Numéro d'ordre : **370**

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL
(UFR Sciences et Technologies)

Laboratoire de Mathématiques – UMR 6620

Habilitation à Diriger des Recherches

présentée par

Sergueï Dachian

Tome I – Synthèse des Travaux

Sujet de l'Habilitation :

Quelques Contributions à la Statistique des Processus,
à la Théorie des Champs Aléatoires
et à la Statistique des Champs Aléatoires

Soutenue le 12 décembre 2012 devant le jury composé de :

Président	Prof. M. Hoffmann, Université Paris-Dauphine (Paris, France)
Rapporteurs	Prof. R. Fernández, Université d'Utrecht (Utrecht, Pays-Bas) Prof. R. Höpfner, Université Johannes Gutenberg (Mayence, Allemagne) Prof. E. Moulines, Télécom ParisTech (Paris, France)
Examinateurs	Prof. D. Dereudre, Université Lille 1 (Lille, France) Prof. P. Druilhet, Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, France) Prof. A. Guillin, Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, France) Prof. Yu.A. Kutoyants, Université du Maine (Le Mans, France)

À la mémoire de mon père,
Yury Dashyan[36-39], qui m'a
transmis le goût et l'envie
de « faire des maths ».

Remerciements

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à Boris Nahapetian et à Yury Kutoyants qui ont accompagné mes premiers pas en recherche dans les domaines respectifs des probabilités et des statistiques. En plus d'avoir été d'excellents directeurs de recherche, ils étaient (et restent toujours) pour moi des mentors, des amis, des collègues et des coauteurs (pas nécessairement dans cet ordre).

J'exprime toute ma reconnaissance à Roberto Fernández, Reinhard Höpfner et Eric Moulines pour l'intérêt qu'ils ont montré à l'égard de ce travail en acceptant de consacrer une partie de leur temps précieux à la lecture de ce mémoire et à la rédaction des rapports. C'est pour moi un grand honneur et je les en remercie sincèrement.

Je remercie Arnaud Guillin d'avoir accepté d'être mon responsable tutélaire et de présenter mes travaux de recherche aux différentes instances de l'Université Blaise Pascal. Je remercie également David Dereudre, Pierre Druilhet et Marc Hoffmann d'avoir accueilli positivement ma proposition de participer au jury.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à tous les membres (enseignants-chercheurs ou pas) du "Laboratoire de Mathématiques" de l'Université Blaise Pascal pour le cadre de travail agréable et la bonne ambiance qu'ils ont su créer au sein du laboratoire. Plus particulièrement, je tiens à remercier Thierry Dubois, Erwan Saint Loubert Bié et Catherine Aaron pour leur aide précieuse dans la rédaction de ce mémoire, pour les discussions que nous avons partagées et, surtout, pour leur amitié.

Je tiens également à remercier mon ami et collègue, Arnak Dalalyan, pour les échanges scientifiques (et pas seulement) que nous avons eus, ainsi que la famille Karanfilian, sans qui ma carrière en France n'aurait pas été possible.

Je remercie enfin ma famille : mes parents qui m'ont transmis le goût des mathématiques et l'envie d'en faire mon métier, ma femme Anna qui me donne beaucoup d'amour et m'apporte un soutien précieux, ainsi que ma fille Sophie qui, du (pas très) haut de ces quelques petits mois, a su rester suffisamment sage pour permettre à son papa d'achever ce travail.

Table des matières

Introduction **1**

Statistique des processus 2

Estimation des positions des singularités *2*

Rapports de vraisemblance limites des modèles de rupture *3*

Tests d'hypothèses pour des processus à temps continu *5*

Théorie des champs aléatoires 5

Description des champs aléatoires *6*

Gibbsianité des champs aléatoires *7*

Statistique des champs aléatoires 7

Estimation non-paramétrique pour des champs de Gibbs *8*

Cartographie du risque à l'aide de champs de Markov discrets *8*

Plan de la présentation 9

1 Estimation des positions des singularités **11**

1.1 Singularité dans la fonction d'intensité d'un processus de Poisson 11

1.1.1 Trois types de singularités *12*

1.1.2 Singularité de type "cusp" *13*

1.1.3 Singularité de type "0" ou de type "∞" *17*

1.2 "Cusp" dans la dérive d'une diffusion ergodique 19

2 Rapports de vraisemblance limites des modèles de rupture **23**

2.1 Quelques rapports de vraisemblance limites apparaissant dans des modèles de rupture 23

2.1.1 Processus Z_ρ *24*

2.1.2 Processus $Z_{\gamma,f}$ *24*

2.1.3 Processus Z_0 . . . . . *26*

2.2 Comportement de Z_ρ lorsque ρ est au voisinage de 0 ou de $+\infty$ 27

2.2.1 Lien entre les rapports de vraisemblance limites Z_ρ et Z_0 . . . . . *27*
2.2.2 Comportement de Z_ρ pour de grandes valeurs de ρ *28*
2.2.3 Simulations numériques *29*
2.3 Comportement de $Z_{\gamma,f}$ lorsque γ est au voisinage de 0 ou de $+\infty$ 30
2.3.1 Lien entre les rapports de vraisemblance limites $Z_{\gamma,f}$ et Z_0 . . . . . *30*
2.3.2 Comportement de $Z_{\gamma,f}$ pour de grandes valeurs de γ *32*
2.3.3 Simulations numériques *33*

3 Gibbsianité des champs aléatoires **35**
3.1 Champs aléatoires 35
3.1.1 Distributions fini-conditionnelles et conditionnelles *36*
3.1.2 Description des champs aléatoires par leurs distributions conditionnelles *37*
3.1.3 Spécifications gibbsiennes et champs aléatoires de Gibbs *38*
3.1.4 Problème de caractérisation des champs de Gibbs *39*
3.2 Cadre uniponctuel 40
3.2.1 Description des champs aléatoires par leurs distributions conditionnelles uniponctuelles *40*
3.2.2 Description des champs aléatoires par leurs distributions fini-conditionnelles uniponctuelles *42*
3.3 Critères de gibbsianité des champs aléatoires 43
3.3.1 Critères en termes de distributions conditionnelles *43*
3.3.2 Critères en termes de distributions conditionnelles uniponctuelles . *44*
3.3.3 Critères en termes de distributions fini-conditionnelles uniponctuelles *44*
3.4 Quelques développements et perspectives 45

Liste des travaux **51**

Bibliographie **53**

Introduction

Ce mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches est organisé en deux tomes. Le Tome I a pour but de présenter les travaux de recherche effectués durant ma carrière d'enseignant-chercheur et dont la liste complète figure aux pages 51–52. Cette liste comprend notamment quatorze articles [1–14] (dont deux issus de ma Thèse de Doctorat [15] et un datant d'avant celle-ci) publiés dans des revues internationales avec comité de lecture. Les textes intégraux de ces articles sont réunis dans le Tome II. Notons que certains résultats ont également été présentés lors de congrès ayant donné lieu à des actes publiés, et qu'actuellement je travaille à la rédaction de deux livres, ainsi qu'à la préparation de deux articles.

La plupart des travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire de Mathématiques de l'Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand 2). Certains d'entre eux ont été menés en collaboration avec des collègues français et étrangers, à savoir :

- Yury Kutoyants de l'Université du Maine (Le Mans, France),
- Boris Nahapetian de l'Institut de Mathématiques, Académie des Sciences de la République d'Arménie (Érévan, Arménie),
- Ilia Negri de l'Université des Études de Bergame (Bergame, Italie),
- Nino Kordzakhia de l'Université de Macquarie (Sydney, Australie),
- Myriam Charras-Garrido, David Abrial et Jocelyn De Goër du Centre INRA de Clermont-Ferrand-Theix (Clermont-Ferrand, France),
- Nathalie Peyrard du Centre INRA de Toulouse (Toulouse, France).

Mes activités de recherche se situent dans les domaines des statistiques et des probabilités, ainsi qu'à l'interface de ces deux disciplines. Plus précisément, mes travaux portent sur la statistique des processus, la théorie des champs aléatoires et la statistique des champs aléatoires. Notons que la première thématique est totalement différente de celles abordées dans ma Thèse de Doctorat [15], tandis que la deuxième s'inscrit dans la continuité de celle-ci. La troisième thématique comprend un sujet étudié dans ma Thèse de Doctorat [15], ainsi qu'un sujet entièrement nouveau issu d'une collaboration avec des chercheurs de l'INRA.

Dans cette introduction, nous présentons de manière succincte (et, de fait, plutôt informelle) l'ensemble des résultats obtenus dans chacun de ces domaines de recherche.

Statistique des processus

J'ai commencé à travailler en statistique des processus après ma Thèse de Doctorat. Il s'agit ici de tirer des conclusions statistiques à partir d'observations qui sont des trajectoires de processus à temps continu. Une partie importante de mes travaux porte sur les situations non-régulières, c'est-à-dire lorsque les fonctions qui gouvernent les processus observés dépendent de manière non-lisse (ne sont pas continues ou ne sont pas dérivables) des paramètres du modèle. Ce type de situation n'est pas seulement intéressant du point de vue mathématique, mais est également important dans les applications.

Je me suis tout d'abord intéressé à l'estimation des positions des singularités (dégénérescences, explosions, explosions de la dérivée) dans les fonctions qui gouvernent les processus observés.

Un autre sujet de recherche est l'étude de liens existant entre divers rapports de vraisemblance limites apparaissant dans des modèles de rupture (où les fonctions qui gouvernent les processus observés dépendent de manière discontinue des paramètres).

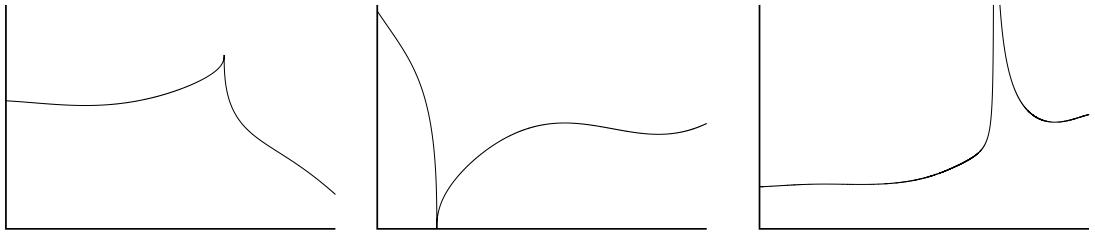
Finalement, une troisième direction de recherche concerne des tests d'hypothèses pour les processus à temps continu, et notamment pour les processus de Poisson.

Notons que les résultats obtenus ont été présentés lors de nombreuses conférences internationales et que, depuis sa création en janvier 1997, j'ai participé à l'organisation de toutes les éditions du colloque international bi-annuel "Statistique Asymptotique des Processus Stochastiques" (Le Mans, France) dédié à la statistique des processus.

Estimation des positions des singularités

Dans les articles [4] et [12], le problème de l'estimation de la position d'une singularité à partir d'observations poissonniennes a été considéré. Une partie des résultats a également fait l'objet d'un acte de congrès [16].

Plus précisément, soit X un processus de Poisson non-homogène sur l'intervalle $[0,T]$. La fonction d'intensité de X est supposée lisse partout sur $[0,T]$ sauf au point θ, où elle est supposée avoir une singularité d'ordre p. On suppose que l'on connaît la forme de la fonction d'intensité, mais pas la position (donnée par le paramètre θ) de la singularité. Trois types de singularités sont envisagés (voir la Figure 1). Les "cusps" sont étudiés dans [4], tandis que les singularités de type "0" et de type "∞" le sont dans [12].



a) "cusp" b) singularité de type "0" c) singularité de type "∞"

FIGURE 1 – Trois types de singularités.

Dans tous les cas, le problème considéré est celui de l'estimation du paramètre θ sur la base de n observations indépendantes du processus X. Les estimateurs proposés sont les estimateurs bayésiens (EB) et l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV). Leurs propriétés asymptotiques sont étudiées lorsque $n \to +\infty$.

Dans [4], il a été établi que dans le cas d'un "cusp" d'ordre p, $p \in]0\,,1/2[$, les EB et l'EMV sont consistants et leur vitesse de convergence est $n^{1/(2p+1)}$. De plus, leurs lois limites (qui s'avèrent être différentes) ont été déterminées. Il a également été montré que les EB sont asymptotiquement efficaces (possèdent l'erreur moyenne quadratique limite la plus petite possible dans le sens minimax local).

Dans [12], des résultats similaires ont été obtenus pour le cas d'une singularité de type "0" d'ordre p, $p \in]0{,}1[$, ou de type "∞" d'ordre p, $p \in]-1{,}0[$. Plus précisément, il a été établi que les EB et, dans le cas d'une singularité de type "0", l'EMV sont consistants et leur vitesse de convergence est $n^{1/(p+1)}$. De plus, leurs lois limites (qui s'avèrent être différentes entre elles, ainsi que de celles du cas d'un "cusp") ont été déterminées. Une fois de plus, les EB s'avèrent être asymptotiquement efficaces.

Finalement, dans [5], en collaboration avec Yury Kutoyants (Université du Maine) nous avons établi des résultats similaires à ceux de [4] dans le cas où l'on observe un processus de diffusion ergodique ayant un "cusp" dans la dérive. Plus précisément, le problème considéré est celui de l'estimation du paramètre θ lorsque l'on observe sur l'intervalle $[0{,}T]$ une trajectoire du processus X solution de

$$\mathrm{d}X_t = S_\theta(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}W_t, \quad X_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

où la fonction S_θ est lisse partout sauf au point θ, où elle a un "cusp" d'ordre p, $p \in]0\,,1/2[$. Les estimateurs proposés sont de nouveau les EB et l'EMV. Leurs propriétés asymptotiques sont étudiées lorsque $T \to +\infty$.

Nous avons montré que les EB et l'EMV sont une fois de plus consistants et leur vitesse de convergence est $T^{1/(2p+1)}$. De plus, nous avons déterminé leurs lois limites qui s'avèrent être les mêmes que celles de [4]. L'efficacité asymptotique des EB a également été établie.

Notons que les résultats décrits dans ce paragraphe sont similaires aux résultats déjà connus pour les observations i.i.d. ayant une singularité dans leur densité. Cependant, lorsque les observations sont des processus à temps continu, les démonstrations nécessitent des outils plus sophistiqués et aucun résultat de ce type n'avait jusqu'alors été obtenu.

Rapports de vraisemblance limites des modèles de rupture

Alors que dans le cas des modèles réguliers le rapport de vraisemblance limite est universel (donné par la propriété LAN), les modèles de rupture rencontrés en statistique paramétrique font apparaître plusieurs rapports de vraisemblance limites différents. Un lien entre deux de ces rapports limites a été découvert dans [11].

Le premier rapport considéré est une exponentielle d'un processus de Poisson bilatéral avec dérive dépendant d'un paramètre $\rho > 0$. Ce processus Z_ρ apparaît dans le modèle d'observations i.i.d. ayant une discontinuité dans leur densité, mais aussi dans des modèles où les observations sont des processus de Poisson non-homogènes de fonction d'intensité discontinue.

Le second est une exponentielle d'un mouvement brownien bilatéral avec dérive. Ce processus Z_0 apparaît dans de nombreux modèles de statistique des processus. Un exemple bien connu est le modèle d'un signal discontinu dans un bruit blanc gaussien, mais on peut également en citer d'autres : des modèles de rupture pour des systèmes dynamiques avec un petit bruit ainsi que pour des processus de diffusion ergodiques, un modèle de rupture pour les équations différentielles stochastiques à retard, un modèle de rupture de type i.i.d., le modèle d'un signal discontinu périodique dans une diffusion non-homogène en temps, un modèle de rupture pour des processus de diffusion à seuil, *etc.*

Dans [11], il a été établi que pour de petites valeurs du paramètre ρ, le premier rapport peut être approché par le second. Plus précisément, il a été montré que lorsque $\rho \to 0$, le processus Z_ρ (après un changement judicieux d'échelle de temps) converge vers le processus Z_0 dans un espace fonctionnel adapté. Il en a été déduit que plusieurs quantités d'intérêt statistique (comme, par exemple, les erreurs moyennes quadratiques limites de divers estimateurs) liées au premier rapport peuvent être approchées par celles liées au second. Le comportement de Z_ρ pour de grandes valeurs du paramètre ρ a également été étudié. Tous ces résultats ont été illustrés par des simulations numériques.

La suite de ce travail a été réalisée en collaboration avec Ilia Negri (Université des Études de Bergame) et a fait l'objet d'un article [13] et d'un acte de congrès [17].

Nous avons considéré un troisième rapport de vraisemblance limite qui est une exponentielle d'un processus de Poisson composé bilatéral dépendant d'un paramètre $\gamma > 0$ et d'une densité f. Ce processus $Z_{\gamma,f}$ apparaît dans certains modèles de statistique de processus tels que le modèle de régression à deux régimes (two-phase regression model) et le modèle auto-régressif à seuil (threshold autoregressive model).

Nous avons montré que pour de petites valeurs du paramètre γ, ce troisième rapport limite (tout comme le premier) peut être approché par la limite brownienne Z_0. Plus précisément, nous avons établi que lorsque $\gamma \to 0$, le processus $Z_{\gamma,f}$ (après un changement judicieux d'échelle de temps) converge vers le processus Z_0 dans un espace fonctionnel adapté. Ce résultat nous a permis de faire des déductions similaires à celles de [11]. Nous avons également étudié le comportement de $Z_{\gamma,f}$ pour de grandes valeurs du paramètre γ. Enfin, nous avons illustré tous les résultats par des simulations numériques.

Une perspective intéressante serait d'étudier le rapport de vraisemblance limite obtenu par Pflug dans [76] pour le modèle d'observations i.i.d. ayant un nombre quelconque (non nécessairement fini) de discontinuités dans leur densité. Ce rapport est très général et inclut les processus Z_ρ et $Z_{\gamma,f}$ comme des cas particuliers.

Un autre travail [18] en rapport avec ces problématiques est engagé en collaboration avec Nino Kordzakhia (Université de Macquarie). L'idée est d'étudier des modèles où les observations sont des processus de Poisson non-homogènes d'intensité discontinue, mais avec un saut dont la taille diminue en même temps que le nombre d'observations croît. Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, dans le cas où cette taille est fixe, le rapport de vraisemblance limite correspondant est donné par le processus Z_ρ. Le paramètre ρ étant lié ici à la taille du saut, nous pensons que dans les modèles où cette taille diminue, le rapport de vraisemblance limite sera donné par la limite de Z_ρ lorsque $\rho \to 0$, c'est-à-dire par Z_0.

Tests d'hypothèses pour des processus à temps continu

Les travaux présentés dans ce paragraphe ont été réalisés en collaboration avec Yury Kutoyants (Université du Maine) avec qui nous avons notamment engagé une étude de tests d'hypothèses pour des processus de Poisson. Ce travail se poursuit actuellement et a pour ambition d'aboutir à la rédaction d'un livre [20].

Dans [7], nous avons considéré le problème suivant. Comme toujours en théorie des tests, on cherche à tester une hypothèse nulle contre une hypothèse alternative. L'hypothèse nulle est simple : la suite de points observée est issue d'un processus de Poisson d'intensité connue. Sous l'hypothèse alternative, cette suite est supposée provenir d'un processus ponctuel auto-excité (self-exciting point process), dit également procesus de Hawkes. Nous avons considéré des hypothèses alternatives unilatérales paramétriques et non-paramétriques et avons construit dans les deux cas des tests localement asymptotiquement uniformément les plus puissants. Les résultats ont été illustrés par des simulations numériques.

Dans [10], nous avons considéré un autre problème de test d'hypothèses. L'hypothèse nulle est la même : la suite de points observée est issue d'un processus de Poisson d'intensité connue. Sous l'alternative, cette suite est supposée provenir d'un processus ponctuel autocorrigé (self-correcting point process), dit également procesus de relâchement de stress (stress-release process). Ce problème est plus complexe que le précédent, car la famille de mesures sous-jacente n'est plus localement asymptotiquement normale (LAN). Dans ce modèle, elle est plutôt localement asymptotiquement quadratique (LAQ). Nous avons considéré une hypothèse alternative paramétrique unilatérale. Les tests de la fonction de "score" (score-function test), du rapport de vraisemblance (likelihood ratio test) et de Wald (Wald test) ont été étudiés. Le comportement asymptotique de ces tests a été décrit. Les résultats ont de nouveau été illustrés par des simulations numériques.

Dans [8], nous avons passé en revue quelques résultats concernant la construction des tests d'ajustement de type Cramér-von Mises et Kolmogorov-Smirnov pour des processus à temps continu. Plusieurs modèles ont été considérés : équation différentielle stochastique avec un petit bruit, processus de diffusion ergodique, processus de Poisson non-homogène et processus ponctuel auto-excité. Pour chaque modèle nous avons proposé des tests de taille asymptotique α et avons étudié le comportement de leurs puissances sous les alternatives locales. Les résultats ont une fois de plus été illustrés par des simulations numériques.

Notons finalement que depuis septembre 2010 nous co-encadrons (avec Yu.A. Kutoyants de l'Université du Maine) la thèse de Mlle L. Yang sur le thème "Tests d'hypothèses pour des processus de Poisson non-homogènes dans des situations non-régulières". Un article [19] est en cours de préparation.

Théorie des champs aléatoires

Les travaux présentés dans cette partie ont été menés en collaboration avec Boris Nahapetian (Académie des Sciences de la République d'Arménie). Nous avons développé une nouvelle approche de la théorie des champs aléatoires sur un réseau (ou, plus généralement,

sur un espace dénombrable). Le but de notre approche est de donner une base mathématique solide à des objets provenant de la physique statistique tels que, notamment, les champs aléatoires de Gibbs.

Notons que les résultats obtenus ont été présentés lors de nombreuses conférences internationales et qu'avec mon coauteur, nous avons participé à l'organisation de plusieurs meetings internationaux en Arménie dédiés à la théorie des champs aléatoires.

Description des champs aléatoires

La théorie des champs aléatoires a été formalisée par Dobrushin en 1968. Les champs aléatoires étant des mesures de probabilité sur des espaces de dimension infinie, ils doivent d'abord être décrits par des objets mathématiques plus simples. Dobrushin a établi la description des champs par leurs distributions conditionnelles (ensemble des lois conditionnelles du champ dans les volumes finis sachant les configurations à l'extérieur). Plus précisément, les champs sont décrits par des spécifications (des systèmes cohérents de distributions de probabilité dans les volumes finis indexées par les configurations à l'extérieur). Pour une spécification donnée, on cherche en premier lieu à savoir s'il existe un champ aléatoire ayant cette spécification pour distribution conditionnelle, et si un tel champ est unique.

Notons que la condition d'existence de Dobrushin est imposée sur toute la spécification, tandis que celle d'unicité porte seulement sur son sous-système constitué des distributions uniponctuelles. Notons également que la "définition" du champ de Gibbs est implicite : elle est donnée en termes de potentiels d'interaction, à partir desquels on construit des spécifications dites gibbsiennes, avant de leur appliquer le théorème d'existence.

L'article [1] date d'avant ma Thèse de Doctorat. Dans cette publication nous avons posé les bases de notre approche. En nous servant du principe d'inclusion-exclusion (formule de Möbius) nous avons proposé des descriptions des champs aléatoires par des objets originaux (que nous avons appelés P-fonctions, Q-fonctions et H-fonctions).

Dans son travail de 1986, en commentant le fait que la condition d'unicité porte seulement sur les distributions uniponctuelles, Dobrushin a abordé le problème de la restauration des spécifications à partir de leurs éléments uniponctuels. Quelques années plus tard, dans une conversation privée avec mon coauteur, Dobrushin a souligné l'importance d'un problème étroitement lié : celui de la description des spécifications par des systèmes cohérents de distributions de probabilité uniponctuelles indexées par les configurations à l'extérieur. Toutefois, aucune condition de cohérence sur les distributions uniponctuelles n'existait à l'époque.

