



**HAL**  
open science

# Introduction à la dynamique des fluides visqueux

Thierry Menand

► **To cite this version:**

Thierry Menand. Introduction à la dynamique des fluides visqueux. Licence. France. 2020. hal-03022007v2

**HAL Id: hal-03022007**

**<https://uca.hal.science/hal-03022007v2>**

Submitted on 9 Dec 2020 (v2), last revised 10 Dec 2020 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

---

# Introduction à la dynamique des fluides visqueux

Licence Sciences de la Terre

UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE

ÉCOLE DE L'OPGC

**Thierry Menand**

---

Ce document est une introduction à la dynamique des fluides visqueux, enseignée aux étudiants en 3<sup>e</sup> année de Licence Sciences de la Terre à l'École de l'OPGC (Université Clermont Auvergne) dans le cadre du cours *Géologie Quantitative*.

Bonne lecture!

Thierry Menand

Novembre 2020

**Libre accès** –  Ce document est mis à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1	Qu'est ce qu'un fluide? . . . . .	1
1.2	Qu'est ce que la dynamique des fluides? . . . . .	2
<b>2</b>	<b>La conservation de la masse et l'équation de continuité</b>	<b>2</b>
2.1	Conservation de la masse . . . . .	2
2.2	Équation de continuité . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Viscosité : la loi de Newton</b>	<b>6</b>
3.1	Mise en évidence expérimentale de la viscosité . . . . .	6
3.2	Ordre de grandeur de quelques viscosités en sciences de la Terre . . . . .	7
3.3	Cisaillement et contraintes visqueuses dans les fluides – Loi de Newton . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Cas simples d'écoulement de fluide</b>	<b>9</b>
4.1	Écoulement dans un chenal horizontal . . . . .	9
4.2	Écoulement dans une conduite cylindrique horizontale . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Dynamique des fluides visqueux : l'équation de Navier-Stokes</b>	<b>14</b>
5.1	Masse du fluide . . . . .	14
5.2	Accélération du fluide . . . . .	14
5.3	Somme des forces . . . . .	15
5.3.1	Forces de volume $\vec{F}_v$ . . . . .	15
5.3.2	Forces de surface $\vec{F}_s$ . . . . .	16
5.4	Équation de Navier-Stokes . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Écoulements laminaires et turbulents : le nombre de Reynolds</b>	<b>18</b>
6.1	Écoulements laminaires et turbulents . . . . .	18
6.2	Nombre de Reynolds . . . . .	19
6.2.1	Comparaison des ordres de grandeur . . . . .	19
6.2.2	Dédimensionnalisation de l'équation de Navier-Stokes . . . . .	20
6.3	Couche limite . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Écoulement laminaire autour d'une sphère : la loi de Stokes</b>	<b>22</b>
7.1	Loi de Stokes . . . . .	22
7.2	Vitesse de Stokes . . . . .	23
<b>A</b>	<b>Équations de continuité et de Navier-Stokes</b>	<b>25</b>
A.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	25
A.2	Coordonnées cylindriques . . . . .	26
A.3	Coordonnées sphériques . . . . .	27
<b>B</b>	<b>Exercices</b>	<b>28</b>
B.1	Conservation de la masse dans un conduit (puits de forage, conduit volcanique...)	28
B.1.1	Variation de la section du conduit . . . . .	28
B.1.2	Variation de la section du conduit et de la masse volumique . . . . .	28
B.2	Écoulement d'un fluide visqueux . . . . .	28
B.2.1	Chenal horizontal (canal de dérivation de l'Artière ou filon magmatique horizontal ( <i>sill</i> ) par ex.) . . . . .	28
B.2.2	Cylindre horizontal (loi de Hagen-Poiseuille) . . . . .	30

B.2.3	Chenal vertical (filon magmatique vertical ( <i>dyke</i> ), fracture hydraulique...)	30
B.2.4	Conduit vertical (puits de forage, conduit volcanique...)	31
B.2.5	Écoulement gravitaire à l'air libre (glacier, coulée de boue, coulée de lave...)	33
B.3	Chute d'une sphère dans un fluide visqueux	34
B.3.1	Chute d'une particule	34
B.3.2	Viscosimètre à bille	34
<b>C</b>	<b>Solutions</b>	<b>35</b>
C.1	Conservation de la masse	35
C.1.1	Variation de la section	35
C.1.2	Variation de la section et de la masse volumique	35
C.2	Écoulement d'un fluide visqueux	35
C.2.1	Chenal horizontal	35
C.2.2	Cylindre horizontal	35
C.2.3	Chenal vertical	36
C.2.4	Conduit vertical	36
C.2.5	Glacier	36
C.3	Chute d'une sphère	36
C.3.1	Chute d'une particule	36
C.3.2	Viscosimètre	36

