$$I^D_{E,F}(f)(C) = \int_{t_j>0} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) \sum_{r=0}^{\deg \bar{P}} g_{r,C}(t)(\det B(t)_{F^\perp})^{-D/2-r} dt.$$

D'où sous les mêmes conditions que pour $P = 1$, l'intégrale $I^D_{E,F}(f)$, dans le cas $P \neq 1$, s'étend en une fonction méromorphe de la variable complexe D. □

On désigne par $\mathcal{F}(\bar{S}^2_+ E^*)$ l'espace de fonctions de type Feynman sur $\bar{S}^2_+ E^*$ et par $\widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2_+ E^*)$ l'espace de fonctions sur $\mathbb{C} \times \bar{S}^2_+ E^*$, méromorphes en la première variable, égales à $I^D_{E',E}(g)$ pour une certaine fonction $g \in \mathcal{F}(\bar{S}^2_+ E'^*)$, où E' est un espace vectoriel contenant E. On utilise la représentation :

$$g(A') = \int_{t_j>0} \bar{P}(\partial_B) \exp\big(-\mathrm{tr}(A.B(t))\big) \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) dt,$$

pour tout $A' \in S^2_+ E'^*$, soit encore :

$$g = \int_{t_j>0} \bar{P}(\partial) \phi_{(B(t))} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) dt.$$

On a donc pour tout $A \in S^2_+ E^*$:

$$f(A) = I^D_{E',E}(g)(A) = \int_{t_j>0} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) \underbrace{I^D_{E',E}\big(\bar{P}(\partial_B)\exp(-\mathrm{tr}(..B(t)))\big)(A)}_{\varphi_t(A)} dt.$$

Il est clair que $\varphi_t \in \mathcal{S}(\bar{S}^2_+ E^*)$. On pose alors :

$$I^D_{E,F}(f) := \int_{t_j>0} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) I^D_{E,F}(\varphi_t) dt.$$

Au vu de la Proposition 23 on peut alors écrire pour tout $C \in \bar{S}^2_+ F^*$:

$$\begin{aligned} I^D_{E,F}(f)(C) &= \int_{t_j>0} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) I^D_{E,F} I^D_{E',E}\big(\bar{P}(\partial)\phi_{(B(t))}\big)(C) dt \\ &= \int_{t_j>0} \exp\big(-\sum_{j=1}^{l} t_j m_j^2\big) I^D_{E',F}\big(\bar{P}(\partial)\phi_{(B(t))}\big)(C) dt \\ &= I^D_{E',F}(g)(C) \end{aligned}$$

Corollaire 3. *On a :*

$$I^D_{E,F} : \widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2_+ E^*) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2_+ F^*),$$

et si $G \subset F \subset E$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2_+ E^*) & \xrightarrow{I^D_{E,F}} & \widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2_+ F^*) \\ & \searrow^{I^D_{E,G}} & \downarrow{\scriptstyle I^D_{F,G}} \\ & & \widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2_+ G^*) \end{array}$$

autrement dit on a :

$$I^D_{E,G} = I^D_{F,G} \circ I^D_{E,F}$$

6 Renormalisation de l'intégrale de Feynman

6.1 L'algèbre-cible End $\widetilde{\mathcal{B}}$

Soit $\mathcal{T}$ une théorie quantique des champs et soit Γ un graphe connexe de la théorie $\mathcal{T}$. On rappelle que W_Γ est l'espace des moments du graphe Γ, et $E = \mathcal{E}(\Gamma)$. Dans ce paragraphe, on définit l'algèbre cible $\widetilde{\mathcal{B}}$ d'une manière analogue au paragraphe §4.2. Soit $\mathcal{F}(\bar{S}^2_+ E^*)$ l'espace de fonctions de type Feynman sur $\bar{S}^2_+ E^*$. On pose :

$$\widetilde{V}_\Gamma := \mathcal{F}(\bar{S}^2_+ E^*). \tag{4.33}$$

Pour $\Gamma = \Gamma_1 \cdots \Gamma_r$ où Γ_j est connexe pour $j \in \{1 \cdots r\}$, on pose :

$$\widetilde{V}_\Gamma = \bigotimes_{j \in \{1,\cdots,r\}} \widetilde{V}_{\Gamma_j},$$