Dans [3], article en grande partie issu de ma Thèse de Doctorat [15], nous avons apporté des réponses à ces deux problèmes de Dobrushin dans le cas faiblement positif (et, *a fortiori*, dans le cas strictement positif). En particulier, nous avons trouvé dans ce cas des conditions de cohérence nécessaires et suffisantes, pour qu'un système de distributions de probabilité uniponctuelles indexées par les configurations à l'extérieur soit un sous-système d'une spécification. Nous avons également donné une condition suffisante pour l'existence d'un champ aléatoire avec une distribution conditionnelle uniponctuelle prescrite.

Ces résultats nous ont permis de reformuler (dans le cas faiblement positif) la théorie de Dobrushin en termes de distributions uniponctuelles. Nous avons ainsi établi la description des champs aléatoires par leurs distributions conditionnelles uniponctuelles (ensemble des lois conditionnelles du champ sur les singletons sachant les configurations à l'extérieur) ou, plus précisément, par des systèmes cohérents (dans le sens de nos conditions nécessaires et suffisantes) de distributions de probabilité uniponctuelles indexées par les configurations à l'extérieur. De plus, ces systèmes cohérents peuvent, de façon équivalente, être remplacés par des systèmes légèrement moins complexes (satisfaisant des conditions de cohérence plus simples) que nous avons appelés "one-point systems". Quelques applications concernant la description gibbsienne des champs aléatoires, les champs aléatoires non-gibbsiens et les champs aléatoires de type "différence de martingale" (martingale-difference random fields) ont également été présentées.

Nous avons continué ce travail dans [6], où nous avons considéré le problème de la description des spécifications par des systèmes (cohérents) de distributions de probabilité dans des petits volumes indexées par les configurations à l'extérieur. Nous avons réussi à décrire les spécifications par ce que nous avons appelé des n-spécifications (des systèmes cohérents de distributions de probabilité dans les volumes de cardinal inférieur ou égal à n indexées par les configurations à l'extérieur) sous une condition de positivité très générale, que nous avons appelée "positivité très faible". Une attention particulière a dû être accordée au cas le plus important $n = 1$, qui correspond aux "one-point systems" et exige des considérations spécifiques.

Gibbsianité des champs aléatoires

Dans [9], nous avons considéré le problème de la caractérisation des champs de Gibbs. Nous avons obtenu plusieurs critères de gibbsianité des champs aléatoires. Cela a été possible grâce au cadre uniponctuel développé plus tôt, c'est-à-dire grâce à la description des champs aléatoires par leurs distributions conditionnelles uniponctuelles évoquée ci-dessus et à la description des champs aléatoires par leurs distributions fini-conditionnelles uniponctuelles (ensemble des lois conditionnelles du champ sur les singletons sachant les configurations sur les parties finies de l'extérieur) développée par Dalalyan et Nahapetian.

Parmi les critères de gibbsianité obtenus, les plus importants sont ceux en termes de distributions fini-conditionnelles uniponctuelles. Sur la base de l'un de ces critères, nous avons pu donner une définition probabiliste simple et explicite du champ aléatoire de Gibbs (rappelons ici que la "définition" classique du champ de Gibbs en termes de potentiels d'interaction est implicite). En nous basant sur cette définition, nous avons commencé à développer une approche alternative à la théorie de Gibbs. Actuellement, nous poursuivons ce développement et travaillons sur la rédaction d'un livre [21].

Statistique des champs aléatoires

Dans cette dernière partie, nous décrivons les travaux se situant à l'interface des statistiques et de la théorie des champs aléatoires. Le premier travail est issu de ma Thèse de

Doctorat [15] et porte sur l'estimation non-paramétrique pour des champs de Gibbs. Le deuxième est le fruit d'une collaboration avec des chercheurs de l'INRA, avec qui nous avons développé une méthode de cartographie du risque épidémiologique en combinant des outils statistiques et des champs de Markov discrets.

Estimation non-paramétrique pour des champs de Gibbs

Dans [2], un problème non-paramétrique d'estimation pour des champs aléatoires de Gibbs a été considéré. On suppose que le champ est prescrit par un "one-point system" (l'objet introduit dans [3] pour décrire des champs aléatoires) quasilocal et invariant par translation. Un estimateur de ce "one-point system" a été construit en utilisant la méthode des cribles (method of sieves). La consistance exponentielle ainsi que celle en norme $\mathbf{L}^p$ de l'estimateur ont été démontrées, indépendamment de l'éventuelle non-unicité et/ou perte d'invariance par translation du champ aléatoire. Notons que ces résultats sont les premiers en statistique théorique non-paramétrique des champs aléatoires.

Cartographie du risque à l'aide de champs de Markov discrets

Les résultats présentés dans ce paragraphe ont été obtenus en collaboration avec Myriam Charras-Garrido, David Abrial, Jocelyn De Goër (Centre INRA de Clermont-Ferrand-Theix) et Nathalie Peyrard (Centre INRA de Toulouse).

En épidémiologie, la cartographie du risque permet d'identifier l'emplacement des zones à risque faible ou élevé de contamination par une maladie, et fournit une mesure des différences de niveaux de risque entre ces zones.

Les modèles de cartographie du risque précédemment utilisés par les épidémiologistes se focalisaient sur le risque estimé pour chaque unité géographique. Ils étaient basés sur le modèle de Poisson log-linéaire mixte combiné à un champs de Markov caché (CMC) continu, correspondant généralement à un lissage spatial auto-régressif gaussien. La classification des risques, nécessaire pour, en particulier, délimiter clairement les zones à risque élevé (dans lesquelles des mesures de protection peuvent être appliquées), devait généralement être effectuée dans un deuxième temps.

Dans [14] nous avons proposé une méthode directe (nécessitant une seule étape) de cartographie du risque classifié en utilisant le modèle de Poisson log-linéaire mixte combiné à un CMC discret. Ce champ discret correspond à l'affectation de chaque unité géographique à une classe de risque. Les niveaux de risque associés aux classes sont des paramètres et doivent être estimés.

Le modèle que nous avons utilisé est différent des modèles utilisés en segmentation d'images où la distribution conditionnelle du champ observé est en général gaussienne, et non poissonnienne. De plus, il est peu probable d'observer des changements brusques du niveau de risque dans une carte. Ainsi, le modèle spatial caché doit favoriser une variation progressive du niveau de risque. Les champs de Markov discrets usuels (comme, par exemple, le modèle de Potts) n'imposent pas une telle contrainte. Par conséquent, nous avons proposé pour le champ caché un nouveau potentiel prenant en compte l'ordre des classes (ordonnées suivant leurs niveaux de risque).

Pour estimer les paramètres et déterminer les classes de risque, nous avons utilisé une version Monte-Carlo de l'algorithme EM (Expectation-Maximization). Après avoir testé le comportement de la méthode sur des données simulées, nous l'avons appliquée à des données réelles. Notamment, nous avons cartographié le risque de la maladie de la vache folle (ESB) en France (voir la Figure 2). Notre méthode semble particulièrement bien adaptée pour localiser les zones à risque élevé et pour estimer les niveaux de risque correspondants.

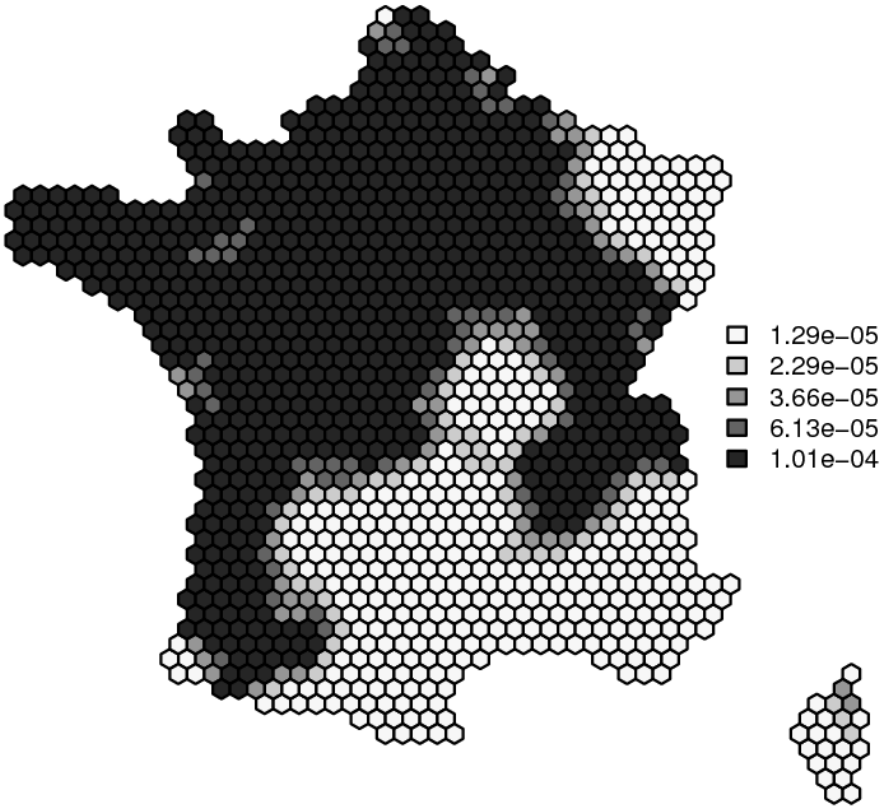


FIGURE 2 – Carte du risque estimé pour l'ESB en France.

Plan de la présentation

L'étendue des thématiques de recherche ne permet pas de présenter en détail et de façon rigoureuse tous les résultats décrits dans cette introduction. Par conséquent, et afin que cette synthèse puisse être lue de manière autonome, seule une partie des résultats sera exposée dans la suite. La présentation est organisée en trois chapitres indépendants.

Dans le Chapitre 1, nous détaillerons les résultats concernant l'*estimation des positions des singularités*. Ce sujet est l'un des plus aboutis parmi ceux considérés dans ce mémoire.

Dans le Chapitre 2, nous présenterons les résultats concernant les *rapports de vraisemblance limites des modèles de rupture*. Ce sont probablement les plus originaux des résultats obtenus en statistique des processus. Les liens découverts entre les différents rapports de vraisemblance limites permettent, en quelque sorte, de pallier le manque d'universalité du rapport de vraisemblance limite dans les modèles de rupture (rappelons que dans

les modèles réguliers, le rapport de vraisemblance limite est donné par la propriété LAN et est universel). Outre leur intérêt théorique, ces liens sont également importants dans la pratique, car ils permettent (dans certaines situations) de baser les déductions statistiques sur des rapports de vraisemblance limites mieux étudiés approchant les rapports de vraisemblance limites exacts.

Finalement, dans le Chapitre 3, nous exposerons les résultats concernant la *gibbsianité des champs aléatoires*. Ce sujet est celui qui ouvre les plus larges perspectives. Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, les résultats obtenus permettent de donner une définition probabiliste simple et explicite du champ aléatoire de Gibbs, à partir de laquelle une approche alternative à la théorie de Gibbs est en train d'être développée actuellement.

Chapitre 1

Estimation des positions des singularités

Dans ce chapitre nous présentons les résultats principaux des articles [4, 5, 12].

1.1 Singularité dans la fonction d'intensité d'un processus de Poisson

Le processus de Poisson non-homogène est l'un des processus ponctuels les plus simples (voir, par exemple, Daley et Vere-Jones [35]). Cependant, grâce à un vaste choix des fonctions d'intensité, ce modèle est suffisamment riche et largement utilisé. On le retrouve dans beaucoup de domaines utilisant des statistiques appliquées tels que la communication optique, la fiabilité, la biologie, la médecine, le traitement d'images, *etc.* (voir, par exemple, Karr [66, 67], Snyder et Miller [81] et Thompson [87]).

Rappelons que $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ est un processus de Poisson non-homogène de fonction d'intensité S, si X est un processus stochastique partant de zéro $\big(X(0) = 0\big)$, à trajectoires càdlàg (continues à droite et admettant des limites à gauche), dont les accroissements sont indépendants, et si pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $t_1 > t_2$, l'accroissement $X(t_1) - X(t_2)$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \int_{t_1}^{t_2} S(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}\big(X(t_1) - X(t_2) = k\big) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Notons que X est un processus de comptage et que le processus ponctuel associé a pour réalisation l'ensemble des instants de saut (jump times) de la trajectoire de X.

La diversité des applications des processus de Poisson est également due à la possibilité d'utiliser l'analyse du rapport de vraisemblance. Cette technique a été élaborée par Ibragimov et Khasminskii dans [65] et appliquée aux processus de Poisson par Kutoyants dans [71, 73].

Dans les problèmes d'estimation de paramètres, la théorie des grands échantillons est assez proche de celle de la statistique classique (i.i.d.). Considérons, par exemple, le problème de l'estimation du paramètre θ sur la base de n observations indépendantes sur

l'intervalle fixe $[0,T]$ d'un processus de Poisson $X = \{X(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ de fonction d'intensité S_θ lorsque $n \to +\infty$. Notons que ce problème est équivalent à celui de l'estimation du paramètre par une observation sur un intervalle grandissant d'un processus de Poisson non-homogène périodique d'une période connue. Si le problème est régulier, le modèle est localement asymptotiquement normal (LAN). Alors, l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) $\widehat{\theta}_n$ et les estimateurs bayésiens (EB) $\widetilde{\theta}_n$ sont consistants, sont asymptotiquement normaux, c'est-à-dire

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \mathcal{N}\big(0, I_\theta^{-1}\big) \quad \text{et} \quad \sqrt{n}\big(\widetilde{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \mathcal{N}\big(0, I_\theta^{-1}\big),$$

et sont asymptotiquement efficaces. Ici I_θ est l'information de Fisher donnée par

$$I_\theta = \int_0^T \frac{\dot{S}_\theta^2(t)}{S_\theta(t)}\,\mathrm{d}t,$$

où $\dot{S}_\theta(t) = \frac{\partial}{\partial\theta} S_\theta(t)$ (voir Kutoyants [71, 73] pour plus de détails).

Si le problème n'est pas régulier, alors les propriétés des estimateurs changent sensiblement. Par exemple, si S_θ est supposée lisse partout sur l'intervalle $[0,T]$ sauf au point θ, où elle est supposée avoir un saut (soit, par exemple, $S_\theta(t) = s(t-\theta)$ où s est discontinue en 0), alors l'EMV et les EB sont toujours consistants, mais convergent à une vitesse plus élevée. De plus, ils ont des lois limites différentes, c'est-à-dire

$$n\big(\widehat{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \xi_1 \quad \text{et} \quad n\big(\widetilde{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \xi_2$$

(où la loi de ξ_1 est différente de celle de ξ_2 avec $\mathbf{E}\,\xi_1^2 > \mathbf{E}\,\xi_2^2$), et seuls les EB sont asymptotiquement efficaces (voir Kutoyants [71, 73] pour plus de détails).

Ici nous considérons le cas où la fonction d'intensité S_θ est supposée lisse partout sur l'intervalle $[0,T]$ sauf au point θ, où elle est supposée avoir une singularité d'ordre p.

1.1.1 Trois types de singularités

Plus précisément, nous supposons que S_θ est strictement positive (sauf, éventuellement, au point θ) et qu'elle admet la représentation suivante :

$$S_\theta(t) = \begin{cases} a\,|t-\theta|^p + \Psi(\theta,t), & \text{si } t \leqslant \theta, \\ b\,|t-\theta|^p + \Psi(\theta,t), & \text{si } t \geqslant \theta. \end{cases} \tag{1.1}$$

Ici $\theta \in\,]0,T[$ est le paramètre inconnu à estimer, Ψ est une fonction lisse connue, les constantes p, a et b sont également connues et sont supposées satisfaire $p > -1$ (afin de garantir l'intégrabilité de la fonction d'intensité) et $a^2 + b^2 > 0$.

Si $\Psi(\theta,\theta) \neq 0$ et $p > 1/2$, alors, en dépit de la singularité de la fonction d'intensité en θ, l'information de Fisher est finie. Ainsi, ce cas peut être traité comme le cas régulier.

Si $\Psi(\theta,\theta) \neq 0$ et $0 < p < 1/2$, on dit que la fonction d'intensité a un "cusp" en θ (voir la Figure 1.a à la page 2). Ce cas a été étudié dans [4] et sera présenté en détail dans la Section 1.1.2. Il a notamment été montré que l'EMV et les EB sont consistants,

convergent à la vitesse $n^{1/(2p+1)}$ (plus rapidement que dans le cas régulier, mais plus lentement que dans le cas discontinu) et ont des lois limites différentes. La convergence des moments de ces estimateurs a également été établie, ainsi que l'efficacité asymptotique des EB.

Si $\Psi(\theta,\theta) = 0$ et $p > 1$, alors, comme ci-dessus, l'information de Fisher est finie et ce cas peut être traité comme le cas régulier.

Si $\Psi(\theta,\theta) = 0$ et $0 < p < 1$ (on suppose également dans ce cas que $a, b > 0$), on dit que la fonction d'intensité a une singularité de type "0" en θ (voir la Figure 1.b à la page 2). Ce cas a été étudié dans [12] et sera présenté en détail dans la Section 1.1.3. Il a notamment été montré que l'EMV et les EB sont consistants, convergent à la vitesse $n^{1/(p+1)}$ (qui est encore une fois intermédiaire entre celle du cas régulier et celle du cas discontinu) et ont des lois limites différentes. La convergence des moments de ces estimateurs a également été établie, ainsi que l'efficacité asymptotique des EB.

Si $-1 < p < 0$ (on suppose également dans ce cas que $a, b > 0$), on dit que la fonction d'intensité a une singularité de type "∞" en θ (voir la Figure 1.c à la page 2). Ce cas a également été étudié dans [12] et sera présenté en détail dans la Section 1.1.3. Seuls les EB ont été considérés, car l'EMV n'a pas de sens dans ce cas. Il a été montré qu'ils sont consistants et convergent à la vitesse $n^{1/(p+1)}$ (qui est supérieure même à celle du cas discontinu). La convergence de leurs moments a également été établie, ainsi que leur efficacité asymptotique.

Notons que le cas discontinu peut être considéré comme une singularité $\big($dans le sens de la représentation (1.1)$\big)$ en prenant $p = 0$ et $a \neq b$, ce qui explique que les convergences soient plus lentes pour $p > 0$ et plus rapides pour $p < 0$.

Notons également que nos résultats sont similaires à ceux obtenus par Ibragimov et Khasminskii pour les observations i.i.d. ayant une singularité dans leur densité. Une présentation détaillée de leurs résultats peut être trouvée dans [65, Chapitre 6], mais on peut également se référer à leurs travaux plus anciens [61] et [63], ainsi qu'à Ermakov [47]. Le cas du "cusp" pour le modèle d'observations i.i.d. a également été considéré par Prakasa Rao dans [78]. Cependant, lorsque les observations sont des processus à temps continu, les démonstrations nécessitent des outils plus sophistiqués et aucun résultat de ce type n'avait jusqu'alors été obtenu.

1.1.2 Singularité de type "cusp"

Supposons que l'on observe n réalisations $(X_1, \ldots, X_n) = X^n$ d'un processus de Poisson $X = \{X(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ de fonction d'intensité S_θ strictement positive admettant la représentation (1.1), où $\theta \in \Theta =]\alpha,\beta[\subseteq]0,T[$ est le paramètre inconnu à estimer. On suppose que $0 < p < 1/2$, que $a^2 + b^2 > 0$, et que la fonction Ψ est continue et est, uniformément par rapport à t, höldérienne d'ordre strictement supérieur à $p + 1/2$ en θ. Notre objectif est d'étudier le comportement asymptotique des estimateurs de θ lorsque $n \to +\infty$.

Le rapport de vraisemblance dans ce problème est donné par

$$L(\theta,\theta_1,X^n)=\exp\biggl\{\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \ln\frac{S_\theta(t)}{S_{\theta_1}(t)}\,\mathrm{d}X_i(t)-n\int_0^T\biggl[\frac{S_\theta(t)}{S_{\theta_1}(t)}-1\biggr]S_{\theta_1}(t)\,\mathrm{d}t\biggr\},\tag{1.2}$$

où θ_1 est une certaine valeur fixe de θ.

L'EMV $\widehat{\theta}_n$ est introduit comme l'une des solutions de l'équation

$$L(\widehat{\theta}_n,\theta_1,X^n)=\max_{\theta\in\Theta}L(\theta,\theta_1,X^n).\tag{1.3}$$

L'EB $\widetilde{\theta}_n$ pour une densité *a priori* q et pour la fonction de perte quadratique peut être écrit comme

$$\widetilde{\theta}_n=\int_\alpha^\beta\theta\,q\bigl(\theta|X^n\bigr)\,\mathrm{d}\theta,\tag{1.4}$$

où

$$q\bigl(\theta|X^n\bigr)=L(\theta,\theta_1,X^n)\,q(\theta)\left(\int_\alpha^\beta L(\theta,\theta_1,X^n)\,q(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)^{-1}\tag{1.5}$$

est la densité *a posteriori*.

Pour décrire le comportement asymptotique de ces estimateurs, nous devons introduire le processus stochastique

$$Z(u)=\exp\Bigl\{W^H(u)-\frac{1}{2}\,|u|^{2H}\Bigr\},\quad u\in\mathbb{R},\tag{1.6}$$

où $H=p+1/2$ et $W^H=\{W^H(u),\ u\in\mathbb{R}\}$ est un mouvement brownien fractionnaire standard de paramètre de Hurst H, c'est-à-dire un processus gaussien à trajectoires continues, de moyenne nulle et de fonction de covariance

$$\mathbf{E}\bigl[W^H(u_1)\,W^H(u_2)\bigr]=\frac{1}{2}\Bigl[|u_1|^{2H}+|u_2|^{2H}-|u_1-u_2|^{2H}\Bigr].$$

Nous introduisons ensuite les variables aléatoires ξ et ζ définies par les équations

$$Z(\xi)=\max_{u\in\mathbb{R}}Z(u)\tag{1.7}$$

et

$$\zeta=\int_{-\infty}^{+\infty}u\,Z(u)\,du\left(\int_{-\infty}^{+\infty}Z(u)\,du\right)^{-1}.\tag{1.8}$$

Notons ici que la variable aléatoire ξ est bien définie car, avec probabilité 1, le processus Z atteint son maximum en un point unique (voir, par exemple, [47]).

Nous introduisons également (voir [65, Section 6.4]) la fonction $d(t)$, $t\in\mathbb{R}^*$, définie par

$$d(t)=\begin{cases}a, & \text{si } t<0,\\ b, & \text{si } t>0,\end{cases}\tag{1.9}$$

et la quantité

$$\begin{aligned} I_p(a,b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(d(t-1)\,|t-1|^p - d(t)\,|t|^p \Big)^2 \,\mathrm{d}t, \\ &= \frac{\Gamma\big(1+p\big)\,\Gamma\big(\frac{1}{2}-p\big)}{2^{2p}\,\sqrt{\pi}\,(2p+1)} \Big(a^2+b^2-2ab\,\cos(\pi p) \Big) \\ &= \mathrm{B}\big(p+1\,,\,p+1\big)\,\left(\frac{a^2+b^2}{\cos(\pi p)} - 2ab \right). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Finalement, nous posons

$$\gamma_\theta = \left(\frac{I_p(a,b)}{\Psi(\theta,\theta)} \right)^{1/(2p+1)}.$$

À présent, nous pouvons énoncer les résultats principaux de [4].

Théorème 1.1. *Pour tout $\theta_0 \in \Theta$, on a*

$$\lim_{\delta\to 0} \varliminf_{n\to+\infty} \inf_{\overline{\theta}_n} \sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} \mathbf{E}_\theta \Big(n^{1/(2p+1)} \big(\overline{\theta}_n - \theta \big) \Big)^2 \geqslant \frac{\mathbf{E}\,\zeta^2}{\gamma_{\theta_0}^2},$$

*où l'*inf *est pris sur l'ensemble de tous les estimateurs possibles $\overline{\theta}_n$ de θ.*

La borne inférieure minimax donnée par le théorème précédent nous conduit à introduire la définition suivante.