# 1 Introduction générale

Les fluides sont présents dans pratiquement tous les aspects de la vie quotidienne (transport, industrie, chimie, biologie...). Ils sont aussi présents dans pratiquement tous les domaines des sciences de la Terre : par ex. la circulation atmosphérique, la circulation océanique, les écoulements souterrains (les aquifères), les écoulements magmatiques, les mouvements dans le noyau terrestre liquide, ainsi que les écoulements catastrophiques (volcanisme, tsunamis, coulées de boue ou lahars, avalanches, etc.).

Même si cela peut sembler paradoxal, la dynamique des fluides est également importante pour certains solides. En effet, certains solides comme les glaciers (bien que lentement) et possèdent donc une *rhéologie* (la façon dont ils se déforment et s'écoulent) similaire à celle des fluides. D'autres corps sont indéniablement solides, comme le manteau par ex., qui transmet les ondes sismiques de cisaillement, ce qu'un fluide ne pourrait pas faire. Mais sur de grandes échelles de temps, certains matériaux (comme le manteau) se comportent comme s'ils étaient en fait fluides. La déformation de ces solides peut donc être étudiée et comprise à l'aide des mêmes équations que celles qui régissent la dynamique des fluides.

L'ascension des magmas dans la croûte terrestre et leur épanchement en surface sont également régis par la dynamique des fluides. Cette dynamique est particulièrement riche car les propriétés des magmas couvrent une grande gamme de valeurs. En effet, ces propriétés dépendent de la composition des magmas, de leur température (qui évolue au cours du temps), de la pression, de leur teneur en cristaux et en gaz, etc. Cette variabilité est à l'origine de la complexité et de la richesse des écoulements magmatiques.

## 1.1 Qu'est ce qu'un fluide ?

D'une manière très générale, on pourrait dire que les fluides sont tout ce qui n'est pas solide (attention tout de même au point précédent sur la rhéologie de certains solides...). Et on peut subdiviser les fluides en deux catégories distinctes : les gaz et les liquides. La différence fondamentale entre les deux est que les gaz sont compressibles alors que les liquides sont, dans la grande majorité, incompressibles.

Qu'ils soient liquides ou gazeux, les fluides ont la particularité fondamentale de ne pas pouvoir s'opposer à un changement de forme qui leur est imposé : la moindre force de cisaillement qui leur est appliquée induit une déformation et donc un écoulement. Par contre tous les fluides ne sont pas égaux face à ces contraintes cisailantes externes. Certains possèdent en effet une plus grande capacité que d'autres à s'opposer à la vitesse à laquelle le changement de forme, l'écoulement, a lieu. Cette capacité, propre à chaque fluide, à résister à l'écoulement est la *viscosité* : la viscosité n'empêche pas un fluide de s'écouler, elle affecte la vitesse à laquelle cet écoulement a lieu. Un exemple de la vie de tous les jours serait d'étaler de l'eau, de l'huile ou du miel sur une lame de couteau ; les fluides les plus visqueux s'écoulent comme les autres mais moins vite. De la même façon, une coulée basaltique s'écoule beaucoup plus rapidement qu'un dôme rhyolitique car la viscosité d'un basalte est bien plus faible que celle d'une rhyolite.

Les fluides pour lesquels la viscosité est négligeable, ou les problèmes dans lesquels leur viscosité peut être négligée, sont définis comme des *fluides parfaits* (*inviscid fluids*). Ici, nous ne traiterons que des fluides visqueux, c-à-d des fluides pour lesquels la viscosité ne peut pas être négligée *a priori* (nous verrons dans la Section 6 le critère qui permet de dire dans quelles

conditions la viscosité d'un fluide peut être négligée).