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \prod_{\Gamma \in \mathcal{T}} \widetilde{V}_\Gamma. \tag{4.34}$$

Tout $\widetilde{a} \in \operatorname{End} \widetilde{\mathcal{B}}$ s'écrit comme une matrice bloc dont les coefficients sont de la forme suivante :

$$\widetilde{a}_{\Gamma\Gamma'} : \widetilde{V}_\Gamma \longrightarrow \widetilde{V}'_\Gamma.$$

On définit sur $\widetilde{\mathcal{B}}$ un produit noté $\bullet$ par :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{a}_{\Gamma_1\Gamma'_1} \bullet \widetilde{a}_{\Gamma_2\Gamma'_2} : \widetilde{V}_{\Gamma_1\Gamma_2} & \longrightarrow & \widetilde{V}_{\Gamma'_1\Gamma'_2} \\ \bigotimes\limits_{j\in\{1,2\}} \widetilde{v}_i & \longmapsto & \bigotimes\limits_{j\in\{1,2\}} \widetilde{a}_{\Gamma_j\Gamma'_j}(\widetilde{v}_j) \end{array}$$

Cette définition s'étend naturellement en un produit bilinéaire commutatif sur $\operatorname{End} \widetilde{\mathcal{B}}$:

$$(\widetilde{a} \bullet \widetilde{b})_{\Gamma\Gamma'} = \sum_{\substack{\partial\delta=\Gamma \\ \partial'\delta'=\Gamma'}} \widetilde{a}_{\partial\partial'} \bullet \widetilde{a}_{\delta\delta'}$$

Pour quatre applications linéaires :

$$\widetilde{a}_1 : \widetilde{V}_{\Gamma_1} \longrightarrow \widetilde{V}_{\Gamma'_1}; \quad \widetilde{b}_1 : \widetilde{V}_{\Gamma'_1} \longrightarrow \widetilde{V}_{\Gamma''_1},$$

$$\widetilde{a}_2 : \widetilde{V}_{\Gamma_2} \longrightarrow \widetilde{V}_{\Gamma'_2}; \quad \widetilde{b}_2 : \widetilde{V}_{\Gamma'_2} \longrightarrow \widetilde{V}_{\Gamma''_2},$$

on a le résultat suivant qui est l'analogue de la proposition 20 :

Proposition 25.

$$(\widetilde{b}_1 \circ \widetilde{a}_1) \bullet (\widetilde{b}_2 \circ \widetilde{a}_2) = (\widetilde{b}_1 \bullet \widetilde{b}_2) \circ (\widetilde{a}_1 \bullet \widetilde{a}_2).$$

On désigne par $\diamond$ l'opposé du produit de composition dans $\operatorname{End} \widetilde{\mathcal{B}}$. On définit alors un produit de convolution $\divideontimes$ pour tout φ, $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\mathcal{T}, \operatorname{End} \widetilde{\mathcal{B}})$ par :

$$\varphi \divideontimes \psi := \diamond(\varphi \otimes \psi)\Delta, \tag{4.35}$$

autrement dit, pour tous graphes spécifiés $\bar{\gamma}$, $\bar{\Gamma}$ tels que $\bar{\gamma} \subset \bar{\Gamma}$ on a :

$$(\varphi \divideontimes \psi)(\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}) = \sum_{\substack{\bar{\delta} \subset \bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta} \in \mathcal{T}}} \psi(\bar{\Gamma}/\bar{\delta}, \bar{\gamma}/\bar{\delta}) \circ \varphi(\bar{\Gamma}, \bar{\delta}). \tag{4.36}$$

De la même manière que le paragraphe §4.3, on obtient le théorème suivant :

Théorème 18. *Soit G l'ensemble des morphismes d'algèbres unitaires : $\mathcal{D}_\mathcal{T} \longrightarrow (\operatorname{End} \widetilde{\mathcal{B}}, \bullet)$. Muni du produit $\divideontimes$, l'ensemble G est un groupe.*