Définition 1.2. *Un estimateur $\overline{\theta}_n$ de θ est dit asymptotiquement efficace si*

$$\lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to+\infty} \sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} \mathbf{E}_\theta \Big(n^{1/(2p+1)} \big(\overline{\theta}_n - \theta \big) \Big)^2 = \frac{\mathbf{E}\,\zeta^2}{\gamma_{\theta_0}^2}$$

pour tout $\theta_0 \in \Theta$.

Les propriétés de l'EMV et des EB sont données par les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.3. *L'EMV $\widehat{\theta}_n$ possède, uniformément en $\theta \in \mathbf{K}$ pour tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$, les propriétés suivantes :*

– *$\widehat{\theta}_n$ est consistant, c'est-à-dire*

$$\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbf{P}_\theta} \theta,$$

– *la vitesse de convergence de $\widehat{\theta}_n$ est $n^{1/(2p+1)}$, et sa loi limite est celle de ξ/γ_θ, c'est-à-dire*

$$n^{1/(2p+1)} \big(\widehat{\theta}_n - \theta \big) \Longrightarrow \xi/\gamma_\theta,$$

– *pour tout $k > 0$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}_\theta \Big| n^{1/(2p+1)} \big(\widehat{\theta}_n - \theta \big) \Big|^k = \frac{\mathbf{E}\,|\xi|^k}{\gamma_\theta^k}.$$

Théorème 1.4. *L'EB $\widetilde{\theta}_n$ (pour toute densité a priori strictement positive et continue) possède, uniformément en $\theta \in \mathbf{K}$ pour tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$, les propriétés suivantes :*
– *$\widetilde{\theta}_n$ est consistant, c'est-à-dire*

$$\widetilde{\theta}_n \xrightarrow{\mathbf{P}_\theta} \theta,$$

– *la vitesse de convergence de $\widetilde{\theta}_n$ est $n^{1/(2p+1)}$, et sa loi limite est celle de ζ/γ_θ, c'est-à-dire*

$$n^{1/(2p+1)}\big(\widetilde{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \zeta/\gamma_\theta,$$

– *pour tout $k > 0$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}_\theta \left| n^{1/(2p+1)}\big(\widetilde{\theta}_n - \theta\big)\right|^k = \frac{\mathbf{E}\,|\zeta|^k}{\gamma_\theta^k}\,.$$

De plus, $\widetilde{\theta}_n$ est asymptotiquement efficace.

La preuve de ces résultats utilise la technique d'analyse du rapport de vraisemblance. Nous posons $\theta_u = \theta + u\,n^{-1/(2p+1)}$ pour tout $u \in U_n = \big]n^{1/(2p+1)}(\alpha-\theta)\,, n^{1/(2p+1)}(\beta-\theta)\big[$, et nous introduisons le rapport de vraisemblance renormalisé

$$Z_n(u) = L\left(\theta_u, \theta, X^n\right), \quad u \in U_n.$$

Nous cherchons ensuite à montrer que lorsque $n \to +\infty$, le processus Z_n converge $\big($dans le sens de la convergence faible des lois de probabilité sur l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $\pm\infty\big)$ vers une limite non-dégénérée : le rapport de vraisemblance limite.

Pour cela, nous introduisons le processus stochastique

$$Z_\theta(u) = Z(\gamma_\theta u) = \exp\Big\{\gamma_\theta^H\, W^H(u) - \frac{1}{2}\,\gamma_\theta^{2H}\ |u|^{2H}\Big\}, \quad u \in \mathbb{R},$$

et nous établissons (en utilisant des techniques sensiblement différentes de celles du cas i.i.d.) les trois lemmes suivants.

Lemme 1.5. *Les distributions fini-dimensionnelles de Z_n convergent vers celles de Z_θ uniformément (par rapport à θ) sur tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$.*

Lemme 1.6. *Pour tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathbf{E}_\theta \left| Z_n^{1/2}(u_1) - Z_n^{1/2}(u_2)\right|^2 \leqslant C\ |u_1 - u_2|^{2p+1}$$

pour tous $u_1, u_2 \in U_n$, tout $\theta \in \mathbf{K}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 1.7. *Pour tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$, il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\mathbf{E}_\theta\, Z_n^{1/2}(u) \leqslant \exp\big\{-c\ |u|^{2p+1}\big\}$$

pour tout $u \in U_n$, tout $\theta \in \mathbf{K}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Ces lemmes permettent de vérifier la convergence faible du rapport de vraisemblance renormalisé Z_n vers le rapport de vraisemblance limite Z_θ. Notamment, en appliquant les Théorèmes 1.9.1, 1.10.1 et 1.10.2 de [65], nous obtenons respectivement les Théorèmes 1.1, 1.3 et 1.4.

1.1.3 Singularité de type "0" ou de type "∞"

Supposons que l'on observe n réalisations $(X_1, \dots, X_n) = X^n$ d'un processus de Poisson $X = \{X(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ de fonction d'intensité S_θ strictement positive (sauf, éventuellement, au point θ) admettant la représentation (1.1), où $\theta \in \Theta =]\alpha,\beta[\subseteq]0,T[$ est le paramètre inconnu à estimer. On suppose que $a, b > 0$, que $p \in]-1,0[\cup]0,1[$, et que la fonction Ψ est continue et est, uniformément par rapport à t, höldérienne d'ordre strictement supérieur à $(p+1)/2$ en θ. Dans le cas d'une singularité de type "0" (cas $p > 0$), on suppose également que $\Psi(\theta, \theta) = 0$. Notre objectif est d'étudier le comportement asymptotique des estimateurs de θ lorsque $n \to +\infty$.

Comme dans la section précédente, le rapport de vraisemblance, l'EMV $\widehat{\theta}_n$ et l'EB $\widetilde{\theta}_n$ pour une densité *a priori* q et pour la fonction de perte quadratique sont introduits par les équations (1.2)–(1.5).

Notons que l'EMV n'a pas de sens dans le cas d'une singularité de type "∞" (cas $p < 0$), car dans ce cas le rapport de vraisemblance est infini en tout point θ qui est un instant de saut de l'un des processus de Poisson $X_1, \dots, X_n$.

Pour décrire le comportement asymptotique de ces estimateurs, nous devons introduire le processus stochastique

$$Z(u) = \exp\Bigg\{ p \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left|1 - \frac{u}{t}\right| \, \pi(\mathrm{d}t) + \ln\frac{a}{b} \int_0^u Y(\mathrm{d}t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left|1 - \frac{u}{t}\right|^p - 1 - p \ln\left|1 - \frac{u}{t}\right| \right) d(t)\,|t|^p \, \mathrm{d}t - \frac{a-b}{p+1}\,|u|^{p+1}\,\mathrm{sign}(u) \Bigg\}, \quad u \in \mathbb{R},$$

où la fonction d est définie par (1.9), Y est un processus de Poisson non-homogène bilatéral de fonction d'intensité $S(t) = d(t)\,|t|^p$, et π est sa version centrée : $\pi = Y - \mathbf{E}\,Y$.

Nous introduisons également la variable aléatoire

$$\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} u\,Z(u)\,du \ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Z(u)\,du \right)^{-1}$$

et, dans le cas $p > 0$, la variable aléatoire ξ définie par

$$Z(\xi) = \max_{u \in \mathbb{R}} Z(u).$$

Notons ici que la variable aléatoire ξ est bien définie car, avec probabilité 1, le processus Z atteint son maximum en un point unique (voir, par exemple, [47]).

À présent, nous pouvons énoncer les résultats principaux de [12].

Théorème 1.8. *Pour tout $\theta_0 \in \Theta$, on a*

$$\lim_{\delta\to 0} \varliminf_{n\to+\infty} \inf_{\overline{\theta}_n} \sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} \mathbf{E}_\theta\Big(n^{1/(p+1)}\big(\overline{\theta}_n - \theta\big)\Big)^2 \geqslant \mathbf{E}\,\zeta^2,$$

*où l'*inf *est pris sur l'ensemble de tous les estimateurs possibles $\overline{\theta}_n$ de θ.*

La borne inférieure minimax donnée par le théorème précédent nous conduit à introduire la définition suivante.

Définition 1.9. *Un estimateur $\overline{\theta}_n$ de θ est dit asymptotiquement efficace si*

$$\lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to+\infty} \sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} \mathbf{E}_\theta\Big(n^{1/(p+1)}\big(\overline{\theta}_n - \theta\big)\Big)^2 = \mathbf{E}\,\zeta^2$$

pour tout $\theta_0 \in \Theta$.

Les propriétés des EB et, dans le cas $p > 0$, de l'EMV sont données par les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.10. *L'EB $\widetilde{\theta}_n$ (pour toute densité a priori strictement positive et continue) possède, uniformément en $\theta \in \mathbf{K}$ pour tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$, les propriétés suivantes :*

– *$\widetilde{\theta}_n$ est consistant, c'est-à-dire*

$$\widetilde{\theta}_n \xrightarrow{\mathbf{P}_\theta} \theta,$$

– *la vitesse de convergence de $\widetilde{\theta}_n$ est $n^{1/(p+1)}$, et sa loi limite est celle de ζ, c'est-à-dire*

$$n^{1/(p+1)}\big(\widetilde{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \zeta,$$

– *pour tout $k > 0$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}_\theta \left|n^{1/(p+1)}\big(\widetilde{\theta}_n - \theta\big)\right|^k = \mathbf{E}\,|\zeta|^k.$$

De plus, $\widetilde{\theta}_n$ est asymptotiquement efficace.

Théorème 1.11. *Soit $p \in \,]0,1[$. L'EMV $\widehat{\theta}_n$ possède, uniformément en $\theta \in \mathbf{K}$ pour tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$, les propriétés suivantes :*

– *$\widehat{\theta}_n$ est consistant, c'est-à-dire*

$$\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbf{P}_\theta} \theta,$$

– *la vitesse de convergence de $\widehat{\theta}_n$ est $n^{1/(p+1)}$, et sa loi limite est celle de ξ, c'est-à-dire*

$$n^{1/(p+1)}\big(\widehat{\theta}_n - \theta\big) \Longrightarrow \xi,$$

– *pour tout $k > 0$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}_\theta \left|n^{1/(p+1)}\big(\widehat{\theta}_n - \theta\big)\right|^k = \mathbf{E}\,|\xi|^k.$$

Pour montrer ces résultats, nous suivons le même schéma que dans la section précédente. Nous posons $\theta_u = \theta + u\, n^{-1/(p+1)}$ pour tout $u \in U_n = \left]n^{1/(p+1)}(\alpha - \theta)\,, n^{1/(p+1)}(\beta - \theta)\right[$, et nous introduisons le rapport de vraisemblance renormalisé

$$Z_n(u) = L\,(\theta_u, \theta, X^n)\,, \quad u \in U_n.$$

Nous établissons ensuite les trois lemmes suivants.

Lemme 1.12. *Les distributions fini-dimensionnelles de Z_n convergent vers celles de Z uniformément (par rapport à θ) sur tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$.*

Lemme 1.13. *Pour tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathbf{E}_\theta \left| Z_n^{1/2}(u_1) - Z_n^{1/2}(u_2) \right|^2 \leqslant C\ |u_1 - u_2|^{p+1}$$

pour tous $u_1, u_2 \in U_n$, tout $\theta \in \mathbf{K}$ et tout n suffisamment grand.

Lemme 1.14. *Pour tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$, il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\mathbf{E}_\theta\, Z_n^{1/2}(u) \leqslant \exp\bigl\{-c\ |u|^{p+1}\bigr\}$$

pour tout $u \in U_n$, tout $\theta \in \mathbf{K}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme dans la section précédente, ces lemmes permettent d'établir que le rapport de vraisemblance limite de notre modèle est donné par le processus Z et d'obtenir les Théorèmes 1.8, 1.10 et 1.11.

1.2 "Cusp" dans la dérive d'une diffusion ergodique

Dans [5], en collaboration avec Yury Kutoyants (Université du Maine) nous avons établi des résultats similaires à ceux de la Section 1.1.2 dans le cas où l'on observe un processus de diffusion ergodique ayant un "cusp" dans la dérive. Nous avons montré que l'EMV et les EB sont de nouveau consistants. De plus, nous avons déterminé leur vitesse de convergence et leurs lois limites qui s'avèrent être les mêmes que celles du cas poissonnien et du cas i.i.d. La convergence des moments de ces estimateurs et l'efficacité asymptotique des EB ont également été établies.

Formellement, le problème considéré est celui de l'estimation du paramètre $\theta \in \Theta =]\alpha\,, \beta[$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, lorsque l'on observe sur l'intervalle $[0,T]$, $T \to +\infty$, une trajectoire du processus $X^T = \{X_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ solution de

$$\mathrm{d}X_t = S_\theta(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}W_t, \quad X_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.11}$$

où X_0 est une condition initiale et $W = \{W_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ est un mouvement brownien standard, c'est-à-dire un processus gaussien à trajectoires continues, de moyenne nulle, de variance $\mathbf{E}\, W_t^2 = t$, et dont les accroissements sont indépendants et stationnaires.

La dérive S_θ est supposée lisse partout sauf au point θ, où elle est supposée avoir un "cusp" d'ordre p. Plus précisément, nous supposons que la fonction σ est strictement positive et continue, et que la fonction S_θ admet la représentation

$$S_\theta(x) = \begin{cases} a\,|x - \theta|^p + \Psi(\theta, x), & \text{si } x \leqslant \theta, \\ b\,|x - \theta|^p + \Psi(\theta, x), & \text{si } x \geqslant \theta, \end{cases}$$

où $0 < p < 1/2$, $ab \neq 0$, et la fonction Ψ est continue et est, uniformément par rapport à x, höldérienne d'ordre strictement supérieur à $p + 1/2$ en θ.

De plus, dans la suite nous supposons toujours que la condition suivante est satisfaite.

($\mathcal{E}$) *Les fonctions σ, σ^{-1} et S_θ ont des majorants polynomiaux et*

$$\overline{\lim_{|x|\to+\infty}} \sup_{\theta\in\Theta} \operatorname{sign}(x)\, \frac{S_\theta(x)}{\sigma^2(x)} < 0.$$

La condition ($\mathcal{E}$) garantie que le processus (1.11) est ergodique, avec la densité invariante

$$f_\theta(x) = \frac{1}{G(\theta)\,\sigma^2(x)}\ \exp\left\{ 2 \int_\theta^x \frac{S_\theta(v)}{\sigma^2(v)}\, \mathrm{d}v \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où

$$G(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2(x)}\ \exp\left\{ 2 \int_\theta^x \frac{S_\theta(v)}{\sigma^2(v)}\, \mathrm{d}v \right\} \mathrm{d}x$$

est la constante de normalisation.

Le rapport de vraisemblance dans ce problème est donné par

$$L\left(\theta, \theta_1, X^T\right) = \exp\left\{ \int_0^T \frac{S_\theta(X_t) - S_{\theta_1}(X_t)}{\sigma^2(X_t)}\, \mathrm{d}X_t - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{S_\theta^2(X_t) - S_{\theta_1}^2(X_t)}{\sigma^2(X_t)}\, \mathrm{d}t \right\},$$

où θ_1 est une certaine valeur fixe de θ.

L'EMV $\widehat{\theta}_T$ et l'EB $\widetilde{\theta}_T$ pour une densité *a priori* q et pour la fonction de perte quadratique sont définis par les équations

$$L(\widehat{\theta}_T, \theta_1, X^T) = \max_{\theta\in\Theta} L(\theta, \theta_1, X^T)$$

et

$$\widetilde{\theta}_T = \int_\Theta \theta\ q(\theta|X^T)\, \mathrm{d}\theta \quad \text{avec} \quad q(\theta|X^T) = \frac{q(\theta)\ L(\theta, \theta_1, X^T)}{\int_\Theta q(\theta)\ L(\theta, \theta_1, X^T)\, \mathrm{d}\theta}\,.$$

Pour décrire le comportement asymptotique de ces estimateurs, posons $H = p + 1/2$ et rappelons le processus stochastique Z, les variables aléatoires ξ et ζ, ainsi que la quantité $I_p(a, b)$ introduits dans (1.6)–(1.10). Posons également

$$\Gamma_\theta^2 = \frac{I_p(a,b)}{G(\theta)\,\sigma^4(\theta)} \quad \text{et} \quad \gamma_\theta = \Gamma_\theta^{1/H}.$$

Le premier des résultats principaux de [5] est la borne inférieure minimax suivante.

Théorème 1.15. *Pour tout $\theta_0 \in \Theta$, on a*

$$\lim_{\delta\to 0} \varliminf_{T\to+\infty} \inf_{\overline{\theta}_T} \sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} \mathbf{E}_\theta \Big(T^{1/(2p+1)} \big(\overline{\theta}_T - \theta\big) \Big)^2 \geqslant \frac{\mathbf{E}\,\zeta^2}{\gamma_{\theta_0}^2}\,,$$

*où l'*inf *est pris sur l'ensemble de tous les estimateurs possibles $\overline{\theta}_T$ de θ.*

Cette borne nous conduit à introduire la définition suivante.

Définition 1.16. *Un estimateur $\overline{\theta}_T$ de θ est dit asymptotiquement efficace si*

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{T\to+\infty}\sup_{|\theta-\theta_0|<\delta}\mathbf{E}_\theta\Big(T^{1/(2p+1)}\big(\overline{\theta}_T-\theta\big)\Big)^2=\frac{\mathbf{E}\,\zeta^2}{\gamma_{\theta_0}^2}$$

pour tout $\theta_0\in\Theta$.

Les autres résultats principaux de [5] sont les propriétés de l'EMV et des EB, données par les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.17. *L'EMV $\widehat{\theta}_T$ possède, uniformément en $\theta\in\mathbf{K}$ pour tout compact $\mathbf{K}\subset\Theta$, les propriétés suivantes :*

– *$\widehat{\theta}_T$ est consistant, c'est-à-dire*

$$\widehat{\theta}_T\xrightarrow{\mathbf{P}_\theta}\theta,$$

– *la vitesse de convergence de $\widehat{\theta}_T$ est $T^{1/(2p+1)}$, et sa loi limite est celle de ξ/γ_θ, c'est-à-dire*

$$T^{1/(2p+1)}\big(\widehat{\theta}_T-\theta\big)\Longrightarrow\xi/\gamma_\theta,$$

– *pour tout $k>0$, on a*

$$\lim_{T\to+\infty}\mathbf{E}_\theta\Big|T^{1/(2p+1)}\big(\widehat{\theta}_T-\theta\big)\Big|^k=\frac{\mathbf{E}\,|\xi|^k}{\gamma_\theta^k}\,.$$

Théorème 1.18. *L'EB $\widetilde{\theta}_T$ (pour toute densité a priori strictement positive et continue) possède, uniformément en $\theta\in\mathbf{K}$ pour tout compact $\mathbf{K}\subset\Theta$, les propriétés suivantes :*

– *$\widetilde{\theta}_T$ est consistant, c'est-à-dire*

$$\widetilde{\theta}_T\xrightarrow{\mathbf{P}_\theta}\theta,$$

– *la vitesse de convergence de $\widetilde{\theta}_T$ est $T^{1/(2p+1)}$, et sa loi limite est celle de ζ/γ_θ, c'est-à-dire*

$$T^{1/(2p+1)}\big(\widetilde{\theta}_T-\theta\big)\Longrightarrow\zeta/\gamma_\theta,$$

– *pour tout $k>0$, on a*

$$\lim_{T\to+\infty}\mathbf{E}_\theta\Big|T^{1/(2p+1)}\big(\widetilde{\theta}_T-\theta\big)\Big|^k=\frac{\mathbf{E}\,|\zeta|^k}{\gamma_\theta^k}\,.$$

De plus, $\widetilde{\theta}_T$ est asymptotiquement efficace.

Comme dans la section précédente, la preuve de ces résultats est basée sur l'étude du rapport de vraisemblance renormalisé

$$Z_T(u)=L(\theta_u,\theta,X^T),\quad u\in U_T=\big]T^{1/(2p+1)}(\alpha-\theta)\,,T^{1/(2p+1)}(\beta-\theta)\big[,$$

où $\theta_u = \theta + u\,T^{-1/(2p+1)}$. Notamment, on démontre que Z_T converge faiblement dans l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ vers le rapport de vraisemblance limite Z_θ défini par

$$Z_\theta(u) = Z(\gamma_\theta u) = \exp\Big\{\Gamma_\theta\, W^H(u) - \frac{1}{2}\,\Gamma_\theta^2\ |u|^{2H}\Big\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Pour cela, on établit les trois lemmes suivants, et on conclut la preuve de la même façon que dans les Sections 1.1.2 et 1.1.3.

Lemme 1.19. *Les distributions fini-dimensionnelles de Z_T convergent vers celles de Z_θ uniformément (par rapport à θ) sur tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$.*

Lemme 1.20. *Pour tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathbf{E}_\theta \left| Z_T^{1/2}(u_1) - Z_T^{1/2}(u_2) \right|^2 \leqslant C\ |u_1 - u_2|^{2p+1}$$

pour tous $u_1, u_2 \in U_T$, tout $\theta \in \mathbf{K}$ et tout $T > 1$.

Lemme 1.21. *Pour tout compact $\mathbf{K} \subset \Theta$, il existe une constante $c > 0$ et une fonction $C(N)$, $N > 0$, telles que*

$$\mathbf{P}_\theta \left\{ Z_T(u) \geqslant e^{-c|u|^{2p+1}} \right\} \leqslant \frac{C(N)}{|u|^N}$$

pour tout $u \in U_T$, tout $\theta \in \mathbf{K}$ et tout $N > 0$.

Notons également que d'après Fujii [52], les résultats concernant les EB devraient rester valables dans le cas $-1/2 < p < 0$ (singularité de type "∞").

Chapitre 2

Rapports de vraisemblance limites des modèles de rupture

Dans ce chapitre nous présentons les résultats principaux des articles [11, 13].

2.1 Quelques rapports de vraisemblance limites apparaissant dans des modèles de rupture

Nous nous intéressons ici à l'étude asymptotique des modèles statistiques paramétriques non-réguliers (notamment, ceux de rupture) rencontrés en statistique inférentielle. Une présentation détaillée de la théorie d'estimation des paramètres (aussi bien dans le cas régulier que non-régulier) peut être trouvée dans le livre d'Ibragimov et Khasminskii [65]. Ils ont développé une théorie générale d'estimation basée sur l'analyse du rapport de vraisemblance. Leur approche consiste à montrer d'abord que le rapport de vraisemblance renormalisé (avec une vitesse de renormalisation bien choisie) converge faiblement (dans un espace fonctionnel adapté) vers une limite non-dégénérée : le rapport de vraisemblance limite. Les propriétés des estimateurs (à savoir leur vitesse de convergence, qui est la même que celle de la renormalisation, et leurs lois limites) sont ensuite déduites. Enfin, sur la base de ces estimateurs, on peut construire des intervalles de confiance, des tests, *etc.* Notons que les techniques utilisées garantissent également la convergence des moments des estimateurs, permettant ainsi de décrire le comportement asymptotique de certaines quantités d'intérêt statistique associées (telles que les erreurs moyennes quadratiques) et de vérifier l'efficacité asymptotique éventuelle.

Il est bien connu que les modèles réguliers sont localement asymptotiquement normaux (LAN). Ainsi, le rapport de vraisemblance limite (donné par cette propriété LAN) est le même pour tous les modèles réguliers. En particulier, les estimateurs classiques — l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) et les estimateurs bayésiens (EB) — sont consistants, asymptotiquement normaux et asymptotiquement efficaces dans ce type de modèles.

