



**HAL**  
open science

## Modélisation d'une série financière par mouvement Brownien multi-fractionnaire parcimonieux

Pierre, Raphael Bertrand, Abdelkader Hamdouni,, Nabiha Haouas, Samia  
Khadraoui

► **To cite this version:**

Pierre, Raphael Bertrand, Abdelkader Hamdouni,, Nabiha Haouas, Samia Khadraoui. Modélisation d'une série financière par mouvement Brownien multi-fractionnaire parcimonieux. 42èmes Journées de Statistique, May 2010, Marseille, France. inria-00502144

**HAL Id: inria-00502144**

**<https://inria.hal.science/inria-00502144>**

Submitted on 13 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation d'une série financière par mouvement Brownien multi-fractionnaire parcimonieux

Pierre R. Bertrand <sup>\*</sup>, Abdelkader Hamdouni <sup>†</sup>

Nabiha Haouas <sup>‡</sup> et Samia Khadhraoui <sup>§</sup>

17th April 2010

## Abstract

In this work we introduce sparse modelling for fractal like processes. We recall the stream which has led from fractional Brownian motion (fBm) to multifractional Brownian motion (mBm) and propose selecting a sparse-mBm. We based our point of view on statistical experiments and the observation of a numerical artifact : when we estimate the time varying Hurst index  $H(t)$  for an fBm, sampling fluctuation gives the impression that  $H(t)$  is itself a stochastic process, even when  $H(t)$  is constant. Eventually, we apply modelling by a sparse-mBm to a real financial dataset, that is NASDAQ time series from 1971 until the 3rd quarter of 2009.

**Keywords:** Model selection, Finance, Fractional Brownian motion, Multifractional Brownian motion, Generalized quadratic variation, Wavelet analysis.

---

<sup>\*</sup>INRIA Saclay et Clermont Université, Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS 6620, FRANCE, email : Pierre.Bertrand@inria.fr.

<sup>†</sup>Faculté des Sciences, Computational Mathematics Laboratory, 5019 Monastir, TUNISIE, email : abdelkader.hamdouni@isimg.rnu.tn

<sup>‡</sup>Faculté de Droit et de Sciences Economiques et Politiques de Sousse, 4000 Sousse, TUNISIE, email : n.haouas@yahoo.fr

<sup>§</sup>Institut Supérieur de Gestion, Avenue Abdel-Aziz El-Bahi, 4000 Sousse, TUNISIE, email : ksamia@yahoo.fr

## Résumé en français

Dans ce travail, nous introduisons un modèle parcimonieux de processus de type fractal. En premier, nous rappelons le passage du mouvement brownien fractionnaire (fBm) au mouvement brownien multi-fractionnaire (mBm) et proposons de sélectionner un modèle parcimonieux. En second, nous étayons notre point de vue par des expériences statistiques et l'observations d'un *artefact* numérique : quand nous estimons l'index de Hurst dépendant du temps  $H(t)$  pour un mouvement brownien fractionnaire, la fluctuation de l'échantillonnage donne l'impression que  $H(t)$  est lui-même un processus stochastique, même lorsque  $H(t)$  est constant. Nous appliquons cette modélisation à des données financières réelles : la série des prix journaliers du NASDAQ de 1971 jusqu'à la fin 2009.

## Introduction

Le but de ce travail est de sélectionner un "bon" modèle de type fractal pour une série financière. Cette étude est basée sur la série des cours journaliers du NASDAQ de 1971 à 2009.

Les modèles de type fractal ont été longtemps négligés en finance quantitative au profit des processus de diffusion, cf. Black et al. (1973). L'exemple le plus connu de processus de type fractal est le mouvement Brownien fractionnaire fBm (fractional Brownian motion) qui est caractérisé par son indice de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Cet indice de Hurst  $H$  pilote trois types de propriétés du fBm : a) la régularité trajectoirelle ; b) l'auto-similarité ; c) la dépendance à longue portée, cf. Bardet et al. (2007).

Il convient de noter que si  $H = 1/2$ , alors le fBm est un mouvement Brownien, en ce sens le brownien fractionnaire constitue une généralisation. Par ailleurs, toutes les études statistiques ont rejeté l'hypothèse nulle ( $H_0$ ) :  $H = 1/2$ , cf. Willinger *et al.* (1999). Cependant, dans un modèle idéalisé de marché sans coût de transaction, la description des actifs financiers par une exponentielle du fBm entraîne l'existence d'opportunité d'arbitrage (Rogers, 1997), ce qui signifie la possibilité d'avoir un gain positif avec un investissement 0 et une bonne stratégie. Ceci a longtemps constitué la principale objection à la modélisation des actifs financiers par des processus de type fractal. Récemment, Guasoni, Schachermayer et al. (2008) ont montré qu'en présence d'un coût de transaction proportionnel à taux  $\varepsilon > 0$ , il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage pour les processus de type

fractal.