6.2 Intégrale de Feynman

Soient Γ, γ et δ trois graphes de Feynman tels que $\delta \subseteq \gamma \subseteq \Gamma$, on pose :

$$E := \mathcal{E}(\Gamma), \qquad F := \mathcal{E}(\Gamma/\delta) \quad \text{et} \quad G := \mathcal{E}(\Gamma/\gamma) = \mathcal{E}(\Gamma/\delta\Big/\gamma/\delta).$$

On a bien $G \subseteq F \subseteq E$. On définit l'intégrale de Feynman $\widetilde{I}^D_{\Gamma,\gamma}$ par :

$$\widetilde{I}^D_{\Gamma,\delta} := I^D_{E,F} : \mathcal{S}(\bar{S}^2_+ E^*) \longrightarrow \mathcal{S}(\bar{S}^2_+ F^*),$$

cette expression est holomorphe en D, c'est-à-dire elle définit un opérateur :

$$\widetilde{I}_{\Gamma,\delta} = (I^D)_{D\in\mathbb{C}} : \mathcal{S}(\bar{S}^2_+ E^*) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathcal{S}(\bar{S}^2_+ F^*)). \tag{4.37}$$

Théorème 19. *Soit Γ, γ et δ trois graphes de Feynman tels que $\delta \subseteq \gamma \subseteq \Gamma$. On a bien :*

$$\widetilde{I}^D_{\Gamma,\gamma} = \widetilde{I}^D_{\Gamma/\delta,\gamma/\delta} \circ \widetilde{I}^D_{\Gamma,\delta}. \tag{4.38}$$

Preuve. C'est un corollaire direct de la proposition 23. □

Soit $\mathcal{F}(\bar{S}^2_+ E^*)$ l'espace de fonctions de type Feynman sur $\bar{S}^2_+ E^*$ et par $\widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2_+ E^*)$ l'espace de fonctions sur $\mathbb{C} \times \bar{S}^2_+ E^*$, méromorphes en la première variable, égales à $I^D_{E',E}(g)$ pour une certaine fonction $g \in \mathcal{F}(\bar{S}^2_+ E'^*)$, où E' est un espace vectoriel contenant E. L'intégrale de Feynman $\widetilde{I}^D_{\Gamma,\gamma}$ est définie comme suit :

$$\widetilde{I}^D_{\Gamma,\delta} := I^D_{E,F} : \widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2 E^*) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}(\bar{S}^2_+ F^*)$$

et s'étend en une fonction méromorphe en D.

Théorème 20. *Soit Γ, γ et δ trois graphes de Feynman tels que $\delta \subseteq \gamma \subseteq \Gamma$. On a bien :*

$$\widetilde{I}^D_{\Gamma,\gamma} = \widetilde{I}^D_{\Gamma/\delta,\gamma/\delta} \circ \widetilde{I}^D_{\Gamma,\delta}. \tag{4.39}$$

Preuve. C'est une conséquence directe de corollaire 3. □

Les règles de Feynman proprement dites sont définies pour $U = \mathcal{E}(\operatorname{res}\Gamma)$ par :

$$\widetilde{I}_{\Gamma,\Gamma}\big(\varphi(\Gamma)\big) \in \mathcal{F}(\bar{S}^2_+ U^*),$$

où $\varphi(\Gamma)$ est l'intégrande défini par la formule (4.3), qui peut s'écrire encore comme étant une fonction de Feynman sur $\bar{S}^2_+ U^*$, sous la forme :

$$\varphi(\Gamma)(p) = \prod_{v\in\mathcal{V}(\Gamma)} g_v \prod_{\{e,\sigma(e)\},\sigma(e)\neq e} G_{e\sigma(e)}(p^*\beta(e,e)) \prod_{\sigma(e)=e} G_e(p^*\beta(e,e)). \tag{4.40}$$