## 1.2 Qu'est ce que la dynamique des fluides ?

L'étude du comportement des fluides dans son ensemble est appelée la *mécanique des fluides*. Celle-ci peut être séparée en deux branches : l'*hydrostatique* qui traite des fluides au repos et la *dynamique des fluides* qui traite des fluides en mouvement. C'est cette deuxième branche de la mécanique des fluides qui nous intéresse ici, et nous allons voir que la dynamique des fluides visqueux est essentiellement régie par deux équations :

- l'*équation de continuité*, qui traduit le fait que la masse de l'ensemble d'un système (fluide ou non) doit toujours être conservée (Section 2) ;
- et l'*équation de Navier-Stokes*, qui est la deuxième loi de Newton ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ) appliquée aux fluides (Section 5).

## 2 La conservation de la masse et l'équation de continuité

### 2.1 Conservation de la masse

La conservation de la masse stipule que la quantité de matière transportée par unité de temps dans un système doit rester constante (*rien ne se perd, rien ne se crée*). Ceci est fondamental et vrai de n'importe quel système : la non conservation de la masse est impossible car cela impliquerait soit que de la masse a été créée ou perdue spontanément au sein du système, soit qu'on a oublié de prendre en compte une partie du système (donc celui-ci n'est en fait pas complet!). Ainsi, la conservation de la masse impose que dans un écoulement, la masse de fluide qui traverse par unité de temps n'importe quelle surface perpendiculaire à cet écoulement est constante. Dans le schéma représenté sur la Figure 1, la conservation de la masse se traduit par le fait que la masse « entrant » par unité de temps à travers la surface  $S_1$ , perpendiculaire à l'écoulement, doit être égale à la masse « sortant » par unité de temps à travers la surface  $S_2$  (elle aussi perpendiculaire à l'écoulement).

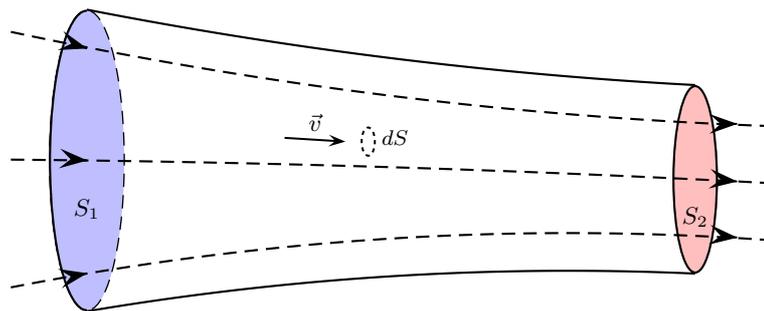


FIGURE 1 – Figure schématique d'un écoulement dans un conduit dont la section en aval  $S_2$  est inférieure à la section en amont  $S_1$  de l'écoulement : le conduit se rétrécit. Les courbes en tirets schématisent les lignes suivies par le courant dans ce conduit. Le vecteur  $\vec{v}$  est la vitesse de l'écoulement (elle varie donc suivant l'endroit où on la considère). La section  $dS$  (courbe en pointillé) est la section perpendiculaire à  $\vec{v}$  d'un tube fictif, extrêmement fin, qu'on imagine au sein de l'écoulement ( $dS \ll 1$ ).

Regardons plus en détail comment cela se traduit pour l'écoulement de la Figure 1. Considérons un petit tube virtuel au cœur de l'écoulement (un *tube de courant*) dont la section  $dS$  est perpendiculaire à l'écoulement. Si ce tube fictif est suffisamment petit alors la vitesse  $\vec{v}$  de l'écoulement qui passe à travers  $dS$  et la masse volumique  $\rho$  du fluide peuvent être toutes les deux considérées comme étant uniformes : elles sont les mêmes en tout point de la surface  $dS$  (on peut toujours choisir un tube fictif suffisamment fin pour que cela soit le cas). Pendant une petite période de temps  $dt$ , le fluide se déplace avec une vitesse  $v$  et parcourt donc la distance  $vdt$ . Le volume de fluide qui a traversé la section  $dS$  du tube fictif pendant cette même période de temps est donc

$$dV = vdSdt.$$

Cependant, ce n'est pas le volume qui est conservé (ceci ne serait vrai que si le fluide était incompressible) mais la masse. Si le fluide possède une masse volumique  $\rho$ , alors la masse de fluide  $dm$  qui a été déplacée à travers la section  $dS$  pendant le temps  $dt$  est