Dans le cas non-régulier, la situation change sensiblement. La vitesse de renormalisation est généralement plus grande, mais les rapports de vraisemblance limites peuvent être

différents selon les modèles. L'EMV et les EB sont toujours consistants, leur vitesse de convergence est meilleure, mais leurs lois limites peuvent être différentes et, en général, seuls les EB sont asymptotiquement efficaces.

Nous considérons ici trois rapports de vraisemblance limites (Z_ρ, $Z_{\gamma,f}$ et Z_0) apparaissant dans divers modèles de rupture rencontrés en statistique inférentielle.

2.1.1 Processus Z_ρ

Le premier rapport de vraisemblance limite Z_ρ est une exponentielle d'un processus de Poisson bilatéral avec dérive. Plus précisément, Z_ρ est le processus stochastique sur $\mathbb{R}$ (à trajectoires càdlàg) défini par

$$\ln Z_\rho(x) = \begin{cases} \rho\,\Pi_+(x) - x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -\rho\,\Pi_-\big((-x)-\big) - x, & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\rho > 0$, et Π_+ et Π_- sont deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $1/(e^\rho - 1)$ et $1/(1 - e^{-\rho})$. Nous introduisons également les variables aléatoires

$$\zeta_\rho = \frac{\int_{\mathbb{R}} x\, Z_\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} Z_\rho(x)\,\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \xi_\rho = \operatorname*{argmax}_{x\in\mathbb{R}} Z_\rho(x), \tag{2.2}$$

leurs deuxièmes moments $B_\rho = \mathbf{E}\,\zeta_\rho^2$ et $M_\rho = \mathbf{E}\,\xi_\rho^2$, ainsi que la quantité $E_\rho = B_\rho/M_\rho$.

Le processus Z_ρ apparaît dans divers modèles de rupture en tant que rapport de vraisemblance limite, et les variables ζ_ρ et ξ_ρ en tant que lois limites respectives des EB et de l'EMV. De plus, B_ρ et M_ρ sont les erreurs moyennes quadratiques limites de ces estimateurs et, les EB étant asymptotiquement efficaces, E_ρ est l'efficacité asymptotique relative de l'EMV.

Le modèle principal ayant Z_ρ pour rapport de vraisemblance limite est le modèle d'observations i.i.d. ayant une discontinuité (un saut) dans leur densité. Le premier résultat général sur ce modèle remonte probablement à Chernoff et Rubin [30]. Plus tard, il a été étudié de façon plus approfondie par Ibragimov et Khasminskii dans [65, Chapitre 5] (voir également leurs travaux plus anciens [61] et [62]).

D'autres modèles faisant apparaître le processus Z_ρ sont rencontrés dans la statistique des processus de Poisson non-homogènes (lorsque les fonctions d'intensité sont discontinues). On peut trouver plusieurs exemples de tels modèles dans Kutoyants [73, Chapitre 5] (voir aussi [71]).

Notons enfin que dans tous ces modèles le paramètre ρ est directement lié à la taille du saut.

2.1.2 Processus $Z_{\gamma,f}$

Le deuxième rapport de vraisemblance limite $Z_{\gamma,f}$ est une exponentielle d'un processus de Poisson composé bilatéral. Plus précisément, $Z_{\gamma,f}$ est le processus stochastique sur $\mathbb{R}$

(à trajectoires càdlàg) défini par

$$\ln Z_{\gamma,f}(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\Pi_+(x)} \ln \frac{f(\varepsilon_k^+ + \gamma)}{f(\varepsilon_k^+)}\,, & \text{si } x \geqslant 0, \\ \sum_{k=1}^{\Pi_-\left((-x)-\right)} \ln \frac{f(\varepsilon_k^- - \gamma)}{f(\varepsilon_k^-)}\,, & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $\gamma > 0$, f est une densité strictement positive d'une certaine variable aléatoire ε de moyenne 0 et de variance 1, Π_+ et Π_- sont deux processus de Poisson indépendants d'intensité 1, $\varepsilon_k^\pm$ sont des variables i.i.d. de densité f qui sont également indépendantes de $\Pi_\pm$, et on utilise la convention $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$. Nous introduisons également les variables aléatoires

$$\begin{aligned} \zeta_{\gamma,f} &= \frac{\int_{\mathbb{R}} x\, Z_{\gamma,f}(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} Z_{\gamma,f}(x)\,\mathrm{d}x}\,, \\ \xi^-_{\gamma,f} &= \inf\Big\{z : Z_{\gamma,f}(z) = \max_{x\in\mathbb{R}} Z_{\gamma,f}(x)\Big\}, \\ \xi^+_{\gamma,f} &= \sup\Big\{z : Z_{\gamma,f}(z) = \max_{x\in\mathbb{R}} Z_{\gamma,f}(x)\Big\}, \\ \xi^\alpha_{\gamma,f} &= \alpha\,\xi^-_{\gamma,f} + (1-\alpha)\,\xi^+_{\gamma,f}, \quad \alpha \in [0,1], \end{aligned} \tag{2.4}$$

et les quantités $B_{\gamma,f} = \mathbf{E}\,\zeta^2_{\gamma,f}$, $M^\alpha_{\gamma,f} = \mathbf{E}(\xi^\alpha_{\gamma,f})^2$ et $E^\alpha_{\gamma,f} = B_{\gamma,f}/M^\alpha_{\gamma,f}$.

Un cas particulier important de ce processus est celui où la densité f est gaussienne, c'est-à-dire $\varepsilon \backsim \mathcal{N}(0,1)$. Dans ce cas, nous omettons l'indice f et écrivons Z_γ au lieu de $Z_{\gamma,f}$, ξ^α_γ au lieu de $\xi^\alpha_{\gamma,f}$, *etc.* Notons que comme

$$\ln \frac{f(\varepsilon \pm \gamma)}{f(\varepsilon)} = \mp\gamma\varepsilon - \frac{\gamma^2}{2} \backsim \mathcal{N}(-\gamma^2/2, \gamma^2),$$

le processus Z_γ est symétrique et ces sauts sont gaussiens.

Le processus $Z_{\gamma,f}$ apparaît dans certains modèles de rupture en tant que rapport de vraisemblance limite, et les variables $\zeta_{\gamma,f}$ et $\xi^\alpha_{\gamma,f}$ en tant que lois limites des EB et de l'EMV convenablement choisi. L'EMV n'étant pas unique dans les modèles sous-jacents, le choix convenable ici est la combinaison linéaire avec poids α et $1-\alpha$ de ses valeurs minimale et maximale. De plus, $B_{\gamma,f}$ et $M^\alpha_{\gamma,f}$ sont les erreurs moyennes quadratiques limites de ces estimateurs et, les EB étant asymptotiquement efficaces, $E^\alpha_{\gamma,f}$ est l'efficacité asymptotique relative de l'EMV ainsi choisi.

Les exemples incluent le modèle de régression à deux régimes (two-phase regression model) et le modèle auto-régressif à seuil (threshold autoregressive model).

Le cas linéaire du premier modèle a été étudié dans Koul et Qian [68], tandis que le cas non-linéaire a été considéré dans Ciuperca [33].

En ce qui concerne le modèle auto-régressif à seuil, les premiers résultats ont été obtenus par Chan dans [26], où il a étudié l'estimateur des moindres carrés (qui est, dans le cas gaussien, équivalent à l'EMV). Des études plus récentes et plus approfondies ont été réalisées par de nombreux auteurs (voir, par exemple, [27–29, 31, 32, 88]).

Notons enfin que dans les deux modèles le paramètre γ est directement lié à la taille du saut.

2.1.3 Processus Z_0

Le troisième rapport de vraisemblance limite Z_0 est une exponentielle d'un mouvement brownien bilatéral avec dérive. Plus précisément, Z_0 est le processus stochastique sur $\mathbb{R}$ (à trajectoires continues) défini par

$$Z_0(x) = \exp\Big\{W(x) - \frac{1}{2}\,|x|\Big\}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

où $W = \{W(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ est un mouvement brownien bilatéral standard, c'est-à-dire un processus gaussien à trajectoires continues, de moyenne nulle, de variance $\mathbf{E}\,W^2(x) = |x|$, et dont les accroissements sont indépendants et stationnaires (autrement dit, W et Z_0 sont des cas particuliers respectifs avec $H = 1/2$ du mouvement brownien fractionnaire W^H et du processus Z défini par (1.6)).

Nous introduisons également les variables aléatoires

$$\zeta_0 = \frac{\int_{\mathbb{R}} x\, Z_0(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} Z_0(x)\,\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \xi_0 = \operatorname*{argmax}_{x\in\mathbb{R}} Z_0(x), \tag{2.6}$$

leurs deuxièmes moments $B_0 = \mathbf{E}\,\zeta_0^2$ et $M_0 = \mathbf{E}\,\xi_0^2$, ainsi que la quantité $E_0 = B_0/M_0$. Les rôles joués par ces variables et quantités dans les modèles ayant le processus Z_0 pour rapport de vraisemblance limite sont les mêmes que précédemment.

Les modèles faisant apparaître le processus Z_0 se rencontrent dans de nombreux domaines de la statistique inférentielle. Un exemple bien connu est le modèle d'un signal discontinu dans un bruit blanc gaussien (Ibragimov et Khasminskii [64] et [65, Section 7.2]), mais on peut également en citer d'autres : des modèles de rupture pour des systèmes dynamiques avec un petit bruit (Kutoyants [71] et [72, Chapitre 5]) ainsi que pour des processus de diffusion ergodiques (Kutoyants [74, Chapitre 3]), un modèle de rupture pour les équations différentielles stochastiques à retard (Küchler et Kutoyants [70]), un modèle de rupture de type i.i.d. (Deshayes et Picard [40]), le modèle d'un signal discontinu périodique dans une diffusion non-homogène en temps (Höpfner et Kutoyants [58–60]), un modèle de rupture pour des processus de diffusion à seuil (Kutoyants [75]), *etc.*

Notons également que dans [86], Terent'yev a déterminé la transformée de Laplace de $\mathbf{P}\big(|\xi_0| > t\big)$ et en a déduit la constante $M_0 = 26$. En outre, des expressions explicites de la densité de ξ_0 ont été données dans Bhattacharya et Brockwell [25], Yao [89] et Fujii [51].

En ce qui concerne la constante B_0, dans [65, Chapitre 7.3] Ibragimov et Khasminskii ont montré à l'aide de simulations numériques que $B_0 = 19.5 \pm 0.5$ (et donc $E_0 = 0.73 \pm 0.03$). Plus tard, dans [56], Golubev a exprimé B_0 en fonction de la dérivée seconde (par rapport à un paramètre) d'une intégrale impropre d'une fonction composée des fonctions modifiées de Hankel et de Bessel. Finalement, Rubin et Song ont obtenu dans [80] les valeurs exactes $B_0 = 16\,\zeta(3)$ et $E_0 = 8\,\zeta(3)/13$, où ζ est la fonction zêta de Riemann définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^s.$$

Les variables aléatoires et les quantités d'intérêt statistique correspondantes aux processus Z_ρ et $Z_{\gamma,f}$ sont beaucoup moins étudiées. On peut citer Pflug [77] pour quelques résultats concernant la distribution des variables aléatoires

$$\operatorname*{argmax}_{x\in\mathbb{R}_+} Z_\rho(x) \quad \text{et} \quad \operatorname*{argmax}_{x\in\mathbb{R}_-} Z_\rho(x)$$

liées à ξ_ρ.

2.2 Comportement de Z_ρ lorsque ρ est au voisinage de 0 ou de $+\infty$

Les résultats présentés dans cette section ont fait l'objet d'un article [11], dans lequel, en particulier, un lien entre les rapports de vraisemblance limites Z_ρ et Z_0 a été découvert. Notamment, il a été établi que pour de petites valeurs du paramètre ρ, le premier rapport peut être approché par le second. Plus précisément, il a été montré que lorsque $\rho \to 0$, le processus Z_ρ (après un changement judicieux d'échelle de temps) converge vers le processus Z_0 dans l'espace de Skorohod $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ des fonctions càdlàg sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $\pm\infty$. Il en a été déduit que les variables et les quantités d'intérêt statistique liées au premier rapport (comme, par exemple, ζ_ρ ou B_ρ) peuvent être approchées par celles liées au second. Le comportement de Z_ρ pour de grandes valeurs du paramètre ρ ($\rho \to +\infty$) a également été étudié, et tous les résultats ont été illustrés par des simulations numériques.

2.2.1 Lien entre les rapports de vraisemblance limites Z_ρ et Z_0

Soit $\rho > 0$, et soit le processus stochastique $X_\rho(y) = Z_\rho(y/\rho)$, $y \in \mathbb{R}$, où Z_ρ est défini par (2.1). Notons que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} y\, X_\rho(y)\,\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}} X_\rho(y)\,\mathrm{d}y} = \rho\,\zeta_\rho \quad \text{et} \quad \operatorname*{argmax}_{y\in\mathbb{R}} X_\rho(y) = \rho\,\xi_\rho,$$

où les variables aléatoires ζ_ρ et ξ_ρ sont définies par (2.2). Rappelons également le processus Z_0 défini par (2.5) et les variables aléatoires ζ_0 et ξ_0 définies par (2.6), ainsi que toutes les quantités d'intérêt statistique liées aux variables (2.2) et (2.6).

Le résultat principal de [11] est le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Le processus X_ρ converge faiblement dans l'espace $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ vers le processus Z_0 lorsque $\rho \to 0$. En particulier, les variables aléatoires $\rho\,\zeta_\rho$ et $\rho\,\xi_\rho$ convergent en loi vers les limites respectives ζ_0 et ξ_0. De plus, pour tout $k > 0$, on a*

$$\rho^k\ \mathbf{E}\,\zeta_\rho^k \to \mathbf{E}\,\zeta_0^k \quad \textit{et} \quad \rho^k\ \mathbf{E}\,\xi_\rho^k \to \mathbf{E}\,\xi_0^k.$$

En particulier, $\rho^2 B_\rho \to 16\,\zeta(3)$, $\rho^2 M_\rho \to 26$ et $E_\rho \to 8\,\zeta(3)/13$.

Outre leur intérêt théorique, ces résultats permettent, par exemple, de construire des tests et des intervalles de confiance en se basant sur les lois de ζ_0 et de ξ_0 (plutôt que sur les

lois beaucoup moins connues de ζ_ρ et de ξ_ρ) dans les modèles ayant pour rapport de vraisemblance limite le processus Z_ρ avec ρ petit. De plus, les erreurs moyennes quadratiques limites et l'efficacité asymptotique relative de l'EMV peuvent être approchées comme

$$B_\rho \approx 16\,\zeta(3)\,\rho^{-2}, \quad M_\rho \approx 26\,\rho^{-2} \quad \text{et} \quad E_\rho \approx 8\,\zeta(3)/13$$

dans ces modèles.

Les résultats concernant la variable aléatoire ζ_ρ sont une conséquence directe du Théorème 1.10.2 de Ibragimov et Khasminskii [65] et des trois lemmes suivants.

Lemme 2.2. *Les distributions fini-dimensionnelles de X_ρ convergent vers celles de Z_0 lorsque $\rho \to 0$.*

Lemme 2.3. *Pour tout $\rho > 0$ et tous $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathbf{E}\left|X_\rho^{1/2}(y_1) - X_\rho^{1/2}(y_2)\right|^2 \leqslant \frac{1}{4}\left|y_1 - y_2\right|.$$

Lemme 2.4. *Pour tout $c \in \left]\,0\,,\,1/8\,\right[$, on a*

$$\mathbf{E}\,X_\rho^{1/2}(y) \leqslant \exp\bigl(-c\,|y|\bigr)$$

pour tout ρ suffisamment petit et tout $y \in \mathbb{R}$.

Notons que ces lemmes ne sont pas suffisants pour établir la convergence faible du processus X_ρ dans l'espace $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ et les résultats concernant la variable aléatoire ξ_ρ. Cependant, les accroissements du processus $\ln X_\rho$ étant indépendants, la convergence de ses restrictions (et donc de celles de X_ρ) sur tout intervalle fini $[A, B] \subset \mathbb{R}$ $\bigl($c'est-à-dire la convergence dans l'espace de Skorohod $\mathcal{D}(A, B)$ des fonctions càdlàg sur $[A, B]\bigr)$ découle du Théorème 6.5.5 de Gihman et Skorohod [54], du Lemme 2.2 et du lemme suivant.

Lemme 2.5. *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\lim_{h\to 0}\,\lim_{\rho\to 0}\,\sup_{|y_1-y_2|<h} \mathbf{P}\Bigl\{\bigl|\ln X_\rho(y_1) - \ln X_\rho(y_2)\bigr| > \varepsilon\Bigr\} = 0.$$

Maintenant, le Théorème 2.1 se déduit de l'estimation suivante des queues du processus X_ρ par un argument classique $\bigl($voir, par exemple, Ibragimov et Khasminskii [65]$\bigr)$.

Lemme 2.6. *Pour tout $b \in \left]\,0\,,\,3/40\,\right[$, on a*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{|y|>A} X_\rho(y) > e^{-bA}\right\} \leqslant 4\,e^{-bA}$$

pour tout ρ suffisamment petit et tout $A > 0$.

2.2.2 Comportement de Z_ρ pour de grandes valeurs de ρ

Lorsque $\rho \to +\infty$, le processus Z_ρ converge faiblement dans l'espace $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ vers le processus $Z_\infty(x) = e^{-x}\,\mathbb{1}_{\{x\geqslant\eta\}}$, $x \in \mathbb{R}$, où η est une variable aléatoire exponentielle négative de

paramètre 1 $\big($c'est-à-dire $\mathbf{P}\{\eta < t\} = e^t$ pour tout $t \leqslant 0\big)$. Ainsi, les variables aléatoires ζ_ρ et ξ_ρ convergent en loi vers les limites respectives

$$\zeta_\infty = \frac{\int_{\mathbb{R}} x\, Z_\infty(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} Z_\infty(x)\,\mathrm{d}x} = \eta + 1 \quad \text{et} \quad \xi_\infty = \operatorname*{argmax}_{x\in\mathbb{R}} Z_\infty(x) = \eta.$$

De plus, pour tout $k > 0$, on a

$$\mathbf{E}\,\zeta_\rho^k \to \mathbf{E}\,\zeta_\infty^k \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\,\xi_\rho^k \to \mathbf{E}\,\xi_\infty^k.$$

En particulier, en posant $B_\infty = \mathbf{E}\,\zeta_\infty^2$, $M_\infty = \mathbf{E}\,\xi_\infty^2$ et $E_\infty = B_\infty/M_\infty$, nous obtenons $B_\rho \to B_\infty = \mathbf{E}(\eta+1)^2 = 1$, $M_\rho \to M_\infty = \mathbf{E}\,\eta^2 = 2$ et $E_\rho \to E_\infty = 1/2$.

Notons que ces convergences sont naturelles, car le processus Z_∞ peut être vu comme un cas particulier du processus Z_ρ avec $\rho = +\infty$ en admettant la convention $+\infty \times 0 = 0$.

2.2.3 Simulations numériques

Nous avons également réalisé dans [11] des simulations numériques de B_ρ, M_ρ et E_ρ pour $\rho \in \,]0,\infty[$, afin d'illustrer les comportements asymptotiques

$$B_\rho \sim B_0\,\rho^{-2}, \quad M_\rho \sim M_0\,\rho^{-2} \quad \text{et} \quad E_\rho \to E_0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \to 0,$$

où $B_0 = 16\,\zeta(3) \approx 19.2329$, $M_0 = 26$ et $E_0 = 8\,\zeta(3)/13 \approx 0.7397$, et

$$B_\rho \to B_\infty = 1, \quad M_\rho \to M_\infty = 2 \quad \text{et} \quad E_\rho \to E_\infty = 0.5 \quad \text{lorsque} \quad \rho \to +\infty.$$

Pour cela, nous avons simulé 10^7 trajectoires de Z_ρ (pour chaque valeur de ρ) et nous avons approché B_ρ et M_ρ par les deuxièmes moments empiriques de ζ_ρ et de ξ_ρ.

Le comportement asymptotique en 0 des erreurs moyennes quadratiques limites B_ρ et M_ρ peut être observé dans la Figure 3, où nous avons également tracé les fonctions $\rho^2 B_\rho$ et $\rho^2 M_\rho$ faisant apparaître les constantes $B_0 \approx 19.2329$ et $M_0 = 26$.

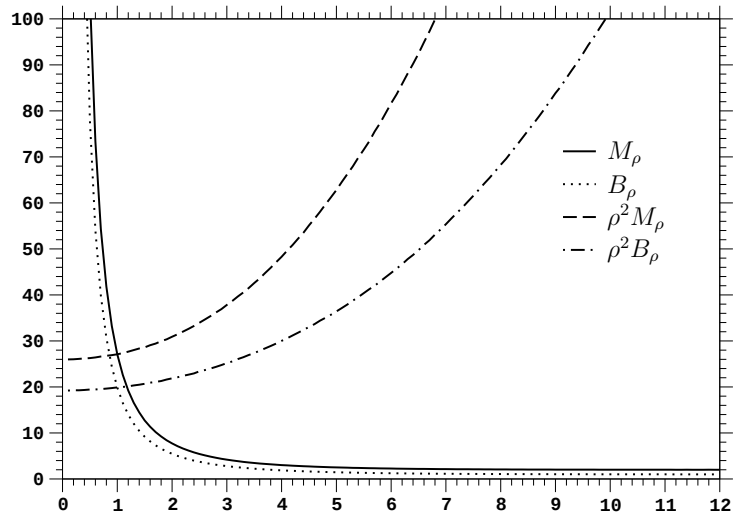


FIGURE 3 – Comportement de B_ρ et de M_ρ en 0.

Dans la Figure 4, une échelle différente est utilisée pour l'axe des ordonnées afin de mieux illustrer le comportement asymptotique en $+\infty$ des erreurs moyennes quadratiques limites B_ρ et M_ρ, ainsi que le comportement asymptotique en 0 et en $+\infty$ de E_ρ. Notons que la fonction E_ρ semble être décroissante, ce qui permet de conjecturer que l'efficacité asymptotique relative de l'EMV augmente lorsque ρ diminue, en restant toujours comprise entre $E_\infty = 0.5$ et $E_0 \approx 0.7397$.

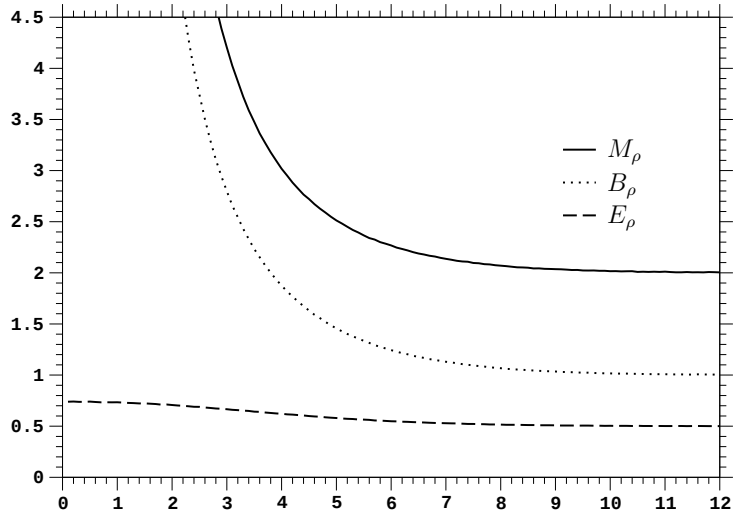


FIGURE 4 – Comportement de B_ρ et de M_ρ en $+\infty$, ainsi que celui de E_ρ en 0 et en $+\infty$.