6.3 Décomposition de Birkhoff

Soit φ un élément du groupe $G(k[z^{-1},z]])$ c'est-à-dire un caractère de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ à valeurs dans l'algèbre commutative unitaire $\mathcal{A} := \operatorname{End}\widetilde{\mathcal{B}}([z^{-1},z]])$, où l'on a étendu le produit commutatif $\bullet$ à $\mathcal{A}$ par $k[z^{-1},z]]$-linéarité. On munit $\mathcal{A}$ du schéma minimal de renormalisation :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+, \tag{4.41}$$

$$\text{où : } \mathcal{A}_+ := \widetilde{\mathcal{B}}[[z]] \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_- := z^{-1}\widetilde{\mathcal{B}}[z^{-1}].$$

On note P la projection sur $\mathcal{A}_-$ parallèlement à $\mathcal{A}_+$.

Théorème 21. *1. Chaque caractère φ admet une unique décomposition de Birkhoff dans G :*

$$\varphi = \varphi_-^{\circledast -1} \circledast \varphi_+ \tag{4.42}$$

compatible avec le schéma de renormalisation choisi.

2. *Les composantes φ_+ et φ_- sont données par des formules récursives suivantes. Pour tout $(\bar{\Gamma},\bar{\gamma})$ de degré zéro, $\varphi_-(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) = \varphi_+(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) = \varphi(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) = Id_{\mathcal{B}}$, et pour tout $(\bar{\Gamma},\bar{\gamma})$ homogène de degré n on pose :*

$$\varphi_-(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) = -P\Big(\varphi(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) + \sum_{\substack{\bar{\delta}\subsetneq\bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta}\in\mathcal{T}}} \varphi(\bar{\Gamma}/\bar{\delta},\bar{\gamma}/\bar{\delta})\circ\varphi_-(\bar{\Gamma},\bar{\delta})\Big) \tag{4.43}$$

$$\varphi_+(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) = (I-P)\Big(\varphi(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) + \sum_{\substack{\bar{\delta}\subsetneq\bar{\gamma} \\ \bar{\gamma}/\bar{\delta}\in\mathcal{T}}} \varphi(\bar{\Gamma}/\bar{\delta},\bar{\gamma}/\bar{\delta})\circ\varphi_-(\bar{\Gamma},\bar{\delta})\Big) \tag{4.44}$$

3. *Les composantes φ_+ et φ_- sont deux caractères, on appellera φ_+ le caractère renormalisé et φ_- le caractère des contretermes.*

Preuve. 1. L'existence de la décomposition de Birkhoff de φ est donnée par les formules (4.43) et (4.44), qui vérifient bien $\varphi = \varphi_-^{\circledast -1} \circledast \varphi_+$. Montrons maintenant l'unicité, on suppose que φ admet deux décompositions c-à-d :

$$\varphi = \varphi_-^{-1} \circledast \varphi_+ = \psi_-^{-1} \circledast \psi_+.$$

Donc on obtient l'égalité suivante : $\varphi_+ \circledast \psi_+^{-1} = \varphi_- \circledast \psi_-^{-1}$.
Comme pour tout $(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ on a :$\varphi_+ * \psi_+^{-1}(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) \in \mathcal{A}_+$ et $\varphi_- \circledast \psi_-^{-1}(\bar{\Gamma},\bar{\gamma}) \in \mathcal{A}_-$. Alors :

$$\varphi_+ \circledast \psi_+^{-1} = \varphi_- \circledast \psi_-^{-1} = E,$$

et par suite : $\varphi_+ = \psi_+ \quad \text{et} \quad \varphi_- = \psi_-$.

D'où l'unicité de la décomposition de Birkhoff.