$$dm = \rho dV = \rho vdSdt.$$

La conservation de la masse stipule que la masse de fluide qui traverse une section  $S$  de *tout l'écoulement* par unité de temps est constante. Il faut donc intégrer  $dm$  sur toute cette section  $S$  : cela revient à imaginer un ensemble de tubes de courant qui rempliraient tout l'écoulement ; la masse de fluide  $dM$  qui traverse la section  $S$  de l'écoulement pendant la petite durée de temps  $dt$  serait alors la somme de toutes les masses de fluide  $dm$  qui traversent chacune une petite portion  $dS$  de la section pendant ce même intervalle de temps :

$$dM = \iint_S dm = \iint_S \rho v dt dS = dt \iint_S \rho v dS,$$

où l'on a sorti l'intervalle de temps  $dt$  de l'intégrale puisque l'intégration s'effectue sur la surface  $S$  ( $dt$  y est donc constant). Ainsi la masse par unité de temps, le *débit massique*, est

$$Q_m = \frac{dM}{dt} = \iint_S \rho v dS, \quad (1)$$

et la **conservation de la masse** stipule que ce débit massique est constant quelque soit la section de l'écoulement sur laquelle l'intégration est effectuée :

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{dM}{dt} = \iint_S \rho v dS = \text{constante} \\ &= \iint_{S_1} \rho v dS = \text{masse par unité de temps traversant } S_1 = Q_{m1} \\ &= \iint_{S_2} \rho v dS = \text{masse par unité de temps traversant } S_2 = Q_{m2}. \end{aligned}$$

Remarques :

1. l'équation du débit massique (1) traduit la conservation de la masse de manière globale, c-à-d à l'échelle de l'ensemble de l'écoulement ( $Q_m$  est intégré sur toute la section de l'écoulement) ;
2. la conservation de la masse (c-à-d un débit massique constant) implique la conservation du volume (c-à-d un débit volumique constant) *si et seulement si* la masse volumique

est constante. En effet, le débit volumique, le volume de fluide qui traverse une section de l'écoulement par unité de temps, est défini par  $Q_v = dV/dt$ . Ainsi

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} \\ &= \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt} = \rho Q_v + V \frac{d\rho}{dt} \\ \Leftrightarrow Q_v &= \frac{Q_m}{\rho} - \frac{V}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \end{aligned}$$

Si  $\rho$  est constante, alors  $d\rho/dt = 0$  et  $Q_v = Q_m/\rho$  est donc constant. Il faut donc toujours préciser de quel débit on parle (massique ou volumique) car *a priori* seul  $Q_m$  est conservé. Dans la vie courante, on raisonne souvent avec l'eau, qui est incompressible dans la plupart des situations et pour laquelle  $Q_v$  est donc également conservé; par ex., on utilise habituellement  $Q_v$  de manière implicite lorsqu'on parle du débit d'une rivière. Pour d'autres fluides, cela dépend des cas (pour les magmas par ex., cela dépendra notamment de leur teneur en bulles de gaz); il vaut donc mieux raisonner en terme de débit massique.

Unités : le débit massique  $Q_m$  est exprimé en  $\text{kg s}^{-1}$  et le débit volumique  $Q_v$  en  $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ .

Cas particulier : si la masse volumique  $\rho$  et la vitesse  $v$  sont toutes les deux uniformes à travers une surface  $S$  alors les calculs de  $Q_m$  et de  $Q_v$  deviennent très simples :

$$Q_m = \rho v S \quad \text{et} \quad Q_v = v S \quad \text{si } \rho \text{ et } v \text{ sont uniformes.}$$

## 2.2 Équation de continuité

Si l'équation du débit massique (1) traduit la conservation de la masse de manière globale à l'échelle de tout l'écoulement, l'équation de continuité traduit la conservation de la masse à l'échelle locale, c-à-d en chaque point de l'écoulement.