Ce résultat nous a conduit à revisiter la modélisation d'une série financière par un processus de type fractal. Cependant, depuis une vingtaine d'années les modèles de type fractal ont été fréquemment utilisés dans les autres domaines d'applications, pour lesquels n'existait pas l'objection de l'existence d'opportunités d'arbitrage. Ceci a conduit à l'introduction de toute une famille de nouveaux modèles, appelés multi-fractals (mBm). La nouveauté méthodologique de ce travail consiste à sélectionner un modèle simple ("*sparse mBm*") parmi les modèles mBm.

Dans la section 1, nous rappelons brièvement les différents modèles de type fractal ; dans la section 2, nous présentons une étude statistique à partir de la série des prix journalier du NASDAQ de 1971 à 2009.

## 1 Du fBm au mBm puis retour au "*sparse-mBm*"

### Rappel sur le "*fractional Brownian motion*" (fBm)

Le mouvement brownien fractionnaire (fBm) a été introduit par Kolmogorov (1940) puis popularisé par Mandelbrot et al. (1968). Rappelons qu'un fBm standard  $\{B(H, t), t \in \mathbb{R}_+\}$  est un processus gaussien centré de structure dont la structure de covariance est donnée par

$$(1.1) \quad \mathbb{E}(B(H, t), B(H, s)) = \frac{V_H}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$$

pour  $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ , avec  $H \in (0, 1)$  et  $V_H = \Gamma(1 - 2H) \frac{\cos(\pi H)}{\pi H}$ . Ce processus est caractérisé par son indice de Hurst  $H$  : la régularité trajectorielle critique est  $H$ , ce qui signifie que  $t \mapsto B(H, t)$  est holdérien d'ordre  $\alpha$  pour tout  $\alpha < H$  ; il est auto-similaire d'ordre  $H$ , *i.e.*  $(B_H(\lambda t))_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{(d)}{=} (\lambda^H B_H(t))_{t \in \mathbb{R}}$  pour tout  $\lambda > 0$  ; la corrélation des accroissements est d'ordre  $1/n^{2-2H}$ . Il admet différentes représentations, nous renvoyons à Samorodnitsky et al. (1994), chap.14 pour tous les détails techniques.

### Rappel sur le "*multi-fractional Brownian motion*" (mBm)

D'une certaine manière, le fBm est un modèle trop riche pour les applications. Ceci a conduit Peltier et al (1995) et Benassi *et al.* (1997) à introduire le mouvement brownien multi-fractionnaire mBm (mBm : multifractional Brownian motion). Pour résumer, le mBm est un processus gaussien centré continu dont l'exposant de Holder critique dépend du temps. Comme

l'exposant de Holder critique du fBm est égal à son indice de Hurst, la solution naturelle est de remplacer l'indice de Hurst  $H$  par une fonction du temps  $H(t)$  dans l'une des différentes représentations du fBm. Ces différentes constructions aboutissent au même processus, cf. Ayache et al. (2005).

### Modélisation par un "*sparse mBm*"

La tendance suivante fut l'introduction de modèles de type fractal avec des fonctions  $H(t)$  de plus en plus irrégulières, voire elles-même stochastiques, cf. Ayache *et al.* (2007), Barrière et al. (2009) ou Benassi *et al.* (2000). La nouveauté de ce travail est un retour à des modèles simples. Nous proposons de sélectionner un modèle simple dit parcimonieux ("*sparse mBm*") parmi les modèles mBm, correspondant à une fonction  $H(t)$  affine par morceaux avec des instants de ruptures aléatoires. Comme la fonction  $H(t)$  est lipschitzienne, on peut injecter sans problème la fonction  $H(t)$  dans une représentation du fBm, cf. Ayache et al. (2005).