2. On se limite à montrer que φ_- est un caractère. L'idée découle du fait que la projection P vérifie l'egalité de Rota-Baxter (3.18). La preuve se fait par récurrence sur le degré du graphe $(\bar\Gamma\bar\Gamma', \bar\gamma\bar\gamma')$. Pour $(\bar\Gamma\bar\Gamma', \bar\gamma\bar\gamma')$ de degré zéro on a bien $\mathbf{1}_{V_\Gamma} \bullet \mathbf{1}_{V_{\Gamma'}} = \mathbf{1}_{V_{\Gamma\Gamma'}}$.
Supposons que $\varphi_-(\bar\Gamma\bar\Gamma', \bar\gamma\bar\gamma') = \varphi_-(\bar\Gamma, \bar\gamma) \bullet \varphi_-(\bar\Gamma', \bar\gamma')$ pour tous $(\bar\Gamma, \bar\gamma)$, $(\bar\Gamma', \bar\gamma') \in \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}}$ tels que : $|(\bar\Gamma, \bar\gamma)| + |(\bar\Gamma', \bar\gamma')| \leq d-1$ et montrons l'égalité pour $(\bar\Gamma, \bar\gamma)$,$(\bar\Gamma', \bar\gamma') \in \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}}$ tels que : $|(\bar\Gamma, \bar\gamma)| + |((\bar\Gamma', \bar\gamma')| = d$. Soit $\varphi_-(\bar\Gamma, \bar\gamma) = -P(\bar\varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma))$, où :

$$\bar\varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma) = \varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma) + \sum_{\substack{\bar\delta \subsetneq \bar\gamma \\ \bar\gamma/\bar\delta \in \mathcal{T}}} \varphi(\bar\Gamma/\bar\delta, \bar\gamma/\bar\delta) \circ \varphi_-(\bar\Gamma, \bar\delta).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\varphi_-(\bar\Gamma\bar\Gamma', \bar\gamma\bar\gamma') &= -P\Big(\varphi(\bar\Gamma\bar\Gamma', \bar\gamma\bar\gamma') + \sum_{\substack{\bar\delta\bar\delta' \subsetneq \bar\gamma\bar\gamma' \\ \bar\gamma\bar\gamma'/\bar\delta\bar\delta' \in \mathcal{T}}} \varphi(\bar\Gamma\bar\Gamma'/\bar\delta\bar\delta', \bar\gamma\bar\gamma'/\bar\delta\bar\delta') \circ \varphi_-(\bar\Gamma\bar\Gamma', \bar\delta\bar\delta')\Big) \\
&= -P\Big[\varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma) \bullet \varphi(\bar\Gamma', \bar\gamma') + \varphi_-(\bar\Gamma, \bar\gamma) \bullet \varphi(\bar\Gamma', \bar\gamma') + \varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma) \bullet \varphi_-(\bar\Gamma', \bar\gamma') \\
&+ \sum_{\substack{\bar\delta \subsetneq \bar\gamma \\ \bar\gamma/\bar\delta \in \mathcal{T}}} \big(\varphi(\bar\Gamma/\bar\delta, \bar\gamma/\bar\delta) \circ \varphi_-(\bar\Gamma, \bar\delta)\big) \bullet \big(\varphi_-(\bar\Gamma', \bar\gamma') + \varphi(\bar\Gamma', \bar\gamma')\big) \\
&+ \sum_{\substack{\bar\delta' \subsetneq \bar\gamma' \\ \bar\gamma'/\bar\delta' \in \mathcal{T}}} \big(\varphi(\bar\Gamma'/\bar\delta', \bar\gamma'/\bar\delta') \circ \varphi_-(\bar\Gamma', \bar\delta')\big) \bullet \big(\varphi_-(\bar\Gamma, \bar\gamma) + \varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma)\big) \\
&+ \sum_{\substack{\bar\delta \subsetneq \bar\gamma\,,\, \bar\delta' \subsetneq \bar\gamma' \\ \bar\gamma/\bar\delta\,;\, \bar\gamma'/\bar\delta' \in \mathcal{T}}} \Big(\varphi(\bar\Gamma/\bar\delta, \bar\gamma/\bar\delta) \circ \varphi_-(\bar\Gamma, \bar\delta)\Big) \bullet \Big(\varphi(\bar\Gamma'/\bar\delta', \bar\gamma'/\bar\delta') \circ \varphi_-(\bar\Gamma', \bar\delta')\Big)\Big] \\
&= -P\Big[\Big(\varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma) + \sum_{\substack{\bar\delta \subsetneq \bar\gamma \\ \bar\gamma/\bar\delta \in \mathcal{T}}} \varphi(\bar\Gamma/\bar\delta, \bar\gamma/\bar\delta) \circ \varphi_-(\bar\Gamma, \bar\delta)\Big) \\
&\quad \bullet\Big(\varphi(\bar\Gamma', \bar\gamma') + \sum_{\substack{\bar\delta' \subsetneq \bar\gamma' \\ \bar\gamma'/\bar\delta' \in \mathcal{T}}} \varphi(\bar\Gamma'/\bar\delta', \bar\gamma'/\bar\delta') \circ \varphi_-(\bar\Gamma', \bar\delta')\Big) \\
&+ \varphi_-(\bar\Gamma', \bar\gamma') \bullet \Big(\varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma) + \sum_{\substack{\bar\delta \subsetneq \bar\gamma \\ \bar\gamma/\bar\delta \in \mathcal{T}}} \varphi(\bar\Gamma/\bar\delta, \bar\gamma/\bar\delta) \circ \varphi_-(\bar\Gamma, \bar\delta)\Big) \\
&+ \varphi_-(\bar\Gamma, \bar\gamma) \bullet \Big(\varphi(\bar\Gamma', \bar\gamma') + \sum_{\substack{\bar\delta' \subsetneq \bar\gamma' \\ \bar\gamma'/\bar\delta' \in \mathcal{T}}} \varphi(\Gamma'/\delta', \gamma'/\delta') \circ \varphi_-(\bar\Gamma', \bar\delta')\Big)\Big] \\
&= -P\Big[\bar\varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma) \bullet \bar\varphi(\bar\Gamma', \bar\gamma') - P(\bar\varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma)) \bullet \bar\varphi(\bar\Gamma', \bar\gamma') - P(\bar\varphi(\bar\Gamma', \bar\gamma')) \bullet \bar\varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma)\Big] \\
&= P\Big[P(\bar\varphi(\bar\Gamma', \bar\gamma')) \bullet \bar\varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma) + P(\bar\varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma)) \bullet \bar\varphi(\bar\Gamma', \bar\gamma') - \bar\varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma) \bullet \bar\varphi(\bar\Gamma', \bar\gamma')\Big] \\
&= P\big(\bar\varphi(\bar\Gamma, \bar\gamma)\big) \bullet P\big(\bar\varphi(\bar\Gamma', \bar\gamma')\big) \\
&= \varphi_-(\bar\Gamma, \bar\gamma) \bullet \varphi_-(\bar\Gamma', \bar\gamma').
\end{aligned}$$