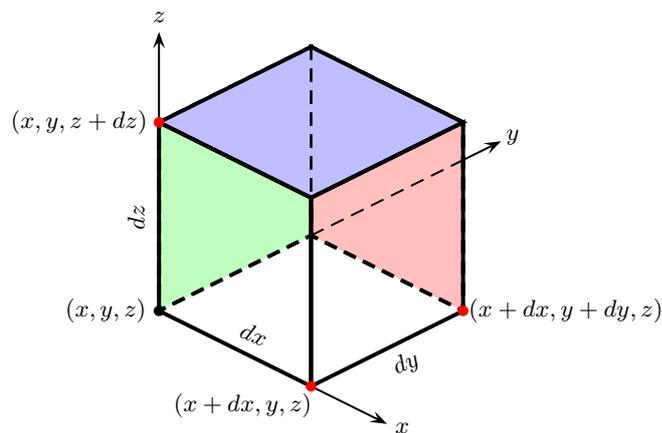


FIGURE 2 – Volume élémentaire  $\Delta V$  de côtés  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

Pour trouver cette équation de continuité, imaginons un petit volume élémentaire cubique de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  au cœur de l'écoulement (Figure 2) :  $\Delta V = dx dy dz$ . La vitesse du fluide

à cet endroit de l'écoulement est  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , où  $v_x$  est la composante de  $\vec{v}$  parallèlement à  $Ox$ ,  $v_y$  est sa composante parallèlement à  $Oy$  et  $v_z$  sa composante parallèlement à  $Oz$ . Supposons que l'écoulement ait globalement lieu des  $x$ ,  $y$  et  $z$  négatifs vers les  $x$ ,  $y$  et  $z$  positifs. L'écoulement entre donc dans le volume élémentaire par les faces situées en  $x$  (face verte), en  $y$  (face avant gauche) et en  $z$  (face du dessous), et il en ressort par les faces situées en  $x + dx$  (face avant droite), en  $y + dy$  (face rouge) et en  $z + dz$  (face bleue). Et la conservation de la masse impose que la quantité de matière  $Q_{m\text{entrant}}$  qui entre par unité de temps dans le volume élémentaire doit être identique à la quantité  $Q_{m\text{sortant}}$  qui en sort par unité de temps ; autrement dit, la différence  $Q_{m\text{sortant}} - Q_{m\text{entrant}}$  doit être nulle.

Si le volume élémentaire est suffisamment petit, alors les composantes de la vitesse de l'écoulement et la masse volumique du fluide sont uniformes sur chacune des faces du volume. Parallèlement à l'axe  $Ox$ , la masse de fluide qui entre par unité de temps dans le volume par la face verte  $S(x)$  est donc

$$\begin{aligned} Q_{mx}(x) &= \rho(x)v_x(x)S(x) \\ &= \rho(x)v_x(x)dydz. \end{aligned}$$

De même, la masse qui sort par unité de temps de la face avant droite  $S(x + dx)$  est :

$$\begin{aligned} Q_{mx}(x + dx) &= \rho(x + dx)v_x(x + dx)S(x + dx) \\ &= \rho(x + dx)v_x(x + dx)dydz. \end{aligned}$$

La différence de masse par unité de temps entre la quantité qui sort et celle qui rentre parallèlement à  $Ox$  est donc

$$\begin{aligned} Q_{mx}(x + dx) - Q_{mx}(x) &= \rho(x + dx)v_x(x + dx)dydz - \rho(x)v_x(x)dydz \\ &= [\rho(x + dx)v_x(x + dx) - \rho(x)v_x(x)] dydz \\ &= \left[ \frac{\rho(x + dx)v_x(x + dx) - \rho(x)v_x(x)}{dx} \right] dx dydz \\ &= \left[ \frac{(\rho v_x)(x + dx) - (\rho v_x)(x)}{dx} \right] dx dydz \\ &= \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx dydz \\ &= \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \Delta V. \end{aligned}$$

En faisant le même calcul parallèlement à  $Oy$  et à  $Oz$ , on trouve que la différence de masse par unité de temps entre la quantité qui sort et celle qui rentre parallèlement à  $Oy$  est

$$Q_{my}(y + dy) - Q_{my}(y) = \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \Delta V,$$

et parallèlement à  $Oz$

$$Q_{mz}(z + dz) - Q_{mz}(z) = \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \Delta V.$$