2.3 Comportement de $Z_{\gamma,f}$ lorsque γ est au voisinage de 0 ou de $+\infty$

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus en collaboration avec Ilia Negri (Université des Études de Bergame) et ont fait l'objet d'un article [13] et d'un acte de congrès [17]. Notamment, nous avons montré que pour de petites valeurs du paramètre γ, le rapport de vraisemblance limite $Z_{\gamma,f}$ (tout comme Z_ρ) peut être approché par la limite brownienne Z_0. Plus précisément, nous avons établi que lorsque $\gamma \to 0$, le processus $Z_{\gamma,f}$ (après un changement judicieux d'échelle de temps) converge vers le processus Z_0 dans l'espace $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$. Ce résultat nous a permis de faire des déductions similaires à celles de [11]. Enfin, nous avons également étudié le comportement de $Z_{\gamma,f}$ pour de grandes valeurs du paramètre γ ($\gamma \to \infty$) et illustré tous les résultats par des simulations numériques.

2.3.1 Lien entre les rapports de vraisemblance limites $Z_{\gamma,f}$ et Z_0

Soit $\gamma > 0$, et soit f une densité strictement positive d'une certaine variable aléatoire ε de moyenne 0 et de variance 1.

Nous supposons dans la suite que la condition de régularité suivante est satisfaite.

($\mathcal{R}$) *La fonction* $\sqrt{f}$ *est continûment dérivable en* L^2, *c'est-à-dire il existe* $\psi \in L^2$ *telle que* $\int_{\mathbb{R}} \bigl(\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)} - h\,\psi(x)\bigr)^2 \,\mathrm{d}x = o(h^2)$ *et* $\int_{\mathbb{R}} \bigl(\psi(x+h) - \psi(x)\bigr)^2 \,\mathrm{d}x = o(1)$. *De plus,* $\|\psi\| > 0$.

Notons que sous cette condition, le modèle d'observations i.i.d. de densité $f(x+\theta)$ est, en particulier, LAN en $\theta = 0$ avec l'information de Fisher $I = 4\,\|\psi\|^2 = 4\int_{\mathbb{R}} \psi^2(x)\,\mathrm{d}x$ (voir, par exemple, [65, Chapitre 2.1]). Par conséquent, en utilisant les fonctions caractéristiques, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \Bigl(\mathbf{E}\, e^{it \ln \frac{f(\varepsilon+u/\sqrt{n})}{f(\varepsilon)}}\Bigr)^n = e^{i\left(-\frac{Iu^2}{2}\right)t - \frac{1}{2}Iu^2t^2}$$

et, plus généralement,

$$\lim_{\gamma\to 0} \Bigl(\mathbf{E}\, e^{it \ln \frac{f(\varepsilon+\gamma)}{f(\varepsilon)}}\Bigr)^{1/\gamma^2} = e^{i\left(-\frac{I}{2}\right)t - \frac{1}{2}It^2} \tag{2.7}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Notons également que seule la convergence (2.7) est nécessaire dans nos considérations. Ainsi, on peut remplacer la condition ($\mathcal{R}$) par (2.7) ou par toute autre condition impliquant (2.7), comme, par exemple, la conditions de Hájek : f est dérivable et l'information de Fisher $I = \int_{\mathbb{R}} f^{-1}(x)\,\bigl(f'(x)\bigr)^2 \,\mathrm{d}x$ est finie et strictement positive.

Notons finalement que dans le cas gaussien, la condition de régularité est clairement remplie et nous avons $I = 1$.

Nous introduisons maintenant le processus stochastique $X_{\gamma,f}(y) = Z_{\gamma,f}(y/I\gamma^2)$, $y \in \mathbb{R}$, où $Z_{\gamma,f}$ est défini par (2.3). Notons que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} y\, X_{\gamma,f}(y)\,\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}} X_{\gamma,f}(y)\,\mathrm{d}y} = I\gamma^2 \zeta_{\gamma,f}\,,$$
$$\inf\Bigl\{z : X_{\gamma,f}(z) = \max_{y\in\mathbb{R}} X_{\gamma,f}(y)\Bigr\} = I\gamma^2 \xi^-_{\gamma,f}$$

et

$$\sup\Bigl\{z : X_{\gamma,f}(z) = \max_{y\in\mathbb{R}} X_{\gamma,f}(y)\Bigr\} = I\gamma^2 \xi^+_{\gamma,f},$$

où les variables aléatoires $\zeta_{\gamma,f}$ et $\xi^{\pm}_{\gamma,f}$ sont définies par (2.4). Rappelons également le processus Z_0 défini par (2.5) et les variables aléatoires ζ_0 et ξ_0 définies par (2.6), ainsi que toutes les quantités d'intérêt statistique liées aux variables (2.4) et (2.6).

Le résultat principal de [13] est le théorème suivant.

Théorème 2.7. *Le processus* $X_{\gamma,f}$ *converge faiblement dans l'espace* $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ *vers le processus* Z_0 *lorsque* $\gamma \to 0$. *En particulier, la variable aléatoire* $I\gamma^2\zeta_{\gamma,f}$ *converge en loi vers la variable aléatoire* ζ_0 *et, pour tout* $\alpha \in [0,1]$, *la variable aléatoire* $I\gamma^2\xi^\alpha_{\gamma,f}$ *converge en loi vers la variable aléatoire* ξ_0. *De plus, pour tout* $k > 0$, *on a*

$$I^k\gamma^{2k}\ \mathbf{E}\,\zeta^k_{\gamma,f} \to \mathbf{E}\,\zeta^k_0 \quad \textit{et} \quad I^k\gamma^{2k}\ \mathbf{E}(\xi^\alpha_{\gamma,f})^k \to \mathbf{E}\,\xi^k_0.$$

En particulier, $I^2\gamma^4 B_{\gamma,f} \to 16\,\zeta(3)$, $I^2\gamma^4 M^\alpha_{\gamma,f} \to 26$ *et* $E^\alpha_{\gamma,f} \to 8\,\zeta(3)/13$.

Outre leur intérêt théorique, ces résultats permettent, par exemple, de construire des tests et des intervalles de confiance en se basant sur les lois de ζ_0 et de ξ_0 (plutôt que sur les lois de $\zeta_{\gamma,f}$ et de $\xi^\alpha_{\gamma,f}$, qui dépendent de la densité f et ne sont pas connues explicitement) dans les modèles ayant pour rapport de vraisemblance limite le processus $Z_{\gamma,f}$ avec γ petit. De plus, les erreurs moyennes quadratiques limites et l'efficacité asymptotique relative de l'EMV (convenablement choisi) peuvent être approchées comme

$$B_{\gamma,f} \approx 16\,\zeta(3)\,I^{-2}\,\gamma^{-4}\,, \quad M^\alpha_{\gamma,f} \approx 26\,I^{-2}\,\gamma^{-4} \quad \text{et} \quad E^\alpha_{\gamma,f} \approx 8\,\zeta(3)/13$$

dans ces modèles.

La démonstration du Théorème 2.7 suit le schéma utilisé dans la section précédente et fait intervenir cinq lemmes en tout point similaires aux Lemmes 2.2–2.6. Cependant, les preuves de ces lemmes nécessitent des techniques sensiblement différentes.

2.3.2 Comportement de $Z_{\gamma,f}$ pour de grandes valeurs de γ

Lorsque $\gamma \to +\infty$, le processus $Z_{\gamma,f}$ converge faiblement dans l'espace $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ vers le processus $Z_\infty(x) = \mathbb{1}_{\{-\eta \leqslant x < \tau\}}$, $x \in \mathbb{R}$, où η et τ sont deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre 1. Ainsi, les variables aléatoires $\zeta_{\gamma,f}$, $\xi^-_{\gamma,f}$, $\xi^+_{\gamma,f}$ et $\xi^\alpha_{\gamma,f}$ convergent en loi vers les limites respectives

$$\begin{aligned}
\zeta_\infty &= \frac{\int_{\mathbb{R}} x\,Z_\infty(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} Z_\infty(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\tau-\eta}{2}\,,\\
\xi^-_\infty &= \inf\Big\{z : Z_\infty(z) = \max_{x\in\mathbb{R}} Z_\infty(x)\Big\} = -\eta,\\
\xi^+_\infty &= \sup\Big\{z : Z_\infty(z) = \max_{x\in\mathbb{R}} Z_\infty(x)\Big\} = \tau
\end{aligned}$$

et

$$\xi^\alpha_\infty = \alpha\,\xi^-_\infty + (1-\alpha)\,\xi^+_\infty = (1-\alpha)\,\tau - \alpha\,\eta.$$

De plus, pour tout $k > 0$, on a

$$\mathbf{E}\,\zeta^k_{\gamma,f} \to \mathbf{E}\,\zeta^k_\infty \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\xi^\alpha_{\gamma,f})^k \to \mathbf{E}(\xi^\alpha_\infty)^k.$$

En particulier, en posant $B_\infty = \mathbf{E}\,\zeta^2_\infty$, $M^\alpha_\infty = \mathbf{E}(\xi^\alpha_\infty)^2$ et $E^\alpha_\infty = B_\infty/M^\alpha_\infty$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
B_{\gamma,f} &\to B_\infty = \mathbf{E}\Big(\frac{\tau-\eta}{2}\Big)^2 = \frac{1}{2}\,,\\
M^\alpha_{\gamma,f} &\to M^\alpha_\infty = \mathbf{E}\big((1-\alpha)\,\tau - \alpha\,\eta\big)^2 = 6\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

et

$$E^\alpha_{\gamma,f} \to E^\alpha_\infty = \frac{1}{12\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}\,. \tag{2.9}$$

Notons que ces convergences sont naturelles, car le processus Z_∞ peut être vu comme un cas particulier du processus $Z_{\gamma,f}$ avec $\gamma = +\infty$ en admettant les conventions habituelles.

Finalement, notons que les formules (2.8) et (2.9) impliquent clairement que dans tout modèle ayant pour rapport de vraisemblance limite le processus Z_∞, le meilleur choix de l'EMV correspond à $\alpha = 1/2$ (l'EMV ainsi choisi est même asymptotiquement efficace). Ce choix a également été suggéré pour le modèle auto-régressif à seuil (qui a pour rapport de vraisemblance limite le processus $Z_{\gamma,f}$) par Chan et Kutoyants dans [27,28]. Au vu de nos résultats asymptotiques, cette suggestion semble justifiée lorsque γ est grand. Cependant, nous constatons que lorsque γ est petit, le choix de α n'a plus beaucoup d'importance, car les limites dans le Théorème 2.7 ne dépendent pas de α.

2.3.3 Simulations numériques

Nous avons également réalisé dans [13] des simulations numériques (dans le cas gaussien) de B_γ, M_γ^α et E_γ^α pour $\gamma \in]0,\infty[$, afin d'illustrer les comportements asymptotiques

$$B_\gamma \sim B_0\,\gamma^{-4}, \quad M_\gamma^\alpha \sim M_0\,\gamma^{-4} \quad \text{et} \quad E_\gamma^\alpha \to E_0 \quad \text{lorsque} \quad \gamma \to 0,$$

où $B_0 = 16\,\zeta(3) \approx 19.2329$, $M_0 = 26$ et $E_0 = 8\,\zeta(3)/13 \approx 0.7397$, et

$$B_\gamma \to B_\infty, \quad M_\gamma^\alpha \to M_\infty^\alpha \quad \text{et} \quad E_\gamma^\alpha \to E_\infty^\alpha \quad \text{lorsque} \quad \gamma \to \infty,$$

où $B_\infty = 0.5$, $M_\infty^\alpha = 6\,(\alpha - 0.5)^2 + 0.5$ et $E_\infty^\alpha = 1/\big(12\,(\alpha - 0.5)^2 + 1\big)$.

Pour cela, nous avons simulé 10^7 trajectoires de Z_γ (pour chaque valeur de γ) et nous avons approché B_γ et M_γ^α (avec $\alpha = 1/2$, $1/4$ et 0) par les deuxièmes moments empiriques de ζ_γ et de ξ_γ^α.

Le comportement asymptotique en 0 des erreurs moyennes quadratiques limites B_γ et M_γ^α peut être observé dans la Figure 5, où nous avons plutôt tracé les fonctions $\gamma^4 B_\gamma$ et $\gamma^4 M_\gamma^\alpha$ faisant apparaître les constantes $B_0 \approx 19.2329$ et $M_0 = 26$. On peut constater que le choix $\alpha = 1/2$ est le meilleur, même si sa supériorité s'estompe à mesure que γ s'approche de 0 et semble négligeable pour $\gamma < 1$.

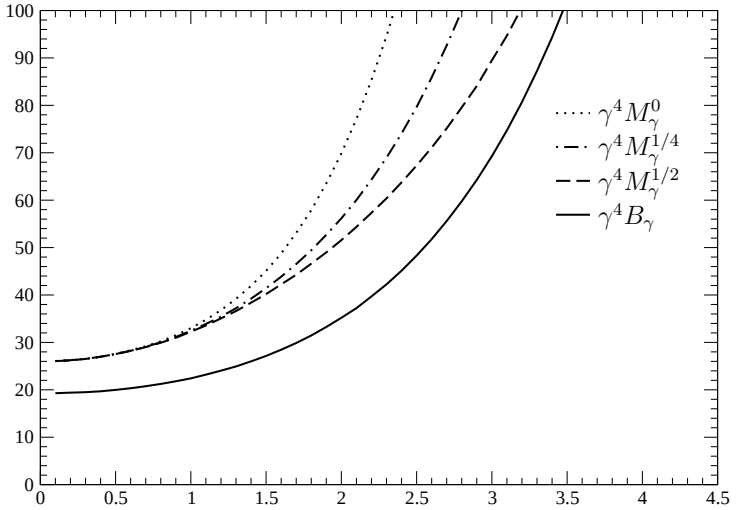


FIGURE 5 – Comportement de B_γ et de M_γ^α en 0.

La Figure 6 illustre le comportement asymptotique en $+\infty$ des erreurs moyennes quadratiques limites B_γ et M_γ^α. Ici, la supériorité du choix $\alpha = 1/2$ est évidente. De plus, on peut constater que pour $\gamma > 5$, ce choix rend négligeable la perte d'efficacité résultant de l'utilisation de l'EMV à la place des estimateurs asymptotiquement efficaces bayésiens.

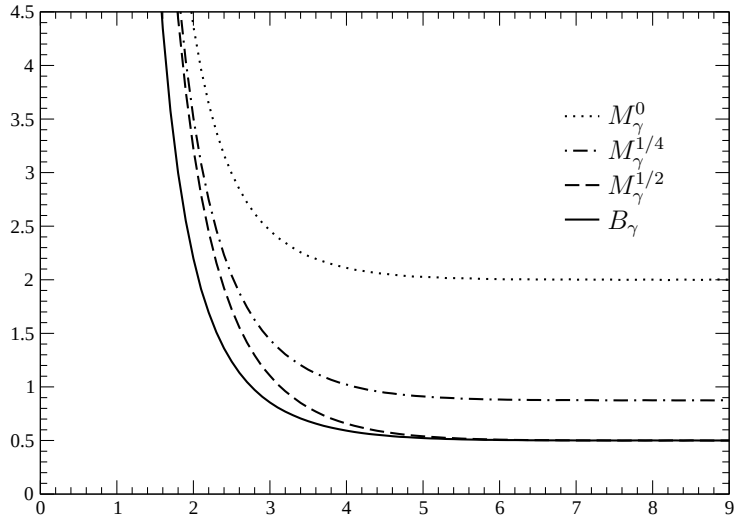


FIGURE 6 – Comportement de B_γ et de M_γ^α en $+\infty$.

Enfin, la Figure 7 illustre le comportement asymptotique en 0 et en $+\infty$ de E_γ^α.

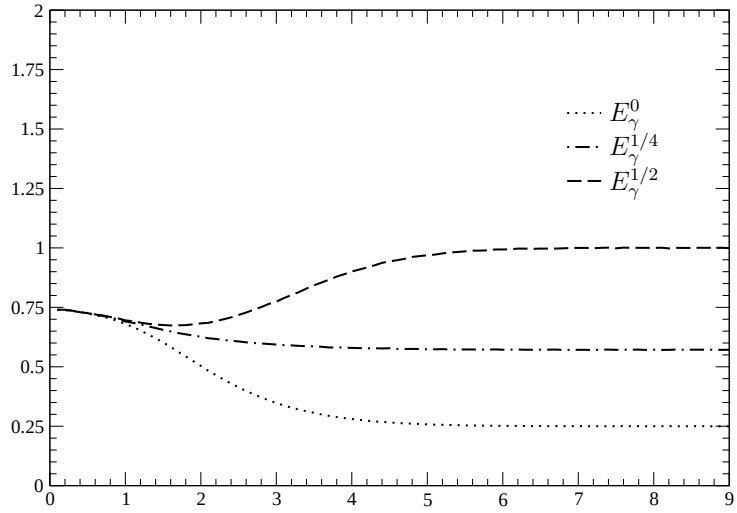


FIGURE 7 – Comportement de E_γ^α en 0 et en $+\infty$.

Chapitre 3

Gibbsianité des champs aléatoires

Dans ce chapitre nous présentons les résultats principaux de l'article [9]. Quelques résultats nécessaires, obtenus dans les articles [3, 6], sont également rappelés dans la Section 3.2.1. L'ensemble de ces travaux a été réalisé en collaboration avec Boris Nahapetian (Académie des Sciences de la République d'Arménie).

3.1 Champs aléatoires

Nous considérons les champs aléatoires sur le réseau entier ν-dimensionnel $\mathbb{Z}^\nu$ (ou, plus généralement, sur un ensemble dénombrable $\mathbb{L}$ de *sites*), c'est-à-dire les mesures de probabilité $\mathbf{P}$ sur $\left(\mathscr{X}^{\mathbb{Z}^\nu}, \mathscr{F}^{\mathbb{Z}^\nu}\right)$, où $(\mathscr{X}, \mathscr{F})$ est un espace mesurable de valeurs du champ sur un seul site (dit *espace d'états*). Habituellement, l'espace $\mathscr{X}$ est supposé être muni d'une topologie $\mathscr{T}$, et $\mathscr{F}$ est supposée être la tribu borélienne engendrée par cette topologie. Ici, nous nous concentrons sur le cas où $\mathscr{X}$ est fini, $\mathscr{T}$ est la topologie discrète, et $\mathscr{F}$ est la tribu totale, c'est-à-dire $\mathscr{F} = \mathscr{T} = \mathrm{part}(\mathscr{X})$.

Pour tout $S \subset \mathbb{Z}^\nu$, nous notons $\mathscr{E}(S)$ l'ensemble des parties finies de S, c'est-à-dire nous posons $\mathscr{E}(S) = \left\{\Lambda \subset S \,:\, |\Lambda| < \infty\right\}$, où $|\Lambda|$ désigne le nombre de sites dans le *volume* Λ ou, autrement dit, le cardinal de l'ensemble Λ. Pour simplifier les notations, nous omettrons souvent les accolades pour les ensembles uniponctuels : nous écrirons, par exemple, t au lieu de $\{t\}$. Nous posons également $\mathscr{E}^*(S) = \mathscr{E}(S)\backslash\{\emptyset\}$. Pour $S = \mathbb{Z}^\nu$, nous écrirons simplement $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbb{Z}^\nu)$ et $\mathscr{E}^* = \mathscr{E}^*(\mathbb{Z}^\nu)$.

Pour tout $S \subset \mathbb{Z}^\nu$, l'espace $\mathscr{X}^S$ est l'espace de toutes les *configurations* sur S (ou dans le volume S). Si $S = \emptyset$, nous admettons que l'espace $\mathscr{X}^\emptyset = \{\boldsymbol{\phi}\}$, où $\boldsymbol{\phi}$ est la configuration "vide". Pour tous $T, S \subset \mathbb{Z}^\nu$ tels que $T \subset S$ et toute configuration $\boldsymbol{x} = \{x_t,\ t \in S\}$ sur S, nous notons $\boldsymbol{x}_T$ la *sous-configuration* (*restriction*) de $\boldsymbol{x}$ sur T définie par $\boldsymbol{x}_T = \{x_t,\ t \in T\}$. Pour tous $T, S \subset \mathbb{Z}^\nu$ tels que $T \cap S = \emptyset$ et toutes configurations $\boldsymbol{x}$ sur T et $\boldsymbol{y}$ sur S, nous notons $\boldsymbol{xy}$ la *concaténation* de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$, c'est-à-dire la configuration sur $T \cup S$ égale à $\boldsymbol{x}$ sur T et à $\boldsymbol{y}$ sur S $\big($autrement dit, telle que $(\boldsymbol{xy})_T = \boldsymbol{x}$ et $(\boldsymbol{xy})_S = \boldsymbol{y}\big)$. Pour toute configuration $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^S$, l'ensemble $S \subset \mathbb{Z}^\nu$ est appelé *support* de $\boldsymbol{x}$ et nous écrivons $S = \mathfrak{S}(\boldsymbol{x})$. Pour tout $\Lambda \in \mathscr{E}$, nous notons

$$\widetilde{\mathscr{X}^\Lambda} = \bigcup_{\tilde{\Lambda} \in \mathscr{E}^*(\Lambda^c)} \mathscr{X}^{\tilde{\Lambda}}$$

l'espace de toutes les configurations ayant un support fini non-vide inclus dans l'*extérieur* de Λ, c'est-à-dire dans $\Lambda^{\mathrm{c}} = \mathbb{Z}^\nu \backslash \Lambda$.

Pour $S \subset \mathbb{Z}^\nu$, une distribution de probabilité sur $\mathscr{X}^S$ sera notée $\mathbf{P}_S$. Notons que si $S = \phi$, il n'existe qu'une seule distribution possible $\mathbf{P}_\phi(\boldsymbol{\phi}) = 1$. Pour tous $T, S \subset \mathbb{Z}^\nu$ tels que $T \subset S$ et toute distribution $\mathbf{P}_S$, nous notons $\big(\mathbf{P}_S\big)_T$ la *distribution marginale* (*projection*) de $\mathbf{P}_S$ sur T. Si $\Lambda \in \mathscr{E}$ et $I \subset \Lambda$, on peut écrire $\mathbf{P}_\Lambda = \big\{\mathbf{P}_\Lambda(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^\Lambda\big\}$ et

$$\big(\mathbf{P}_\Lambda\big)_I(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathscr{X}^{\Lambda \setminus I}} \mathbf{P}_\Lambda(\boldsymbol{xy}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^I.$$

Un champ aléatoire $\mathbf{P}$ sur $\mathbb{Z}^\nu$ est déterminé de façon unique par (et peut donc être identifié avec) le système $\{\mathbf{P}_\Lambda,\ \Lambda \in \mathscr{E}\}$ de ses *distributions fini-dimensionnelles* qui est cohérent au sens de (consistent in the sense of) Kolmogorov : pour tout $\Lambda \in \mathscr{E}$ et tout $I \subset \Lambda$, on a $\big(\mathbf{P}_\Lambda\big)_I = \mathbf{P}_I$.

Enfin, un champ aléatoire $\mathbf{P}$ est dit *strictement positif* si pour tout $\Lambda \in \mathscr{E}$, la distribution fini-dimensionnelle $\mathbf{P}_\Lambda$ est *strictement positive*, c'est-à-dire $\mathbf{P}_\Lambda(\boldsymbol{x}) > 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^\Lambda$. L'ensemble des champs aléatoires strictement positifs est noté $\mathscr{P}$.

3.1.1 Distributions fini-conditionnelles et conditionnelles

Soit $\mathbf{P}$ un champ aléatoire. Pour tout $\Lambda \in \mathscr{E}$, nous notons $\mathbf{P}_{\mathscr{E}^*(\Lambda^{\mathrm{c}})}$ la mesure (σ-finie) sur $\widetilde{\mathscr{X}^\Lambda}$, dont la restriction sur $\mathscr{X}^{\tilde\Lambda}$ est $\mathbf{P}_{\tilde\Lambda}$ pour tout $\tilde\Lambda \in \mathscr{E}^*(\Lambda^{\mathrm{c}})$. Autrement dit, $\mathbf{P}_{\mathscr{E}^*(\Lambda^{\mathrm{c}})}$ est la somme directe des mesures $\mathbf{P}_{\tilde\Lambda}$.