A partir des formules (4.43) et (4.44) nous avons donc donné le cadre algébrique expliquant l'approche de Smirnov [36, §8.2]. Pour finir, nous énonçons cette définition qui nous permet de donner un sens au intégrales de Feynman. □

Définition 35. *Les règles de Feynman définissent un élément $\widetilde{I}$ de G :*

$$\widetilde{I} : \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathcal{A} \quad (\Gamma, \gamma) \longmapsto \widetilde{I}(\Gamma, \gamma) := \widetilde{I}^{D}_{\Gamma,\gamma},$$

$$\textit{tel que :} \qquad \widetilde{I} = \widetilde{I}_{-}^{\circledast -1} \circledast \widetilde{I}_{+},$$

où $\widetilde{I}_{-}$ est le caractère des contretermes et $\widetilde{I}_{+}$ est le caractère renormalisé évalué en $D = d$.

Bibliographie

[1] E. Abe, *Hopf algebra*, Combridge University. Press (1980).

[2] S. Agarwala, *The geometry of renormalisation*, PhD thesis, Johns Hopkins University (2009).

[3] M. Belhaj Mohamed, *Groupes de renormalisation pour deux algèbres de Hopf en produit semi-direct*, Ann de Toulouse. Vol n2, pp. 421-444, (2013).

[4] M. Belhaj Mohamed, D. Manchon, *Bialgebra of specified graphs and external structures*, Ann. Inst. Henri Poincaré, D, Volume 1, Issue 3, pp. 307-335 (2014).