La différence de masse par unité de temps qui entre et qui sort de tout le volume élémentaire

est donc la somme des trois différences que nous venons de calculer :

$$\begin{aligned}
 Q_{m \text{ sortant}} - Q_{m \text{ entrant}} &= Q_{mx}(x + dx) - Q_{mx}(x) \\
 &\quad + Q_{my}(y + dy) - Q_{my}(y) \\
 &\quad + Q_{mz}(z + dz) - Q_{mz}(z) \\
 &= \left( \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) \Delta V \\
 &= \text{div}(\rho \vec{v}) \Delta V = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \Delta V.
 \end{aligned}$$

La conservation de la masse impose que la quantité de matière qui entre par unité de temps dans le volume élémentaire  $\Delta V$  doit être identique à la quantité qui en sort par unité de temps. La différence  $Q_{m \text{ sortant}} - Q_{m \text{ entrant}}$  doit donc être nulle, ce qui se traduit par l'**équation de continuité** :

$$\left( \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) = \text{div}(\rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2)$$

#### Cas particulier : les fluides incompressibles

Si la masse volumique  $\rho$  est partout constante alors l'équation de continuité se simplifie. En effet,  $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\rho) = \rho \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}(\rho)$ . Donc si  $\rho$  est constante alors  $\vec{\text{grad}}(\rho) = \vec{0}$ , et l'équation de continuité  $\text{div}(\rho \vec{v})$  s'écrit alors

$$\text{div}(\vec{v}) = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0.$$

*Note* : On retrouve ce résultat si on met  $\rho$  en facteur de l'équation de continuité générale (2) (ce que l'on peut faire puisque  $\rho$  est constante).

## 3 Viscosité : la loi de Newton

La viscosité est la capacité que les fluides ont à résister aux écoulements. Plus précisément, la viscosité est la capacité que les fluides ont à s'opposer à la *vitesse d'écoulement* ; les fluides visqueux ne peuvent pas s'opposer au mouvement mais ils peuvent diminuer la vitesse à laquelle cet écoulement a lieu, et leur viscosité quantifie cette capacité à freiner l'écoulement.

### 3.1 Mise en évidence expérimentale de la viscosité

La viscosité peut être mise en évidence à l'aide d'une expérience simple (Figure 3). Deux plaques parallèles sont séparées d'une certaine distance  $d$ , et l'espace entre les deux plaques est rempli d'un fluide. Une des plaques est maintenue immobile, et on exerce une force  $\vec{F}$  sur l'autre plaque afin de la déplacer à une certaine vitesse  $\vec{V}$  constante. On observe alors les points suivants :

1. la force  $\vec{F}$  doit être *continuellement* maintenue pour que la plaque se déplace. D'après les lois de la mécanique de Newton, cela implique donc que le fluide exerce une force qui résiste à ce déplacement ;
2. la force qu'il est nécessaire d'appliquer augmente avec la surface  $S$  de la plaque au contact avec le fluide, avec la vitesse de déplacement  $\mathcal{V}$  et décroît avec la distance  $d$  qui sépare les deux plaques :  $\vec{F} \propto \vec{V}S/d$ ;

3. la vitesse dans le fluide n'est pas uniforme mais augmente linéairement entre la plaque immobile et la plaque qui est déplacée (Figure 3) :  $v(y) = \mathcal{V}y/d$ . Le fluide est donc cisailé par le mouvement relatif des deux plaques.

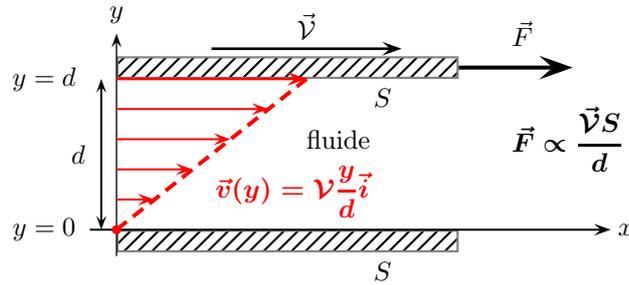


FIGURE 3 – Schéma expérimental. Deux plaques de surface  $S$  sont positionnées parallèlement l'une à l'autre et séparées d'une distance  $d$ , l'espace entre les deux plaques étant rempli d'un fluide. La plaque inférieure est immobile alors qu'une force  $\vec{F}$  est appliquée à la plaque supérieure afin de la déplacer horizontalement à une vitesse  $\vec{V}$  constante. On observe expérimentalement le profil de vitesse représenté en rouge et que  $\vec{F} \propto \vec{V}S/d$ .