Pour tout $\Lambda \in \mathscr{E}$, les rapports

$$\boldsymbol{q}_\Lambda^{\tilde{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{P}_{\Lambda \cup \mathfrak{S}(\tilde{\boldsymbol{x}})}(\boldsymbol{x}\tilde{\boldsymbol{x}})}{\mathbf{P}_{\mathfrak{S}(\tilde{\boldsymbol{x}})}(\tilde{\boldsymbol{x}})}\ , \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^\Lambda,$$

existent (ont des dénominateurs non-nuls) pour $\mathbf{P}_{\mathscr{E}^*(\Lambda^{\mathrm{c}})}$-presque tout $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathscr{X}^\Lambda}$. Tout système

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} = \Big\{\mathbf{Q}_\Lambda^{\tilde{\boldsymbol{x}}}, \quad \Lambda \in \mathscr{E} \text{ et } \tilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathscr{X}^\Lambda}\Big\}$$

de distributions de probabilité tel que pour tout $\Lambda \in \mathscr{E}$ on a $\mathbf{Q}_\Lambda^{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{q}_\Lambda^{\tilde{\boldsymbol{x}}}$ pour $\mathbf{P}_{\mathscr{E}^*(\Lambda^{\mathrm{c}})}$-presque tout $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathscr{X}^\Lambda}$ est dit être une *distribution fini-conditionnelle* du champ aléatoire $\mathbf{P}$. Autrement dit, une distribution fini-conditionnelle du champ aléatoire $\mathbf{P}$ est l'ensemble des rapports $\boldsymbol{q}_\Lambda^{\tilde{\boldsymbol{x}}}$ existants complété par des distributions quelconques pour les $\tilde{\boldsymbol{x}}$ pour lesquelles ces rapports n'existent pas. Le sous-système de $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}$ constitué des distributions uniponctuelles $\big(|\Lambda| = 1\big)$ est dit être une *distribution fini-conditionnelle uniponctuelle* de $\mathbf{P}$. Notons qu'en général, un champ aléatoire admet plusieurs *versions* de la distribution fini-conditionnelle ainsi que de la distribution fini-conditionnelle uniponctuelle. Toutefois, pour un champ aléatoire strictement positif, ces distributions sont déterminées de façon unique et sont strictement positives (constituées d'éléments strictement positifs). Notons également qu'il n'est pas difficile de vérifier que si un champ aléatoire $\mathbf{P}$ admet une version strictement positive de la distribution fini-conditionnelle (ou même de la distribution fini-conditionnelle uniponctuelle), alors $\mathbf{P}$ est nécessairement strictement positif lui-même.

En outre, pour tout $\Lambda \in \mathscr{E}$, les limites

$$\boldsymbol{q}_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\tilde{\Lambda} \uparrow \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda} \boldsymbol{q}_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}_{\tilde{\Lambda}}}(\boldsymbol{x}) \ , \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^\Lambda,$$

existent pour $\mathbf{P}_{\Lambda^c}$-presque tout $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{\Lambda^c}$. Tout système

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \left\{ \mathbf{Q}_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}}, \quad \Lambda \in \mathscr{E} \text{ et } \overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{\Lambda^c} \right\}$$

de distributions de probabilité tel que pour tout $\Lambda \in \mathscr{E}$ on a $\mathbf{Q}_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{q}_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}}$ pour $\mathbf{P}_{\Lambda^c}$-presque tout $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{\Lambda^c}$ est dit être une *distribution conditionnelle* du champ aléatoire $\mathbf{P}$. Le sous-système de $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ constitué des distributions uniponctuelles est dit être une *distribution conditionnelle uniponctuelle* de $\mathbf{P}$. Notons qu'en général, un champ aléatoire $\mathbf{P}$ admet plusieurs *versions* de la distribution conditionnelle ainsi que de la distribution conditionnelle uniponctuelle (même si $\mathbf{P}$ est strictement positif). Notons également que si un champ aléatoire $\mathbf{P}$ admet une version strictement positive de la distribution conditionnelle (ou même de la distribution conditionnelle uniponctuelle), alors $\mathbf{P}$ est nécessairement strictement positif lui-même. Pour le cas de la distribution conditionnelle ce fait est bien connu, alors que le cas de la distribution conditionnelle uniponctuelle est l'objet de la Proposition 3.7 ci-dessous.

Pour conclure cette section, soulignons que la distribution fini-conditionnelle (resp. fini-conditionnelle uniponctuelle) d'un champ aléatoire contient plus d'informations sur le champ aléatoire que sa distribution conditionnelle (resp. conditionnelle uniponctuelle). En effet, si la dernière peut clairement être déduite de la première (par passage à la limite), l'inverse n'est pas aussi évident et n'est même pas vrai en général. En effet, dans le cas strictement positif, la distribution fini-conditionnelle (resp. fini-conditionnelle uniponctuelle) détermine le champ aléatoire de façon unique (voir la Section 3.2.2), tandis que la distribution conditionnelle (resp. conditionnelle uniponctuelle) ne le fait pas toujours (transitions de phase).

Tout cela devient particulièrement clair dans le cas markovien, quand la distribution conditionnelle (resp. conditionnelle uniponctuelle) peut être vue comme un sous-système de la distribution fini-conditionnelle (resp. fini-conditionnelle uniponctuelle). En effet, soit $\mathbf{P}$ un champ de Markov, c'est-à-dire pour tout $\Lambda \in \mathscr{E}$ et tout $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{\Lambda^c}$, on a $\mathbf{Q}_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}} = \mathbf{Q}_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}_{\partial\Lambda}}$, où $\partial\Lambda$ désigne le voisinage de Λ. La dernière égalité montre que les éléments de la distribution conditionnelle (resp. conditionnelle uniponctuelle) de $\mathbf{P}$ peuvent être considérés comme des éléments de la distribution fini-conditionnelle (resp. fini-conditionnelle uniponctuelle) de $\mathbf{P}$. Cependant, tous les éléments de la dernière ne correspondent pas aux éléments de la première : seuls les éléments $\mathbf{Q}_\Lambda^{\tilde{\boldsymbol{x}}}$ tels que $\mathfrak{S}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \supset \partial\Lambda$ possèdent cette propriété.

3.1.2 Description des champs aléatoires par leurs distributions conditionnelles

La théorie des champs aléatoires a été formalisée par Dobrushin dans [41–43], où il a établi la description des champs par leurs distributions conditionnelles. Plus précisément, les champs aléatoires sont décrits par des *spécifications*, c'est-à-dire par des systèmes

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \left\{ \mathbf{Q}_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}}, \quad \Lambda \in \mathscr{E} \text{ et } \overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{\Lambda^c} \right\}$$

de distributions de probabilité tels que

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}_{\Lambda}^{\overline{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) = \big(\mathbf{Q}_{\Lambda}^{\overline{\boldsymbol{x}}}\big)_{\Lambda\setminus I}(\boldsymbol{x})\ \mathbf{Q}_{I}^{\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) \\ \text{pour tous } \ \Lambda\in\mathscr{E},\ \ I\subset\Lambda,\ \ \boldsymbol{x}\in\mathscr{X}^{\Lambda\setminus I},\ \ \boldsymbol{y}\in\mathscr{X}^{I}\ \ \text{et}\ \ \overline{\boldsymbol{x}}\in\mathscr{X}^{\Lambda^{\mathrm{c}}}.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Notons que toutes les versions de la distribution conditionnelle d'un champ aléatoire $\mathbf{P}$ satisfont la modification de (3.1) où $\mathbf{P}_{\Lambda^{\mathrm{c}}}$-presque toutes (et non nécessairement toutes) les configurations $\overline{\boldsymbol{x}}\in\mathscr{X}^{\Lambda^{\mathrm{c}}}$ sont considérées. De plus, tout champ aléatoire admet au moins une version de la distribution conditionnelle qui est une spécification (voir Goldstein [55], Preston [79] et Sokal [82]).

L'un des objectifs principaux de la théorie de Dobrushin est d'étudier l'ensemble des champs aléatoires *compatibles* avec une spécification donnée, c'est-à-dire admettant cette spécification comme une version de la distribution conditionnelle. Les conditions les plus connues suffisantes pour l'existence et pour l'unicité d'un champ aléatoire compatible avec une spécification donnée sont respectivement la quasilocalité et la condition d'unicité de Dobrushin. Comme la première jouera un rôle important dans nos considérations, nous la rappelons ci-dessous.

Soit $S\subset\mathbb{Z}^{\nu}$. Une fonction g à valeurs réelles sur $\mathscr{X}^{S}$ est dite *quasilocale* si

$$\lim_{\Lambda\uparrow S}\ \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathscr{X}^{S}\,:\,\boldsymbol{x}_{\Lambda}=\boldsymbol{y}_{\Lambda}}\ \big|g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{y})\big| = 0$$

ou, autrement dit, si g est une limite uniforme de fonctions, chacune desquelles ne dépend que des valeurs de la configuration sur un ensemble fini de sites (fonctions *locales*). Notons également que la quasilocalité n'est rien d'autre que la continuité par rapport à la topologie $\mathscr{T}^{S}$ et que, vu que $\mathscr{X}^{S}$ est compact, les conditions de positivité stricte et de non-nullité uniforme sont équivalentes pour les fonctions locales et quasilocales.

Une spécification $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \big\{\mathbf{Q}_{\Lambda}^{\overline{\boldsymbol{x}}},\ \Lambda\in\mathscr{E}\ \text{et}\ \overline{\boldsymbol{x}}\in\mathscr{X}^{\Lambda^{\mathrm{c}}}\big\}$ est dite *quasilocale* (resp. *locale*) si pour tout $\Lambda\in\mathscr{E}$ et tout $\boldsymbol{x}\in\mathscr{X}^{\Lambda}$, la fonction $\overline{\boldsymbol{x}}\mapsto\mathbf{Q}_{\Lambda}^{\overline{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})$ sur $\mathscr{X}^{\Lambda^{\mathrm{c}}}$ est quasilocale (resp. locale).

Finalement, une spécification est dite *strictement positive* si tous ses éléments sont strictement positifs.

3.1.3 Spécifications gibbsiennes et champs aléatoires de Gibbs

Les champs aléatoires de Gibbs sont définis en termes de spécifications gibbsiennes, qui sont à leur tour définies en termes de potentiels.

Toute fonction Φ sur $\widetilde{\mathscr{X}^{\phi}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est appelée *potentiel (d'interaction)*. Un potentiel Φ est dit *convergent* s'il est à valeurs réelles, et si la série

$$\sum_{\tilde{J}\in\mathscr{E}(t^{\mathrm{c}})}\Phi\big(x\overline{\boldsymbol{x}}_{\tilde{J}}\big) \tag{3.2}$$

converge pour tous $t\in\mathbb{Z}^{\nu}$, $x\in\mathscr{X}^{t}$ et $\overline{\boldsymbol{x}}\in\mathscr{X}^{t^{\mathrm{c}}}$.

Un potentiel Φ est dit *uniformément convergent* s'il est convergent, et si la convergence dans (3.2) est uniforme par rapport à $\overline{\boldsymbol{x}}$.

Un potentiel Φ est dit *de portée finie* si pour tout $t \in \mathbb{Z}^\nu$, il existe seulement un nombre fini de volumes $\widetilde{J} \in \mathscr{E}(t^{\mathrm{c}})$ tels que $\Phi \not\equiv 0$ sur $\mathscr{X}^{t \cup \widetilde{J}}$. Notons que tout potentiel à valeurs réelles de portée finie est uniformément convergent.

Pour tout potentiel convergent Φ, une spécification $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \big\{\mathbf{Q}_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}},\ \Lambda \in \mathscr{E} \text{ et } \overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{\Lambda^{\mathrm{c}}}\big\}$ peut être construite à l'aide des formules de Gibbs

$$\mathbf{Q}_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\exp\big(-U_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})\big)}{\sum\limits_{\boldsymbol{y} \in \mathscr{X}^\Lambda} \exp\big(-U_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{y})\big)}\ , \quad \Lambda \in \mathscr{E},\ \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^\Lambda,\ \overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{\Lambda^{\mathrm{c}}}, \tag{3.3}$$

où

$$U_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}) \ = \sum_{J\,:\,\emptyset \neq J \subset \Lambda} \ \sum_{\widetilde{J} \in \mathscr{E}(\Lambda^{\mathrm{c}})} \Phi\big(\boldsymbol{x}_J\, \overline{\boldsymbol{x}}_{\widetilde{J}}\big), \quad \Lambda \in \mathscr{E},\ \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^\Lambda,\ \overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{\Lambda^{\mathrm{c}}}. \tag{3.4}$$

La spécification $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ est dite *gibbsienne avec le potentiel* Φ. Tout champ aléatoire compatible avec $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ est dit *champ de Gibbs avec le potentiel* Φ.

Dans ce mémoire, nous considérons uniquement des potentiels uniformément convergents. Ainsi, les spécifications gibbsiennes et les champs de Gibbs avec des potentiels uniformément convergents seront appelés simplement *spécifications gibbsiennes* et *champs de Gibbs*.

3.1.4 Problème de caractérisation des champs de Gibbs

Les classes de processus considérées dans la théorie des processus stochastiques sont généralement caractérisées par des propriétés des distributions fini-dimensionnelles ou (fini-)conditionnelles des processus. Cependant, dans la pratique, l'étude d'une classe particulière passe en général par un théorème de représentation exprimant les processus en termes d'objets simples et commodes, tels que les matrices de transition pour les chaînes de Markov, les fonctions caractéristiques pour les processus à accroissements indépendants, les fonctions spectrales pour les processus stationnaires, *etc.*

La situation est très différente pour la classe des champs aléatoires de Gibbs. Historiquement, et comme nous l'avons vu dans la section précédente, au lieu d'être caractérisés par des propriétés de leurs distributions fini-dimensionnelles ou (fini-)conditionnelles, les champs de Gibbs ont été définis directement par la représentation de leurs distributions conditionnelles en termes de potentiels. Et seulement ensuite, le problème de la caractérisation interne des champs de Gibbs (et, subsidiairement, des spécifications gibbsiennes) a été considéré.

La caractérisation la plus connue des spécifications gibbsiennes est donnée par le critère suivant (voir, par exemple, Kozlov [69], Sullivan [84] et Georgii [53]).

Critère 3.1 [Kozlov-Sullivan]**.** *Une spécification est gibbsienne si et seulement si elle est strictement positive et quasilocale.*

Ce critère permet de caractériser les champs de Gibbs par la positivité stricte et la quasilocalité de leurs distributions conditionnelles. Plus précisément, pour qu'un champ aléatoire soit un champ de Gibbs, sa distribution conditionnelle doit admettre une version qui est une spécification strictement positive et quasilocale. Comme nous pouvons le voir, ce critère impose des conditions sur un objet (distribution conditionnelle) qui n'est ni défini sans ambiguïté (est défini à un ensemble de probabilité nulle près), ni constructif (ses éléments sont indexés par les configurations infini-dimensionnelles à l'extérieur) et qui, de plus, ne permet pas toujours de déterminer le champ aléatoire de façon unique (transitions de phase). À notre avis, il est préférable qu'une caractérisation soit en termes d'objets n'ayant pas ce genre de défauts.

En fait, une telle caractérisation existe déjà pour la sous-classe des champs aléatoires de Gibbs avec des potentiels à valeurs réelles et de portée finie. Il a été montré dans Averintsev [22–24] et dans Sullivan [83] (voir également Grimmett [57]) que ces champs aléatoires sont caractérisés par la positivité stricte et la propriété de Markov. Notons que dans le cas strictement positif, la propriété de Markov admet plusieurs formulations équivalentes. L'une d'entre elles porte uniquement sur les lois conditionnelles du champ sur les singletons sachant les configurations sur les parties finies de l'extérieur : $\boldsymbol{q}_t^{\widetilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{q}_t^{\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\partial\Lambda}}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}^\nu$ et tout $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathscr{X}^t}$ tel que $\mathfrak{S}(\widetilde{\boldsymbol{x}}) \supset \partial t$ (voir, par exemple, Suomela [85]). Ainsi, nous avons une caractérisation interne de la classe des champs de Gibbs avec des potentiels à valeurs réelles et de portée finie en termes de distributions fini-conditionnelles uniponctuelles. Cette caractérisation impose des conditions sur un objet (distribution fini-conditionnelle uniponctuelle) qui est défini sans ambiguïté et de manière constructive (ses éléments sont constitués de rapports de probabilités fini-dimensionnelles). De plus, cet objet détermine de façon unique (et peut donc être identifié avec) le champ aléatoire (voir la Section 3.2.2).

L'obtention d'une caractérisation similaire dans le cas général des potentiels uniformément convergents est beaucoup moins évidente. Cependant, elle a été rendue possible grâce au cadre uniponctuel développé récemment et présenté dans la section suivante. De plus, elle est très naturelle au vu de ce dernier.

3.2 Cadre uniponctuel

Dans cette section, nous rappelons brièvement les résultats nécessaires obtenus dans les travaux des auteurs [3,6] et dans Dalalyan et Nahapetian [34] concernant respectivement les problèmes de description des champs aléatoires par leurs distributions conditionnelles uniponctuelles et par leurs distributions fini-conditionnelles uniponctuelles.

3.2.1 Description des champs aléatoires par leurs distributions conditionnelles uniponctuelles

L'idée qu'il soit possible de décrire et d'étudier les champs aléatoires par des distributions conditionnelles uniponctuelles remonte à Dobrushin [41, 44].

Quelques avancées dans cette direction ont été réalisées dans Sullivan [83] et dans Flood et Sullivan [50]. On peut également mentionner le Théorème 1.33 de Georgii [53] concernant

le problème de la restauration des spécifications à partir de leurs éléments uniponctuels. Cependant, la réalisation de l'idée de Dobrushin transite par un problème beaucoup plus important : celui de la description des spécifications par des systèmes de distributions de probabilité uniponctuelles indexées par les configurations à l'extérieur (systèmes uniponctuels) cohérents dans un certain sens. Ce problème a été traité beaucoup plus tard, la difficulté principale étant de trouver des conditions de cohérence appropriées.

Dans le cas d'un espace d'états fini (considéré dans ce mémoire), l'idée de Dobrushin a été réalisée par les auteurs dans [3] sous la condition de positivité faible (ainsi que sous la condition de positivité stricte) et dans [6] sous une condition de positivité très générale, que nous avons appelée *positivité très faible*. Le cas d'un espace d'états général (pas nécessairement fini) a été étudié par Fernández et Maillard dans [48] sous une condition de positivité alternative, et dans [49] sous une version adaptée à ce cas de la condition de positivité très faible.

Nous allons maintenant brièvement rappeler les résultats principaux des travaux des auteurs [3,6]. Dans ces articles, sous une hypothèse de positivité très générale (positivité très faible), nous avons trouvé des conditions de cohérence nécessaires et suffisantes pour qu'un système $\left\{\mathbf{Q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}},\ t \in \mathbb{Z}^\nu \text{ et } \overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{t^{\mathrm{c}}}\right\}$ de distributions de probabilité soit un sous-système d'une spécification. Un système satisfaisant ces conditions a été appelé 1-spécification. Il a également été montré que la spécification contenant une 1-spécification donnée est unique et est déterminée par des formules explicites. De plus, le fait que ces formules utilisent un nombre fini d'opérations élémentaires a deux conséquences importantes. Premièrement, la spécification entière est quasilocale si et seulement si l'1-spécification l'est. Deuxièmement, l'ensemble des champs aléatoires compatibles avec l'1-spécification coïncide avec l'ensemble des champs aléatoires compatibles avec la spécification entière. Ainsi, toute la théorie de Dobrushin peut être reformulée en termes d'1-spécifications, et on peut ainsi parler de la description des champs aléatoires par leurs distributions conditionnelles uniponctuelles.

Ci-dessous, nous donnons un peu plus de détails dans le cas particulier strictement positif. Dans ce cas, la définition de l'1-spécification peut être formulée de la manière suivante : un système

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \left\{\mathbf{Q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}},\quad t \in \mathbb{Z}^\nu \text{ et } \overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{t^{\mathrm{c}}}\right\}$$

de distributions de probabilité strictement positives est appelé *1-spécification* si

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}v}(x)\ \mathbf{Q}_s^{\overline{\boldsymbol{x}}x}(y)\ \mathbf{Q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}y}(u)\ \mathbf{Q}_s^{\overline{\boldsymbol{x}}u}(v) = \mathbf{Q}_s^{\overline{\boldsymbol{x}}u}(y)\ \mathbf{Q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}y}(x)\ \mathbf{Q}_s^{\overline{\boldsymbol{x}}x}(v)\ \mathbf{Q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}v}(u)\\ \text{pour tous } \ t,s \in \mathbb{Z}^\nu,\ \ x,u \in \mathscr{X}^t,\ \ y,v \in \mathscr{X}^s \ \text{ et } \ \overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{\{t,s\}^{\mathrm{c}}}.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Une 1-spécification $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \left\{\mathbf{Q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}},\ t \in \mathbb{Z}^\nu \text{ et } \overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{t^{\mathrm{c}}}\right\}$ est dite *quasilocale* (resp. *locale*) si pour tout $t \in \mathbb{Z}^\nu$ et tout $x \in \mathscr{X}^t$, la fonction $\overline{\boldsymbol{x}} \mapsto \mathbf{Q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}}(x)$ sur $\mathscr{X}^{t^{\mathrm{c}}}$ est quasilocale (resp. locale). Finalement, un champ aléatoire $\mathbf{P}$ est dit *compatible* avec une 1-spécification, si cette dernière est une version de la distribution conditionnelle uniponctuelle de $\mathbf{P}$.

Les formules explicites annoncées ci-dessus déterminant les éléments de la spécification $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \left\{\mathbf{Q}_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}},\ \Lambda \in \mathscr{E} \text{ et } \overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{\Lambda^{\mathrm{c}}}\right\}$ contenant une 1-spécification strictement positive donnée s'écrivent comme suit : pour tout $\Lambda \in \mathscr{E}$ et tout $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^\Lambda$, on a

$$\mathbf{Q}_\Lambda^{\overline{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{Q}_{t_1}^{\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_{\{t_2,\dots,t_n\}}}(x_{t_1})\ \mathbf{Q}_{t_2}^{\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}_{\{t_1\}}\boldsymbol{u}_{\{t_3,\dots,t_n\}}}(x_{t_2}) \cdots \mathbf{Q}_{t_n}^{\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}_{\{t_1,\dots,t_{n-1}\}}}(x_{t_n})}{\mathbf{Q}_{t_1}^{\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_{\{t_2,\dots,t_n\}}}(u_{t_1})\ \mathbf{Q}_{t_2}^{\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}_{\{t_1\}}\boldsymbol{u}_{\{t_3,\dots,t_n\}}}(u_{t_2}) \cdots \mathbf{Q}_{t_n}^{\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}_{\{t_1,\dots,t_{n-1}\}}}(u_{t_n})} \times C, \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^\Lambda,$$

où C est la constante de normalisation. Ici, la configuration fixe $\boldsymbol{u} \in \mathscr{X}^{\Lambda}$ et l'énumération $t_1, \ldots, t_n$ d'éléments de Λ sont choisies arbitrairement, et n'influencent pas le résultat grâce aux conditions de cohérence (3.5).

Notons que ces formules impliquent qu'une spécification contenant une 1-spécification strictement positive (resp. quasilocale) est nécessairement strictement positive (resp. quasilocale) elle-même.

Maintenant, le Critère 3.1 de Kozlov-Sullivan peut clairement être réduit au critère suivant, déjà obtenu par les auteurs dans [3].

Critère 3.2. *Une spécification est gibbsienne si et seulement si l'1-spécification qu'elle contient est strictement positive et quasilocale.*

Comme la convergence uniforme du potentiel assure la quasilocalité de l'1-spécification exprimée par les formules de Gibbs (3.3) et (3.4), nous avons également le corollaire suivant du Critère 3.2.