[5] J. Bernstein, *Modules over a ring of differential operators. Study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients*, Functional Analysis and Its Applications 5 (2) : 89-101 (1971).

[6] N. N. Bogoliubov and O. S. Parasiuk, *On the multiplication of causal functions in the quantum theory of fields*. Acta Math., 97, 227-266, (1957).

[7] D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *Two interacting Hopf algebras of trees : a Hopf-algebraic approach to composition and substitution of B-series*, Advances in Applied Mathematics, 47, No2, 282-308 (2011).

[8] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge monographs in math. physics, Cambridge (1984).

[9] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry*, Comm. in Math. Phys. 199,203-242 (1998).

[10] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, Comm. Math. Phys. 210, $n^\circ 1$, 249-273 (2000).

[11] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II. The β-function, diffeomorphisms and the renormalization group*, Comm. in Math. Phys. 216, 215-241 (2001).

[12] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative geometry, quantum fields and motives*, Colloquium Publications, vol. 55. American Mathematical Society, Providence, RI, (2008).

[13] S. C. Coutinho, *A primer of algebraic D-modules*, London Mathematical Society Student Texts 33, Cambridge University Press (1995).

[14] K. Ebrahimi-Fard, L. Guo, D. Manchon, *Birkhoff type decompositions and the Baker-Campbell-Hausdorff recursion*, Comm. Math. Phys. 267, 821-845 (2006).

[15] K. Ebrahimi-Fard, J. Gracia-Bondia, F. Patras, *A Lie theoretic approach to renormalization*, Comm. Math. Phys. 276, 519-549 (2007).

[16] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *The combinatorics of Bogoliubov's recursion in renormalization*, IRMA Lect. Notes in Math. And Theor. Phys. 15, CIRM 2006 workshop "Renormalization and Galois Theory", Org. F. Fauvet, J.-P. Ramis. arxiv : 0710.3675.

[17] K. Ebrahimi-Fard, F. Patras, *Exponential renormalization*, Ann. Henri Poincaré 11, 943-971 (2010).

[18] K. Ebrahimi-Fard, F. Patras, *Exponential renormalization II. Bogoliubov's R-operation and momentum subtraction schemes*, J. Math. Phys. 53, 083505 (2012).

[19] P. Etingof, A note on dimensional regularization. *In Quantum Fields and Strings : A Course for Mathematicians*, American Mathematical Society, (2000).

[20] L. Foissy, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés I + II*, thèse, Univ. de Reims (2002), et Bull. Sci. Math. **126**, no. 3, 193–239 et no 4, 249–288 (2002).

[21] L. Foissy, *Algèbres de Hopf combinatoires*, mémoire d'habilitation, http ://loic.foissy.fr, publications.html.

[22] G. Green, *Researches on the Vibrations of Pendulums in Fluid Media*, Royal Society of Edinburgh Transactions, 315-324 (1836).

[23] K. Hepp, *Proof of the bogoliubov-Parasiuk theorem on renormalization*, Comm. Math. Phys. 2, 301-326 (1966).

[24] N. Jacobson, *Basic algebra II* (second edition), Freeman, New-York, 1989.

[25] C. Kassel, *Quantum groups*, Springer Verlag (1995).

[26] D. Kreimer, *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories*, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998).

[27] D. Manchon, *Hopf algebras, from basics to applications to renormalization*, Rencontres Mathématiques de Glanon 2001 (published 2003). arxiv :math.QA/0408405.

[28] D. Manchon, *Hopf algebras and renormalisation*, for Handbook of Algebra,Vol. 5 (M. Hazewinkel ed. 365-427,(2008).

[29] D. Manchon, *On bialgebra and Hopf algebra of oriented graphs*, Confluentes Math. Volume 04, No. 1 (2012).

[30] D. Manchon, S. Paycha, *Shuffle Relations for Regularised Integrals of Symbols*, Commun. Math. Phys. 270, 13-51 (2007).

[31] D. Manchon, S. Paycha, *Nested Sums of Symbols and Renormalized Multiple Zeta Values*, International Mathematics Research Notices. No. 24, pp. 4628-4697 (2010).