## 2 Expérimentation Statistique

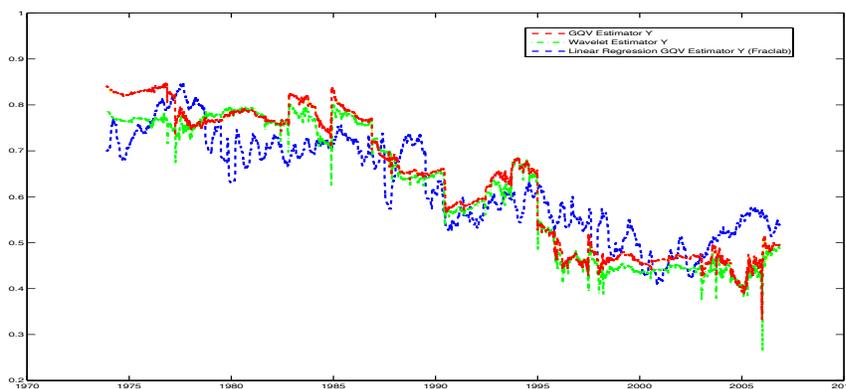
L'introduction du "*sparse mBm*" nous a été suggérée par une expérience numérique :

- Pour estimer l'indice de Hurst comme une fonction du temps, i.e.  $H(t)$ , il est naturel d'utiliser les estimateurs disponibles sur Matlab calculés sur une fenêtre mobile centrée en  $t$ . Quand on change la taille de la fenêtre, on voit changer l'irrégularité de  $t \mapsto H(t)$ . Cette instabilité numérique pose question.
- Si on simule un fBm (Chan et al. 1998) avec un indice de Hurst constant par rapport au temps,  $H_0 = 0.7$  par ex., et qu'on applique la même procédure que ci-dessus, on voit alors apparaître un indice de Hurst  $H(t)$  qui ressemble à un processus aléatoire variant irrégulièrement autour de la vraie valeur  $H_0$ .

### Estimation d'un indice de Hurst dépendant du temps sur la série des log-prix du NASDAQ

Soit  $X(t)$  la série des cours journaliers du NASDAQ de 1971 à 2009 et  $Y(t)$  le log-prix, i.e.  $Y(t) = \log X(t)$ . On estime l'indice de Hurst  $H(t)$  de  $Y$  en le calculant sur une fenêtre mobile de longueur  $N = 1400$  centrée en  $t$ , en utilisant, d'une part, la fonction *wfbmesti* de MATLAB qui donne

l'estimateur des Variations Quadratiques Généralisées (GQV) (Istas et al. 1997) et l'estimateur d'ondelette (Abry *et al.* 2003), d'autre part FRACLAB<sup>1</sup> qui donne l'estimateur de log-régression des GQV (Coeurjolly 2005), cf. Fig. 1.

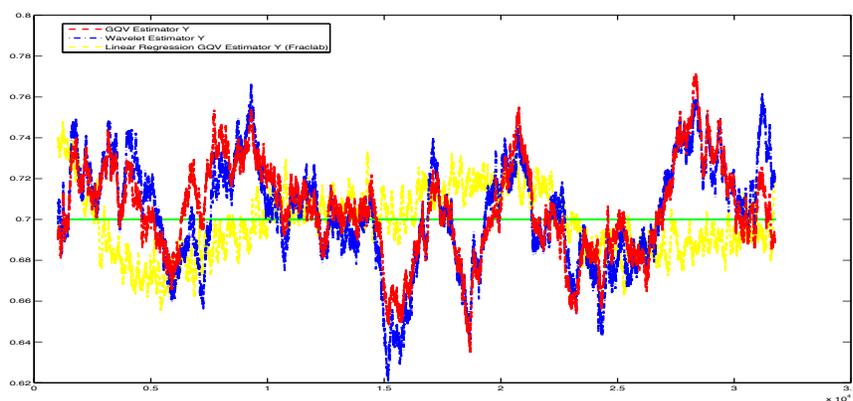


**Fig. 1** Estimation de l'indice de Hurst, par GQV, estimateur d'ondelette et régression linéaire des GQV sur une fenêtre mobile centrée en  $t$  de longueur 1400.

### Estimation d'un indice de Hurst dépendant du temps pour un fBm

La figure 1 donne l'impression que l'indice de Hurst est lui-même un processus aléatoire de régularité faible. Mais ceci s'explique par le TCL fonctionnel donné par Coeurjolly (2005) et est confirmé par la simulation présentée ci-dessous (figure 2) pour un fBm d'indice de Hurst constant  $H_0 = 0.7$ .