Critère 3.3. *Une spécification est gibbsienne si et seulement si l'1-spécification qu'elle contient peut être représentée par les formules de Gibbs* (3.3) *et* (3.4) *avec un potentiel uniformément convergent.*

3.2.2 Description des champs aléatoires par leurs distributions fini-conditionnelles uniponctuelles

Nous nous intéressons maintenant au problème de la description des champs aléatoires par leurs distributions fini-conditionnelles uniponctuelles considéré dans Dalalyan et Nahapetian [34]. Cette description est étroitement liée à (et, d'une certaine manière, complémentaire de) celle présentée dans la section précédente.

Tout d'abord, notons que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système $\widetilde{\boldsymbol{q}} = \big\{\mathbf{Q}_t^{\tilde{\boldsymbol{x}}},\ t \in \mathbb{Z}^\nu \text{ et } \tilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathscr{X}^t}\big\}$ de distributions de probabilité soit inclus dans un système $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} = \big\{\mathbf{Q}_\Lambda^{\tilde{\boldsymbol{x}}},\ \Lambda \in \mathscr{E} \text{ et } \tilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathscr{X}^\Lambda}\big\}$ de distributions de probabilité satisfaisant

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}_\Lambda^{\tilde{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) = \mathbf{Q}_{\Lambda\setminus I}^{\tilde{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})\ \mathbf{Q}_I^{\tilde{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) \\ \text{pour tous } \ \Lambda \in \mathscr{E},\ \ I \subset \Lambda,\ \ \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^{\Lambda\setminus I},\ \ \boldsymbol{y} \in \mathscr{X}^I \ \text{ et } \ \tilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathscr{X}^\Lambda}\end{gathered} \tag{3.6}$$

sont les suivantes :

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}_t^{\tilde{\boldsymbol{x}}}(x)\ \mathbf{Q}_s^{\tilde{\boldsymbol{x}}x}(y) = \mathbf{Q}_s^{\tilde{\boldsymbol{x}}}(y)\ \mathbf{Q}_t^{\tilde{\boldsymbol{x}}y}(x) \\ \text{pour tous } \ t, s \in \mathbb{Z}^\nu,\ \ x \in \mathscr{X}^t,\ \ y \in \mathscr{X}^s \ \text{ et } \ \tilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathscr{X}^{\{t,s\}}}.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Notons également que si $\widetilde{\boldsymbol{q}}$ est la distribution fini-conditionnelle uniponctuelle (resp. si $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}$ est la distribution fini-conditionnelle) d'un champ aléatoire strictement positif, alors elle satisfait nécessairement la condition (3.7) (resp. la condition (3.6)). Cependant, pour qu'un système strictement positif $\widetilde{\boldsymbol{q}}$ satisfaisant (3.7) (resp. un système strictement positif $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}$ satisfaisant (3.6)) soit la distribution fini-conditionnelle uniponctuelle (resp. la

distribution fini-conditionnelle) d'un champ aléatoire strictement positif, on a besoin de conditions supplémentaires. Il s'avère que ces conditions sont les suivantes :

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}_t^v(x)\ \mathbf{Q}_s^x(y)\ \mathbf{Q}_t^y(u)\ \mathbf{Q}_s^u(v) = \mathbf{Q}_s^u(y)\ \mathbf{Q}_t^y(x)\ \mathbf{Q}_s^x(v)\ \mathbf{Q}_t^v(u) \\ \text{pour tous } \ t,s \in \mathbb{Z}^\nu,\ \ x,u \in \mathscr{X}^t \ \text{ et } \ y,v \in \mathscr{X}^s.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Plus précisément, dans [34] il a été montré que la positivité stricte et les conditions (3.7) et (3.8) sont nécessaires et suffisantes pour qu'un système $\left\{\mathbf{Q}_t^{\tilde{\boldsymbol{x}}},\ t \in \mathbb{Z}^\nu \text{ et } \tilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathscr{X}^t}\right\}$ de distributions de probabilité soit la distribution fini-conditionnelle uniponctuelle d'un champ aléatoire strictement positif. Il a également été montré que ce champ aléatoire est déterminé de façon unique. En particulier, un champ aléatoire strictement positif est déterminé de façon unique par (et peut donc être identifié avec) sa distribution fini-conditionnelle uniponctuelle, et on peut ainsi parler de la description des champs aléatoires par leurs distributions fini-conditionnelles uniponctuelles.

3.3 Critères de gibbsianité des champs aléatoires

Dans cette section, nous considérons le problème de la caractérisation interne des champs de Gibbs. Les résultats principaux de l'article [9] sont les critères de gibbsianité des champs aléatoires en termes de leurs distributions fini-conditionnelles uniponctuelles. Ces critères seront présentés dans la Section 3.3.3. Avant cela, dans les deux sections suivantes, nous présentons les critères de gibbsianité des champs aléatoires en termes de leurs distributions conditionnelles et en termes de leurs distributions conditionnelles uniponctuelles. Ces critères sont obtenus en transformant et en améliorant les Critères 3.1–3.3.

3.3.1 Critères en termes de distributions conditionnelles

En combinant la définition du champ aléatoire de Gibbs avec le Critère 3.1, nous obtenons la caractérisation bien connue suivante : un champ aléatoire est un champ aléatoire de Gibbs, si et seulement s'il admet une version de la distribution conditionnelle qui est une spécification strictement positive et quasilocale. Ce critère peut être amélioré de la manière suivante.

Critère 3.4. *Un champ aléatoire est un champ aléatoire de Gibbs, si et seulement s'il admet une version strictement positive et quasilocale de la distribution conditionnelle.*

Comme la positivité stricte d'une version de la distribution conditionnelle implique la positivité stricte du champ aléatoire, le critère est immédiatement déduit de la proposition suivante, également intéressante en soi.

Proposition 3.5. *Si un champ aléatoire strictement positif admet une version quasilocale de la distribution conditionnelle, celle-ci est unique et est nécessairement une spécification.*

Notons que le Critère 3.4 a été, implicitement, obtenu dans Sullivan [84] en utilisant une approche différente.

3.3.2 Critères en termes de distributions conditionnelles uniponctuelles

Le Critère 3.4 caractérise les champs de Gibbs en termes de distributions conditionnelles. Cependant, au vu de la Section 3.2.1, il devrait être possible de le faire en termes de distributions conditionnelles uniponctuelles. En effet, en combinant la définition du champ aléatoire de Gibbs avec le Critère 3.2 et en tenant compte des résultats de la Section 3.2.1, on obtient la caractérisation suivante : un champ aléatoire est un champ aléatoire de Gibbs, si et seulement s'il admet une version de la distribution conditionnelle uniponctuelle qui est une 1-spécification strictement positive et quasilocale. Comme dans la section précédente, ce critère peut être amélioré de la façon suivante.

Critère 3.6. *Un champ aléatoire est un champ aléatoire de Gibbs, si et seulement s'il admet une version strictement positive et quasilocale de la distribution conditionnelle uniponctuelle.*

Ce critère est immédiatement déduit des deux propositions suivantes, également intéressantes en soi.

Proposition 3.7. *Si un champ aléatoire* $\mathbf{P}$ *admet une version strictement positive de la distribution conditionnelle uniponctuelle, alors* $\mathbf{P}$ *est strictement positif lui-même.*

Proposition 3.8. *Si un champ aléatoire strictement positif admet une version quasilocale de la distribution conditionnelle uniponctuelle, celle-ci est unique et est nécessairement une 1-spécification.*

Pour conclure cette section, notons qu'en combinant la définition du champ aléatoire de Gibbs avec le Critère 3.3 et en tenant compte des résultats de la Section 3.2.1, on a également la caractérisation suivante.

Critère 3.9. *Un champ aléatoire est un champ aléatoire de Gibbs, si et seulement s'il admet une version de la distribution conditionnelle uniponctuelle pouvant être représentée par les formules de Gibbs* (3.3) *et* (3.4) *avec un potentiel uniformément convergent.*

3.3.3 Critères en termes de distributions fini-conditionnelles uniponctuelles

Dans cette section, nous présentons les critères de gibbsianité des champs aléatoires en termes de leurs distributions fini-conditionnelles uniponctuelles. Le premier de ces critères est le suivant.

Critère 3.10. *Un champ aléatoire est un champ aléatoire de Gibbs, si et seulement s'il est strictement positif et si, de plus, sa distribution fini-conditionnelle uniponctuelle* $\left\{\boldsymbol{q}_t^{\widetilde{\boldsymbol{x}}},\ t \in \mathbb{Z}^\nu \text{ et } \widetilde{\boldsymbol{x}} \in \widetilde{\mathscr{X}^t}\right\}$ *satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :*

(A) *les limites*

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu \setminus t} \boldsymbol{q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda}(x)\ , \quad t \in \mathbb{Z}^\nu,\ x \in \mathscr{X}^t,\ \overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{t^c},$$

existent, sont non-nulles uniformément par rapport à $\overline{\boldsymbol{x}}$*, et la convergence est uniforme par rapport à* $\overline{\boldsymbol{x}}$*,*

(B) *les limites*

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^\nu\setminus t} \boldsymbol{q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda}(x)\ , \quad t\in\mathbb{Z}^\nu,\ x\in\mathscr{X}^t,\ \overline{\boldsymbol{x}}\in\mathscr{X}^{t^{\mathrm{c}}},$$

existent, sont strictement positives, et la convergence est uniforme par rapport à $\overline{\boldsymbol{x}}$.

À première vue, le Critère 3.10 ne porte que sur la distribution fini-conditionnelle uniponctuelle. Cependant, il impose également des conditions sur sa limite, c'est-à-dire sur la distribution conditionnelle uniponctuelle. Ce n'est pas le cas du critère suivant qui ne fait intervenir que la distribution fini-conditionnelle uniponctuelle elle-même. Avant de le formuler, admettons la convention suivante : dans la suite, lorsque nous utiliserons la notation $\boldsymbol{x}_T$ nous supposerons que seules les configurations $\boldsymbol{x}$ telles que $\mathfrak{S}(\boldsymbol{x})\supset T$ sont considérées.

Critère 3.11. *Un champ aléatoire est un champ aléatoire de Gibbs, si et seulement s'il est strictement positif, sa distribution fini-conditionnelle* $\{\boldsymbol{q}_t^{\widetilde{\boldsymbol{x}}},\ t\in\mathbb{Z}^\nu \text{ et } \widetilde{\boldsymbol{x}}\in\widetilde{\mathscr{X}^t}\}$ *est uniformément non-nulle (*$\boldsymbol{q}_t^{\widetilde{\boldsymbol{x}}}$ *est non-nulle uniformément par rapport à* $\widetilde{\boldsymbol{x}}$*), et l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

(C) *pour tous* $t\in\mathbb{Z}^\nu$ *et* $x\in\mathscr{X}^t$*, on a*

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^\nu\setminus t}\ \sup_{\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{y}}\in\widetilde{\mathscr{X}^t}\,:\,\widetilde{\boldsymbol{x}}_\Lambda=\widetilde{\boldsymbol{y}}_\Lambda} \left|\boldsymbol{q}_t^{\widetilde{\boldsymbol{x}}}(x)-\boldsymbol{q}_t^{\widetilde{\boldsymbol{y}}}(x)\right|=0,$$

(D) *pour tous* $t\in\mathbb{Z}^\nu$ *et* $x\in\mathscr{X}^t$*, on a*

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^\nu\setminus t}\ \sup_{J\in\mathscr{E}^*(t^{\mathrm{c}})}\ \sup_{\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{y}}\in\mathscr{X}^J\,:\,\widetilde{\boldsymbol{x}}_\Lambda=\widetilde{\boldsymbol{y}}_\Lambda} \left|\boldsymbol{q}_t^{\widetilde{\boldsymbol{x}}}(x)-\boldsymbol{q}_t^{\widetilde{\boldsymbol{y}}}(x)\right|=0,$$

(E) *pour tous* $t\in\mathbb{Z}^\nu$ *et* $x\in\mathscr{X}^t$*, on a*

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^\nu\setminus t}\ \sup_{\widetilde{\boldsymbol{x}}\in\widetilde{\mathscr{X}^t}} \left|\boldsymbol{q}_t^{\widetilde{\boldsymbol{x}}}(x)-\boldsymbol{q}_t^{\widetilde{\boldsymbol{x}}_\Lambda}(x)\right|=0.$$

Pour conclure cette section, notons que les analogues "multiponctuels" des Critères 3.10 et 3.11 formulés en termes de distributions fini-conditionnelles entières sont bien sûr valables. Concernant le premier, nous tenons à mentionner que la partie "nécessité" était, implicitement, contenue dans la preuve du Lemme 1 de Sullivan [84], dont nous suivons le raisonnement pour démontrer le Critère 3.10. En ce qui concerne le second, notons que la partie utilisant l'analogue de la condition (D) peut être déduite des Théorèmes 1 et 2 de Kozlov [69]. Il convient toutefois de souligner que l'auteur ne fournit pas la preuve de la partie "suffisance" du Théorème 2 (en la laissant, comme il le dit, au lecteur). Cependant, nos considérations montrent que la preuve de cette partie n'est ni intuitive, ni techniquement simple. De plus, sa validité semble incertaine dans le cadre de Kozlov [69] où l'espace d'états n'est pas supposé fini, ni même compact.

3.4 Quelques développements et perspectives

Les critères de gibbsianité des champs aléatoires présentés dans la section précédente sont formulés soit en termes de distributions conditionnelles (uniponctuelles), soit en termes de

distributions fini-conditionnelles (uniponctuelles). Ces deux types de critères sont complémentaires. Cependant, les critères du second type portent sur un objet constructif, défini sans ambiguïté, et permettent ainsi de développer une approche alternative à la théorie de Gibbs. Actuellement, nous poursuivons ce développement et travaillons sur la rédaction d'un livre [21]. Dans cette section, nous exposons les premières avancées dans cette direction.

Notons tout d'abord que le Critère 3.10 affirme *grosso modo* que, les considérations de positivité mises à part, les champs de Gibbs sont caractérisés par la convergence uniforme de leurs distributions fini-conditionnelles uniponctuelles (vers leurs distributions conditionnelles uniponctuelles), alors que pour un champ aléatoire quelconque, seule une convergence plus faible (presque sûre) est garantie. À notre avis, c'est la caractérisation la plus claire et compréhensible des champs de Gibbs, sur la base de laquelle une définition probabiliste simple et explicite du champ aléatoire de Gibbs peut être donnée.

Définition 3.12. *Un champ aléatoire* $\mathbf{P}$ *est dit être un* champ aléatoire de Gibbs *si*

1) pour tous $\Lambda \in \mathscr{E}$ *et* $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^{\Lambda}$, *on a* $\mathbf{P}_{\Lambda}(\boldsymbol{x}) > 0$,

2) les limites

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^{\nu} \setminus t} \frac{\mathbf{P}_{t \cup \Lambda}(x \overline{\boldsymbol{x}}_{\Lambda})}{\mathbf{P}_{\Lambda}(\overline{\boldsymbol{x}}_{\Lambda})}\,, \quad t \in \mathbb{Z}^{\nu},\ x \in \mathscr{X}^{t},\ \overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{t^{c}}, \tag{3.9}$$

existent, sont strictement positives, et la convergence est uniforme par rapport à $\overline{\boldsymbol{x}}$.

Notons que si $\mathbf{P}$ est un champ aléatoire de Gibbs, les limites (3.9) forment une version de la distribution conditionnelle uniponctuelle de $\mathbf{P}$ et, de plus, leur analogues multiponctuels existent et forment une version de la distribution conditionnelle de $\mathbf{P}$. Nous appelons ces versions *canoniques*. Notons également que la distribution conditionnelle (resp. conditionnelle uniponctuelle) canonique d'un champ aléatoire de Gibbs est la seule version quasilocale de sa distribution conditionnelle (resp. conditionnelle uniponctuelle). Notons enfin que le Critère 3.10 se transforme maintenant en théorème de représentation.

Théorème 3.13. *Si* $\mathbf{P}$ *est un champ aléatoire de Gibbs, alors la distribution canonique (uniponctuelle) de* $\mathbf{P}$ *peut être représentée par les formules de Gibbs* (3.3) *et* (3.4) *avec un potentiel uniformément convergent.*

Inversement, si un champ aléatoire $\mathbf{P}$ *admet une version de la distribution conditionnelle (uniponctuelle) pouvant être représentée par les formules de Gibbs* (3.3) *et* (3.4) *avec un potentiel uniformément convergent, alors* $\mathbf{P}$ *est un champ aléatoire de Gibbs, et cette version est canonique.*

L'ensemble $\mathscr{G}$ des champs de Gibbs n'est pas vide car, d'après la définition ci-dessus, il contient l'ensemble $\mathscr{M}$ des champs de Markov strictement positifs. D'autre part, comme le montre l'exemple suivant, tous les champs strictement positifs ne sont pas nécessairement gibbsiens.

Exemple 3.14. *Soit* $\mathscr{X} = \{0,1\}$, *et soit un champ aléatoire* $\mathbf{P}$ *donné par*

$$\mathbf{P}_{\Lambda}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\big(|\Lambda|+1\big)\, C_{|\Lambda|}^{|\boldsymbol{x}|}}, \quad \Lambda \in \mathscr{E},\ \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^{\Lambda},$$

où $|\boldsymbol{x}| = \big|\{t \in \Lambda : x_t = 1\}\big|$ *est le nombre de "particules" dans la configuration* $\boldsymbol{x}$*. (Ce champ aléatoire décrit la situation lorsque le nombre de particules dans tout volume* Λ *est réparti uniformément sur l'intervalle discret* $[\![0, |\Lambda|]\!]$ *et, sachant que ce nombre est égal à* k*, les* $C^k_{|\Lambda|}$ *configurations possibles à* k *particules sont équiprobables.) Tout d'abord, pour tous* $t \in \mathbb{Z}^\nu$*,* $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{t^c}$ *et* $\Lambda \in \mathscr{E}^*(t^c)$*, on a*

$$\boldsymbol{q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda}(1) = \frac{\mathbf{P}_{t\cup\Lambda}(1\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)}{\mathbf{P}_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)} = \frac{|\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda| + 1}{|\Lambda| + 2}\,.$$

Ensuite, pour tout $p \in [0,1]$*, on note* $\mathfrak{I}_t^p$ *l'ensemble de toutes les configurations* $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{t^c}$ *telles que*

$$\exists\ \lim_{\Lambda\uparrow t^c} \frac{|\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda|}{|\Lambda|} = p(\overline{\boldsymbol{x}}) = p,$$

et on pose $\overline{\mathfrak{I}}_t = \mathscr{X}^{t^c} \Big\backslash \Big(\bigcup_{p\in[0,1]} \mathfrak{I}_t^p \Big)$*. Nous voyons alors que les limites* (3.9) *n'existent pas pour* $\overline{\boldsymbol{x}} \in \overline{\mathfrak{I}}_t$ *et ne sont pas toutes strictement positives pour* $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathfrak{I}_t^0 \cup \mathfrak{I}_t^1$*. Chacun de ces faits implique la non-gibbsianité de* $\mathbf{P}$*.*

Notons que le champ aléatoire $\mathbf{P}$ considéré dans cet exemple est le mélange uniforme des champs aléatoires de Bernoulli $\mathbf{B}^p$, $p \in]0,1[$. En effet, pour tous $\Lambda \in \mathscr{E}$ et $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^\Lambda$, on a

$$\mathbf{P}_\Lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{|\boldsymbol{x}|!\,\big(|\Lambda| - |\boldsymbol{x}|\big)!}{\big(|\Lambda| + 1\big)!} = \mathrm{B}\big(|\boldsymbol{x}| + 1, |\Lambda| - |\boldsymbol{x}| + 1\big) = \int_0^1 p^{|\boldsymbol{x}|}(1-p)^{|\Lambda|-|\boldsymbol{x}|}\,\mathrm{d}p.$$

Ainsi, la non-gibbsianité de $\mathbf{P}$ découle également du fait général que tout mélange non-trivial de champs aléatoires de Bernoulli est non-gibbsien (on peut se référer à l'article des auteurs [3], ainsi qu'à van Enter, Fernández et Sokal [45, Section 4.5.1] et à van Enter et Lörinczi [46, Section 4]). Donnons deux autres exemples de tels mélanges où les distributions fini-dimensionnelles sont explicites et permettent de vérifier la non-gibbsianité directement.

Exemple 3.15. *Soit* $\tau > 0$*, et soit* $\mathbf{P}$ *le mélange avec la densité* $\tau p^{\tau-1}$ *des champs aléatoires de Bernoulli* $\mathbf{B}^p$*,* $p \in]0,1[$*, c'est-à-dire*

$$\mathbf{P}_\Lambda(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 p^{|\boldsymbol{x}|}(1-p)^{|\Lambda|-|\boldsymbol{x}|}\,\tau p^{\tau-1}\,\mathrm{d}p = \tau\,\mathrm{B}\big(|\boldsymbol{x}| + \tau, |\Lambda| - |\boldsymbol{x}| + 1\big), \quad \Lambda \in \mathscr{E},\ \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^\Lambda.$$

(Il s'agit d'une généralisation de l'exemple précédent, ce dernier étant obtenu pour $\tau = 1$*.) Ici, pour tous* $t \in \mathbb{Z}^\nu$*,* $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{t^c}$ *et* $\Lambda \in \mathscr{E}^*(t^c)$*, on a*

$$\boldsymbol{q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda}(1) = \frac{\mathbf{P}_{t\cup\Lambda}(1\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)}{\mathbf{P}_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)} = \frac{|\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda| + \tau}{|\Lambda| + \tau + 1}\,.$$

Ainsi, toutes les considérations de l'exemple précédent sont valables.