[32] F. Menous, *From dynamical systems to renormalization*, Journal of Mathematical Physics . Vol 02, (2013).

[33] R. Meyer, *Dimensional Regularization*, Lecture at the workshop Theory of Renormalization and Regularization, Hesselberg 2002.

[34] E. Panzer, *Hopf algebraic Renormalization of Kreimer's toy model.* Arxiv : math.QA : 1202.3552, v1 (2012).

[35] F. Patras, Chr. Reutenauer, *On Dynkin and Klyachko idempotents in graded bialgebras*, Adv. Appl. Math.28, 560-579 (2002).

[36] V. A. Smirnov, *Renormalization and asymptotic expansions*, Birkhauser, Basel (1991).

[37] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New-York (1969).

[38] W.D. van Suijlekom, *The structure of renormalization Hopf algebras for gauge theories I : Representing Feynman graphs on BV-algebras*, arXiv :0807.0999, Commun. Math. Phys. in press.

[39] W.D. van Suijlekom, *The Hopf algebra of Feynman graphs in QED*, letters in Math. Phys. 77, 265-281 (2006).

[40] M. Veltman, *Diagrammatica - The path to Feynman diagrams*, Cambridge University Press, (1994).

[41] W. Zimmermann, *Convergence of Bogoliubov's method of renormalization in momentum space*, Comm. in Math. Phys. 15, 208-234, (1969).

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la renormalisation de Connes et Kreimer dans le contexe des algèbres de Hopf de graphes de Feynman spécifiés. Nous construisons une structure d'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ sur l'espace des graphes de Feynman spécifiés d'une théorie quantique des champs $\mathcal{T}$. Nous définissons encore un dédoublement $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{T}}$ de la bigèbre de graphes de Feynman spécifiés, un produit de convolution $\divideontimes$ et un groupe de caractères de cette algèbre de Hopf à valeurs dans une algèbre commutative qui prend en compte la dépendance en les moments extérieurs. Nous mettons en place alors la renormalisation décrite par A. Connes et D. Kreimer et la décomposition de Birkhoff pour deux schémas de renormalisation : le schéma minimal de renormalisation et le schéma de développement de Taylor.
Nous rappelons la définition des intégrales de Feynman associées à un graphe. Nous montrons que ces intégrales sont holomorphes en une variable complexe D dans le cas des fonctions de Schwartz, et qu'elles s'étendent en une fonction méromorphe dans le cas des fonctions de types Feynman. Nous pouvons alors déterminer les parties finies de ces intégrales en utilisant l'algorithme BPHZ après avoir appliquer la procédure de regularisation dimensionnelle.
Mots clé : Bigèbre, doudoublement de bigèbre, algèbre de Hopf , graphes de Feynman, produit de Convolution, décomposition de Birkhoff, renormalisation, groupe de renormalisation, règles de Feynman, regularisation dimensionnelle.

Abstract

In this thesis, we study the renormalization of Connes-Kreimer in the contex of specified Feynman graphs Hopf algebra. We construct a Hopf algebra structure $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ on the space of specified Feynman graphs of a quantum field theory $\mathcal{T}$. We define also a doubling procedure for the bialgebra of specified Feynman graphs, a convolution product and a group of characters of this Hopf algebra with values in some suitable commutative algebra taking momenta into account. We then implement the renormalization described by A. Connes and D. Kreimer and the Birkhoff decomposition for two renormalization schemes : the minimal subtraction scheme and the Taylor expansion scheme.
We recall the definition of Feynman integrals associated with a graph. We prove that these integrals are holomorphic in a complex variable D in the case oh Schwartz functions, and that they extend in a meromorphic functions in the case of a Feynman type functions. Finally, we determine the finite parts of Feynman integrals using the BPHZ algorithm after dimensional regularization procedure.
Keywords : Bialgebra, doubling bialgebra, Hopf algebra, Feynman Graphs, convolution product, Birkhoff decomposition, renormalization, renormalization group, Feynman rules, dimensional regularization.