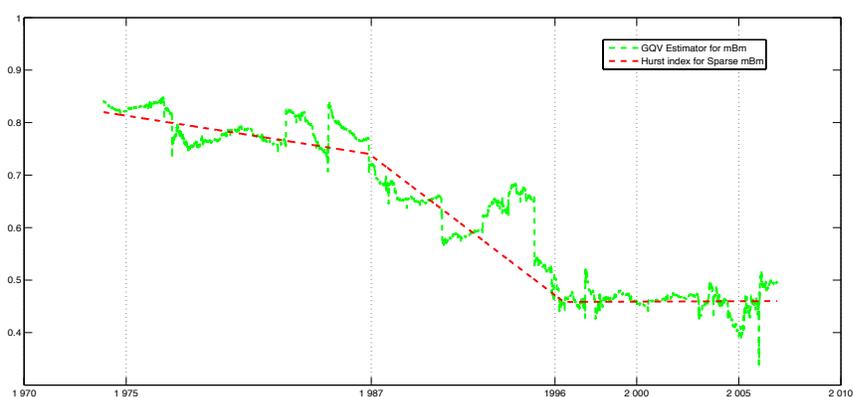
<sup>1</sup>FRACLAB est une boîte à outils pour le traitement du signal fractal et multifractal qui a été développée à l'INRIA.



**Fig. 2** Estimation d'un indice de Hurst dépendant du temps par GQV et l'estimateur d'ondelette, avec  $H = 0.7$ .

### Estimation d'un indice de Hurst parcimonieux pour la série des log-prix du NASDAQ

Les figures 1 et 2 nous conduisent à rejeter la modélisation par un indice de Hurst qui serait un processus stochastique et à préférer un indice de Hurst correspondant à une fonction affine par morceaux, cf. figure 3.



**Fig. 3** Un indice de Hurst affine par morceaux pour le log-prix du Nasdaq

**Remerciements.** Ce travail a été initié lors du Premier Colloque Franco-Tunisien de Mathématiques (CFTM1) Djerba 16-22 mars 2009. Les auteurs remercient chaleureusement les organisateurs de cette conférence.

## References

- [1] Abry P, Flandrin P, Taqqu MS, Veitch D(2003) Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens, in Long-range Dependence : Theory and Applications, P. Doukhan, G. Oppenheim and M.S. Taqqu editors, Birkhäuser.
- [2] Ayache, A., Jaffard, S. and Taqqu, M.S.(2007) Wavelet construction of generalized multifractional processes, *Rev. Mat. Iberoamericana*, 23(1), 327–370.
- [3] Ayache, A. and Taqqu, M.S.(2005) Multifractional processes with random exponent, *Publ. Mat.*, 49( 2), 459–486.
- [4] Bardet, J.M. and Bertrand, P.R. (2007) Definition, properties and wavelet analysis of multiscale fractional Brownian motion, *Fractals*, 15(1), 1–15.
- [5] Barrière, O. et Lévy Vehel, J. (2009) Intervalles interbattements cardiaques et Processus Auto-Régulé Multifractionnaire, *J. de la SFdS*, 150(1),54–72.
- [6] Benassi, A. Bertrand, P. R., Cohen, S. and Istas, J. (2000) Identification of the Hurst index of a step fractional Brownian motion, *Stat. Inference Stoch. Proc.*, 3( 1/2), 101–111.
- [7] Benassi, A., Jaffard, S. and Roux, D. (1997) Elliptic Gaussian random processes, *Rev. Mathematica Iberoamericana* , 13(1), 19–90.
- [8] Chan, G. and Wood, A. (1998) Simulation of multifractional Brownian motion. *Proc. Comput. Statist*, 233–238.
- [9] Coeurjolly, J.F. (2005) Identification of multifractional Brownian motion, *Bernoulli* 11, 987–1008.
- [10] Guasoni, P., Rásonyi, M. and Schachermayer, W. (2008) The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Continuous Processes under Small Transaction Costs, *Forthcoming in Annals of Finance*.
- [11] Istas, J. and Lang, G. (1997) Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process, *Ann. Inst. Poincaré*, 33, 407–436.
- [12] Kolmogorov, A. N. (1940) Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbert'schen Raume, *Doklady*, 26, 115–118.
- [13] Mandelbrot, B. and Van Ness, J. (1968) Fractional Brownian motion, fractional noises and applications, *SIAM review*, 10, 422–437.
- [14] Peltier, R. and Lévy Véhel, J.(1995) Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results, *Rapport technique INRIA*.

- [15] Rogers, L.C.G. (1997) Arbitrage with fractional Brownian motion, *Mathematical Finance*, 7, 95–105.
- [16] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. S. (1994) Stable non-Gaussian Random Processes, Chapman & Hall.
- [17] Willinger, W., Taqqu, M. S. and Teverovsky, V. (1999) Stock market price and long-range dependence. *Finance and Stochastics*, 1, 1–13.