Exemple 3.16. *Soient* $\alpha, p_1, p_2 \in]0,1[$ *tels que* $p_1 \neq p_2$*, et soit* $\mathbf{P}$ *le mélange des champs aléatoires de Bernoulli* $\mathbf{B}^{p_1}$ *et* $\mathbf{B}^{p_2}$ *avec les poids* α *et* $\beta = 1 - \alpha$*, c'est-à-dire*

$$\mathbf{P}_\Lambda(\boldsymbol{x}) = \alpha\, p_1^{|\boldsymbol{x}|}(1-p_1)^{|\Lambda|-|\boldsymbol{x}|} + \beta\, p_2^{|\boldsymbol{x}|}(1-p_2)^{|\Lambda|-|\boldsymbol{x}|}, \quad \Lambda \in \mathscr{E},\ \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^\Lambda.$$

Ici, pour tous $t \in \mathbb{Z}^\nu$, $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{t^c}$ *et* $\Lambda \in \mathscr{E}^*(t^c)$, *on a*

$$\boldsymbol{q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda}(1) = \frac{\mathbf{P}_{t\cup\Lambda}(1\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)}{\mathbf{P}_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)} = \frac{\alpha p_1 + \beta p_2 \exp\bigl\{|\Lambda|\, H_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)\bigr\}}{\alpha + \beta \exp\bigl\{|\Lambda|\, H_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)\bigr\}},$$

où $H_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda) = \frac{|\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda|}{|\Lambda|} \ln \frac{p_2}{p_1} + \Bigl(1 - \frac{|\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda|}{|\Lambda|}\Bigr) \ln \frac{1-p_2}{1-p_1}$. *Clairement, il existe une configuration* $\overline{\boldsymbol{z}} \in \overline{\mathfrak{I}}_t$ *telle que* $\frac{|\overline{\boldsymbol{z}}_\Lambda|}{|\Lambda|}$ *oscille entre* 0 *et* 1, *c'est-à-dire*

$$\varliminf_{\Lambda\uparrow t^c} \frac{|\overline{\boldsymbol{z}}_\Lambda|}{|\Lambda|} = 0 \quad \textit{et} \quad \varlimsup_{\Lambda\uparrow t^c} \frac{|\overline{\boldsymbol{z}}_\Lambda|}{|\Lambda|} = 1.$$

Alors, puisque $\ln \frac{p_2}{p_1}$ *et* $\ln \frac{1-p_2}{1-p_1}$ *sont de signes opposés,* $|\Lambda|\, H_\Lambda(\overline{\boldsymbol{z}}_\Lambda)$ *oscille entre* $-\infty$ *et* $+\infty$. *Par conséquent, les limites* (3.9) *n'existent pas pour* $\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{z}}$, *et donc le champ aléatoire* $\mathbf{P}$ *est non-gibbsien.*

Les exemples précédents montrent que $\mathscr{G} \subsetneq \mathscr{P}$. Cependant, $\mathscr{G}$ est dense dans $\mathscr{P}$ par rapport à la topologie de la convergence faible $\bigl(\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}$ si $\mathbf{P}^n_\Lambda(\boldsymbol{x}) \to \mathbf{P}_\Lambda(\boldsymbol{x})$ pour tous $\Lambda \in \mathscr{E}$ et $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}^\Lambda\bigr)$. En effet, soit $\mathbf{P} \in \mathscr{P}$, soit $\mathbf{B}^p$ un champ aléatoire de Bernoulli $\bigl($avec $p \in \,]0{,}1[$ quelconque$\bigr)$, et soient $\Lambda_n \in \mathscr{E}$, $n \in \mathbb{N}$, tels que $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^\nu$ lorsque $n \to \infty$. Pour chaque n, considérons le champ aléatoire $\mathbf{P}^n$ tel que ses projections sur Λ_n et sur Λ_n^c sont indépendantes et sont données par $(\mathbf{P}^n)_{\Lambda_n} = (\mathbf{P})_{\Lambda_n}$ et $(\mathbf{P}^n)_{\Lambda_n^c} = (\mathbf{B}^p)_{\Lambda_n^c}$. Il est clair que $\mathbf{P}^n \in \mathscr{M}$ et $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, nous avons montré que $\mathscr{M}$ (et donc, *a fortiori*, $\mathscr{G}$) est dense dans $\mathscr{P}$. Notons qu'une affirmation semblable (bien que limitée aux champs aléatoires invariants par translation) pour le cas d'un espace d'états général (pas nécessairement fini) peut être trouvée dans van Enter, Fernández et Sokal [45, Section 4.5.6].

Comme nous l'avons vu ci-dessus, les mélanges et les limites de champs aléatoires de Gibbs peuvent être non-gibbsiens. Cependant, ce n'est plus le cas lorsque l'on considère des champs de Gibbs ayant la même distribution conditionnelle uniponctuelle canonique. En effet, il n'est pas difficile de montrer que pour tout $\mathbf{P}^\circ \in \mathscr{G}$, l'ensemble $\mathscr{G}(\mathbf{P}^\circ)$ des champs de Gibbs ayant la même distribution conditionnelle uniponctuelle canonique que $\mathbf{P}^\circ$ $\bigl($qui est également l'ensemble des champs de Gibbs ayant la même distribution conditionnelle canonique que $\mathbf{P}^\circ$, l'ensemble des champs aléatoires compatibles avec la distribution conditionnelle uniponctuelle canonique de $\mathbf{P}^\circ$ et l'ensemble des champs aléatoires compatibles avec la distribution conditionnelle canonique de $\mathbf{P}^\circ\bigr)$ est convexe et fermé.

Montrons, par exemple, la convexité. Soient $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2 \in \mathscr{G}(\mathbf{P}^\circ)$, soit $\bigl\{\boldsymbol{q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}},\ t \in \mathbb{Z}^\nu$ et $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{X}^{t^c}\bigr\}$ leur distribution conditionnelle uniponctuelle canonique commune, soit $\alpha \in \,]0{,}1[$, et soit $\mathbf{P} = \alpha\,\mathbf{P}^1 + \beta\,\mathbf{P}^2$, où $\beta = 1 - \alpha$. La positivité stricte de $\mathbf{P}$ est évidente. De plus, pour tous $t \in \mathbb{Z}^\nu$ et $x \in \mathscr{X}^t$, on a

$$\begin{aligned}
&\sup_{\overline{\boldsymbol{x}}\in\mathscr{X}^{t^c}} \left| \frac{\mathbf{P}_{t\cup\Lambda}(x\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)}{\mathbf{P}_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)} - \boldsymbol{q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}}(x) \right| \\
&\qquad = \sup_{\overline{\boldsymbol{x}}\in\mathscr{X}^{t^c}} \left| \frac{\alpha\,\mathbf{P}^1_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda) \left(\frac{\mathbf{P}^1_{t\cup\Lambda}(x\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)}{\mathbf{P}^1_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)} - \boldsymbol{q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}}(x) \right)}{\alpha\,\mathbf{P}^1_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda) + \beta\,\mathbf{P}^2_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)} + \frac{\beta\,\mathbf{P}^2_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda) \left(\frac{\mathbf{P}^2_{t\cup\Lambda}(x\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)}{\mathbf{P}^2_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)} - \boldsymbol{q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}}(x) \right)}{\alpha\,\mathbf{P}^1_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda) + \beta\,\mathbf{P}^2_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)} \right| \\
&\qquad \leqslant \sup_{\overline{\boldsymbol{x}}\in\mathscr{X}^{t^c}} \left| \frac{\mathbf{P}^1_{t\cup\Lambda}(x\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)}{\mathbf{P}^1_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)} - \boldsymbol{q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}}(x) \right| + \sup_{\overline{\boldsymbol{x}}\in\mathscr{X}^{t^c}} \left| \frac{\mathbf{P}^2_{t\cup\Lambda}(x\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)}{\mathbf{P}^2_\Lambda(\overline{\boldsymbol{x}}_\Lambda)} - \boldsymbol{q}_t^{\overline{\boldsymbol{x}}}(x) \right|,
\end{aligned}$$

et donc $\mathbf{P} \in \mathscr{G}(\mathbf{P}^\circ)$.

En conclusion, nous voudrions rappeler que cette section n'est qu'une première étape dans le développement de l'approche alternative susmentionnée à la théorie de Gibbs. Nous pensons que cette approche a le potentiel d'apporter une réelle contribution à la théorie, notamment dans des problèmes tels que l'unicité, la décroissance des corrélations (voir Dalalyan et Nahapetian [34], où quelques résultats à ce sujet ont déjà été obtenus), les théorèmes limites, *etc.*

Liste des travaux

Publications dans des revues internationales

[1] Dachian S., Nahapetian B.S., "*Inclusion-Exclusion Description of Random Fields*", Journal of Contemporary Mathematical Analysis (translated from "Natsional'naya Akademiya Nauk Armenii. Izvestiya. Matematika"), vol. 30, no. 6, pp. 50–61, 1995.

[2]* Dachian S., "*Nonparametric Estimation for Gibbs Random Fields Specified Through One-Point Systems*", Statistical Inference for Stochastic Processes, vol. 1, no. 3, pp. 245–264, 1998.

[3]† Dachian S., Nahapetian B.S., "*Description of Random Fields by Means of One-Point Conditional Distributions and Some Applications*", Markov Processes and Related Fields, vol. 7, no. 2, pp. 193–214, 2001.

[4] Dachian S., "*Estimation of Cusp Location by Poisson Observations*", Statistical Inference for Stochastic Processes, vol. 6, no. 1, pp. 1–14, 2003.

[5] Dachian S., Kutoyants Yu.A., "*On Cusp Estimation of Ergodic Diffusion Process*", Journal of Statistical Planning and Inference, vol. 117, no. 1, pp. 153–166, 2003.

[6] Dachian S., Nahapetian B.S., "*Description of Specifications by Means of Probability Distributions in Small Volumes under Condition of Very Weak Positivity*", Journal of Statistical Physics, vol. 117, no. 1–2, pp. 281–300, 2004.

[7] Dachian S., Kutoyants Yu.A., "*Hypotheses Testing : Poisson Versus Self-Exciting*", Scandinavian Journal of Statistics, vol. 33, no. 2, pp. 391–408, 2006.

[8] Dachian S., Kutoyants Yu.A., "*On the Goodness-of-Fit Tests for Some Continuous Time Processes*", in "Statistical Models and Methods for Biomedical and Technical Systems", eds. F. Vonta et al., Birkhäuser, Boston, pp. 385–403, 2008.

[9] Dachian S., Nahapetian B.S., "*On Gibbsianness of Random Fields*", Markov Processes and Related Fields, vol. 15, no. 1, pp. 81–104, 2009.

[10] Dachian S., Kutoyants Yu.A., "*Hypotheses Testing : Poisson Versus Stress-Release*", Journal of Statistical Planning and Inference, vol. 139, no. 5, pp. 1668–1684, 2009.

[11] Dachian S., "*On Limiting Likelihood Ratio Processes of Some Change-Point Type Statistical Models*", Journal of Statistical Planning and Inference, vol. 140, no. 9, pp. 2682–2692, 2010.

*Article entièrement issu de la Thèse de Doctorat [15]

†Article en grande partie issu de la Thèse de Doctorat [15]

[12] Dachian S., "*Estimation of the Location of a 0-Type or ∞-Type Singularity by Poisson Observations*", Statistics. A Journal of Theoretical and Applied Statistics, vol. 45, no. 5, pp. 509–523, 2011.

[13] Dachian S., Negri I., "*On Compound Poisson Processes Arising in Change-Point Type Statistical Models as Limiting Likelihood Ratios*", Statistical Inference for Stochastic Processes, vol. 14, no. 3, pp. 255–271, 2011.

[14] Charras-Garrido M., Abrial D., De Goër J., Dachian S., Peyrard N., "*Classification Method for Disease Risk Mapping Based on Discrete Hidden Markov Random Fields*", Biostatistics, vol. 13, no. 2, pp. 241–255, 2012.

Thèse de Doctorat

[15] Dachian S., "*Une Approche vers la Description et l'Identification d'une Classe de Champs Aléatoires*", Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, Janvier 1999.

Actes de congrès

[16] Dachian S., "*Estimation des Positions des Singularités pour des Processus de Poisson*", Actes des XXXIV^{es} Journées de Statistique, Bruxelles, 13–17 mai 2002.

[17] Dachian S., Negri I., "*On Gaussian Compound Poisson Type Limiting Likelihood Ratio Process*", Proceedings of the 45th Scientific Meeting of the Italian Statistical Society, 2010.

Travaux en cours

[18] Dachian S., Kordzakhia N., "*Estimation of the Location of a Small Jump by Poisson Observations*", article en préparation.

[19] Dachian S., Kutoyants Yu.A., Yang L., "*On Hypotheses Testing for Poisson Processes in Singular Situations*", article en préparation.

[20] Dachian S., Kutoyants Yu.A., "*Hypotheses Testing for Poisson Processes*", livre en cours de rédaction.

[21] Dachian S., Nahapetian B.S., "*Foundations of the Theory of Gibbs Random Fields*", livre en cours de rédaction.

Bibliographie

[22] Averintsev M.B., "*One Method of Describing Random Fields with a Discrete Argument*", Probl. Inf. Transm. **6**, no. 2, pp. 169–175, 1970.

[23] Averintsev M.B., "*Description of Markovian Random Fields by Gibbsian Conditional Probabilities*", Theory Probab. Appl. **17**, no. 1, pp. 20–33, 1972.

[24] Averintsev M.B., "*Gibbsian Distribution of Random Fields Whose Conditional Probabilities May Vanish*", Probl. Inf. Transm. **11**, no. 4, pp. 326–334, 1975.

[25] Bhattacharya P.K., Brockwell P.J., "*The Minimum of an Additive Process with Applications to Signal Estimation and Storage Theory*", Z. Wahrsch. verw. Gebiete **37**, no. 1, pp. 51–75, 1976.

[26] Chan K.S., "*Consistency and Limiting Distribution of the Least Squares Estimator of a Threshold Autoregressive Model*", Ann. Statist. **21**, no. 1, pp. 520–533, 1993.

[27] Chan N.H., Kutoyants Yu.A., "*Recent Developments of Threshold Estimation for Nonlinear Time Series*", J. Japan Statist. Soc. **40**, no. 2, pp. 277–303, 2010.

[28] Chan N.H., Kutoyants Yu.A., "*On Parameter Estimation of Threshold Autoregressive Models*", Stat. Inference Stoch. Process. **15**, no. 1, pp. 81–104, 2012.

[29] Chen C.W.S., Lee J.C., "*Bayesian Inference of Threshold Autoregressive Models*", J. Time Ser. Anal. **16**, no. 5, pp. 483–492, 1995.

[30] Chernoff H., Rubin H., "*The Estimation of the Location of a Discontinuity in Density*", Proc. 3rd Berkeley Symp. I, pp. 19–37, 1956.

[31] Chigansky P., Kutoyants Yu.A., "*On Nonlinear TAR Processes and Threshold Estimation*", Math. Methods Statist. **21**, no. 2, pp. 142–152, 2012.

[32] Chigansky P., Kutoyants Yu.A., "*Estimation in Threshold Autoregressive Models with Correlated Innovations*, soumis.

[33] Ciuperca G., "*Maximum Likelihood Estimator in a Two-Phase Nonlinear Random Regression Model*", Statist. Decisions **22**, no. 4, pp. 335–349, 2004.

[34] Dalalyan A., Nahapetian B.S., "*Description of Random Fields by Means of One-Point Finite-Conditional Distributions*", J. Contemp. Math. Anal. (translated from "Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.") **46**, no. 2, pp. 113–119, 2011.

[35] Daley D.J., Vere-Jones D., "*An Introduction to the Theory of Point Processes (second edition)*", Springer, New York, 2003.

[36] Dashyan Yu.R., "*On a Local Limit Theorem for a Class of Random Point Fields Appearing in Quantum Statistical Mechanics*", Theory Probab. Appl. **23**, no. 3, pp. 559–572, 1979.

[37] Dashyan Yu.R., "*The Local Limit Theorem for a Class of Marked Point Fields and the Problem of Equivalence of Ensembles in Quantum Statistical Mechanics*", in "Point Processes and Queuing Problems (Colloq., Keszthely, 1978)", Colloq. Math. Soc. János Bolyai **24**, North-Holland, Amsterdam, pp. 15–25, 1981.

[38] Dashyan Yu.R., Sukhov Yu.M., "*On the Question of the Gibbs Description of Random Processes with Discrete Time*", Soviet Math. Dokl. **19**, no. 5, pp. 1122–1126, 1978.

[39] Dashyan Yu.R., Sukhov Yu.M., "*Gibbsian Description of a Class of Random Processes with Discrete Time*", J. Contemp. Math. Anal. (translated from "Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR Ser. Mat.") **19**, no. 4, pp. 30–46, 1984.

[40] Deshayes J., Picard D., "*Lois Asymptotiques des Tests et Estimateurs de Rupture dans un Modèle Statistique Classique*", Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **20**, no. 4, pp. 309–327, 1984.

[41] Dobrushin R.L., "*The Description of a Random Field by Means of Conditional Probabilities and Conditions of Its Regularity*", Theory Probab. Appl. **13**, no. 2, pp. 197–224, 1968.

[42] Dobrushin R.L., "*Gibbsian Random Fields for Lattice Systems with Pairwise Interactions*", Funct. Anal. Appl. **2**, no. 4, pp. 292–301, 1968.

[43] Dobrushin R.L., "*The Problem of Uniqueness of a Gibbsian Random Field and the Problem of Phase Transitions*", Funct. Anal. Appl. **2**, no. 4, pp. 302–312, 1968.

[44] Dobrushin R.L., "*Prescribing a System of Random Variables by Conditional Distributions*", Theory Probab. Appl. **15**, no. 3, pp. 458–486, 1970.

[45] van Enter A.C.D., Fernández R., Sokal A.D., "*Regularity Properties and Pathologies of Position-Space Renormalization-Group Transformations : Scope and Limitations of Gibbsian Theory*", J. Stat. Phys. **72**, no. 5–6, pp. 879–1167, 1993.

[46] van Enter A.C.D, Lörinczi J., "*Robustness of the Non-Gibbsian Property : Some Examples*", J. Phys. A **29**, no. 10, pp. 2465–2473, 1996.

[47] Ermakov M.S., "*On the Asymptotic Behavior of Statistical Estimates for Samples Having a Density with Singularities*", Theory Probab. Appl. **21**, no. 3, pp. 649–651, 1977.

[48] Fernández R., Maillard G., "*Chains with Complete Connections and One-Dimensional Gibbs Measures*", Electron. J. Probab. **9**, no. 6, pp. 145–176, 2004.

[49] Fernández R., Maillard G., "*Construction of a Specification from Its Singleton Part*", ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **2**, pp. 297–315, 2006.

[50] Flood R.G., Sullivan W.G., "*Consistency of Random Field Specifications*", Z. Wahrsch. verw. Gebiete **53**, no. 2, pp. 147–156, 1980.

[51] Fujii T., "*A Note on the Asymptotic Distribution of the Maximum Likelihood Estimator in a Non-Regular Case*", Statist. Probab. Lett. **77**, no. 16, pp. 1622–1627, 2007.

[52] Fujii T., "*An Extension of Cusp Estimation Problem in Ergodic Diffusion Processes*", Statist. Probab. Lett. **80**, no. 9–10, pp. 779–783, 2010.

[53] Georgii H.-O., "*Gibbs Measures and Phase Transitions*", de Gruyter, Berlin, 1988.

[54] Gihman I.I., Skorohod A.V., "*The Theory of Stochastic Processes I*", Springer-Verlag, New York, 1974.

[55] Goldstein S., "*A Note on Specifications*", Z. Wahrsch. verw. Gebiete **46**, no. 1, pp. 45–51, 1978/79.

[56] Golubev G.K., "*On Computation of Efficiency of Maximum-Likelihood Estimate When Observing a Discontinuous Signal in White Noise*", Probl. Inf. Transm. **15**, no. 3, pp. 206–212, 1979.

[57] Grimmett G.R., "*A Theorem about Random Fields*", Bull. London Math. Soc. **5**, no. 1, pp. 81–84, 1973.

[58] Höpfner R., Kutoyants Yu.A., "*Estimating Discontinuous Periodic Signals in a Time Inhomogeneous Diffusion*", Stat. Inference Stoch. Process. **13**, no. 3, pp. 193–230, 2010.

[59] Höpfner R., Kutoyants Yu.A., "*Estimating a Periodicity Parameter in the Drift of a Time Inhomogeneous Diffusion*", Math. Methods Statist. **20**, no. 1, pp. 58–74, 2011.

[60] Höpfner R., Kutoyants Yu.A., "*On Frequency Estimation for a Periodic Ergodic Diffusion Process*", Probl. Inf. Transm. **48**, no. 2, pp. 127–141, 2012.

[61] Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z., "*The Asymptotic Behavior of Generalized Bayesian Estimates*", Soviet Math. Dokl. **11**, no. 5, pp. 1181–1185, 1970.

[62] Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z., "*Asymptotic Behavior of Statistical Estimates for Samples with a Discontinuous Density*", Sb. Math. **16**, no. 4, pp. 573–606, 1972.

[63] Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z., "*The Asymptotical Behavior of Location Parameter Statistical Estimators for Samples with Continuous Density with Singularities*", Zap. Nauchn. Sem. LOMI **41**, pp. 67–93, 1974.

[64] Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z., "*Parameter Estimation for a Discontinuous Signal in White Gaussian Noise*", Probl. Inf. Transm. **11**, no. 3, pp. 203–212, 1975.

[65] Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z., "*Statistical Estimation. Asymptotic Theory*", Springer-Verlag, New York, 1981.

[66] Karr A.F., "*Statistical Models and Methods in Image Analysis : A Survey*", in "Statistical Inference in Stochastic Processes", eds. N. U. Prabhu and I. V. Basawa, Marcel Dekker, New York, pp. 1–33, 1989.

[67] Karr A.F., "*Point Processes and Their Statistical Inference (second edition)*", Marcel Dekker, New York, 1991.

[68] Koul H.L., Qian L., "*Asymptotics of Maximum Likelihood Estimator in a Two-Phase Linear Regression Model*", J. Statist. Plann. Inference **108**, no. 1–2, pp. 99–119, 2002.

[69] Kozlov O.K., "*Gibbs Description of a System of Random Variables*", Probl. Inf. Transm. **10**, no. 3, pp. 258–265, 1974.

[70] Küchler U., Kutoyants Yu.A., "*Delay Estimation for some Stationary Diffusion-Type Processes*", Scand. J. Statist. **27**, no. 3, pp. 405–414, 2000.

[71] Kutoyants Yu.A., "*Parameter Estimation for Stochastic Processes*", Armenian Academy of Sciences, Yerevan, 1980 (in Russian) ; Heldermann-Verlag, Berlin, 1984 (translation of a revised version).

[72] Kutoyants Yu.A., "*Identification of Dynamical Systems with Small Noise*", Mathematics and Its Applications **300**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.

[73] Kutoyants Yu.A., "*Statistical Inference for Spatial Poisson Processes*", Lect. Notes Statist. **134**, Springer-Verlag, New York, 1998.

[74] Kutoyants Yu.A., "*Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*", Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, London, 2004.

[75] Kutoyants Yu.A., "*On Identification of the Threshold Diffusion Processes*", Ann. Inst. Statist. Math. **64**, no. 2, pp. 383–413, 2012.

[76] Pflug G.Ch., "*The Limiting Log-Likelihood Process for Discontinuous Density Families*", Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **64**, no. 1, pp. 15–35, 1983.

[77] Pflug G.Ch., "*On an Argmax-Distribution Connected to the Poisson Process*", in "Proceedings of the Fifth Prague Conference on Asymptotic Statistics", eds. P. Mandl and H. Hušková, Physica-Verlag, Heidelberg, pp. 123–130, 1993.

[78] Prakasa Rao B.L.S., "*Estimation of the Location of the Cusp of a Continuous Density*", Ann. Math. Statist. **20**, no. 1, pp. 76–87, 1968.

[79] Preston C., "*Construction of Specifications*", in "Quantum Fields – Algebras, Processes (Proc. Sympos., Univ. Bielefeld, Bielefeld, 1978)", ed. L. Streit., Springer, Vienna, pp. 269–292, 1980.

[80] Rubin H., Song K.-S., "*Exact Computation of the Asymptotic Efficiency of Maximum Likelihood Estimators of a Discontinuous Signal in a Gaussian White Noise*", Ann. Statist. **23**, no. 3, pp. 732–739, 1995.

[81] Snyder D.R., Miller M.I., "*Random Point Processes in Time and Space*", Springer, New York, 1991.

[82] Sokal A.D., "*Existence of Compatible Families of Proper Regular Conditional Probabilities*", Z. Wahrsch. verw. Gebiete **56**, no. 4, pp. 537–548, 1981.

[83] Sullivan W.G., "*Finite Range Random Fields and Energy Fields*", J. Math. Anal. Appl. **44**, no. 3, pp. 710–724, 1973.

[84] Sullivan W.G., "*Potentials for Almost Markovian Random Fields*", Comm. Math. Phys. **33**, no. 1, pp. 61–74, 1973.

[85] Suomela P., "*Construction of Nearest Neighbour Systems*", Ann. Acad. Scient. Fennicae, Series A, I. Mathematica Dissertationes **10**, 1976.

[86] Terent'yev A.S., "*Probability Distribution of a Time Location of an Absolute Maximum at the Output of a Synchronized Filter*", Radioeng. Electron. **13**, no. 4, pp. 652–657, 1968.

[87] Thompson W.A. "*Point Processes Models with Applications to Safety and Reliability*", Chapman and Hall, New York, 1988.

[88] Tong H., "*Threshold Models in Time Series Analysis — 30 Years on*", Stat. Interface **4**, no. 2, pp. 107–118, 2011.

[89] Yao Y.-C., "*Approximating the Distribution of the Maximum Likelihood Estimate of the Change-Point in a Sequence of Independent Random Variables*", Ann. Statist. **15**, no. 3, pp. 1321–1328, 1987.