On observe donc que la force  $\vec{F}$  nécessaire pour maintenir le déplacement de l'une des plaques à une vitesse  $\vec{V}$  par rapport à l'autre est proportionnelle à  $\mathcal{V}S/d$ , et on définit le facteur de proportionnalité comme la **viscosité**  $\mu$  du fluide :

$$\vec{F} \propto \frac{\vec{V}S}{d} = \mu \frac{\vec{V}S}{d}.$$

La viscosité  $\mu$  est une propriété propre au fluide, elle est toujours positive, et elle est exprimée en Pas.

### 3.2 Ordre de grandeur de quelques viscosités en sciences de la Terre

Quelques ordres de grandeur de viscosité de matériaux terrestres sont donnés dans le Tableau 1 :

TABLEAU 1 – Ordres de grandeur de viscosités.

Matériaux	Viscosité (Pa s)
air	$10^{-5}$
eau	$10^{-3}$
huiles (cuisine, moteur...)	0.1 – 1
glace (0 °C)	$10^{13}$
basalte fondu	1 – $10^2$
dacite fondue*	$10^4$ – $10^7$
rhyolite fondue*	$10^5$ – $10^{12}$
manteau	$10^{20}$ – $10^{22}$
noyau	$10^{-2}$

\* selon la teneur en eau.

Ces ordres de grandeur illustrent la grande gamme de valeur que peut prendre la viscosité en sciences de la Terre : de  $10^{-5}$  Pas pour l'air à la base de l'atmosphère jusqu'à  $10^{22}$  Pas (voire peut-être même plus) pour le manteau terrestre. Ainsi la gamme de viscosité pour

les matériaux terrestre peut couvrir 27 ordres de grandeurs ! Par ailleurs, certains matériaux terrestres possèdent eux-mêmes une grande gamme de viscosité. C'est tout particulièrement vrai des magmas, dont la viscosité dépend fortement de leur teneur en eau dissoute. Cet effet est d'autant plus important que les magmas sont évolués car leur capacité à incorporer de l'eau sous forme dissoute augmente avec leur teneur en silice. Ainsi, quelques pour-cents en masse d'eau dissoute dans une rhyolite suffisent pour faire chuter la viscosité de ce magma de plus de six ordres de grandeur ! Pendant la décompression d'un magma lors de son ascension vers la surface, la solubilité de l'eau dans ce magma diminue et le magma se déshydrate (phénomène d'exsolution), ce qui entraîne automatiquement une augmentation de sa viscosité. Cette propriété remarquable est l'une des caractéristiques originales et fondamentales des systèmes magmatiques<sup>1</sup>.

### 3.3 Cisaillement et contraintes visqueuses dans les fluides – Loi de Newton

Comme on l'a vu précédemment (section 3.1), on observe lors de l'expérience représentée sur la Figure 3 que le fluide est cisailé par le mouvement relatif des deux plaques. La vitesse du fluide  $v$  n'est donc pas uniforme, et on observe qu'elle varie avec la position  $y$  entre les deux plaques telle que  $v(y) = \mathcal{V}y/d$ . À différentes altitudes  $y$ , les couches horizontales de fluides ne glissent pas les unes sur les autres : à cause de la viscosité du fluide, les couches les plus rapides entraînent les couches les plus lentes (elles leur transmettent leur quantité de mouvement) et inversement les couches les plus lentes freinent les couches les plus rapides. Une contrainte visqueuse, cisailante, est donc exercée par chaque couche de fluide sur ses consœurs adjacentes. Ces contraintes cisailantes existent pour deux raisons : 1) premièrement parce que les couches de fluides adjacentes ont des vitesses différentes, il existe donc un gradient de vitesse ; et 2) parce que le fluide est visqueux : si la viscosité du fluide était nulle alors le gradient de vitesse n'entraînerait pas de contrainte cisailante.

Newton a déduit de ces observations la loi suivante (*rhéologie des fluides Newtoniens*) :

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}. \quad (3)$$

La contrainte cisailante  $\tau$  est créée par le *gradient* de vitesse  $dv/dy$  : c'est parce qu'il existe une variation de vitesse perpendiculairement à la direction d'écoulement qu'il y a cisaillement (Figure 4).

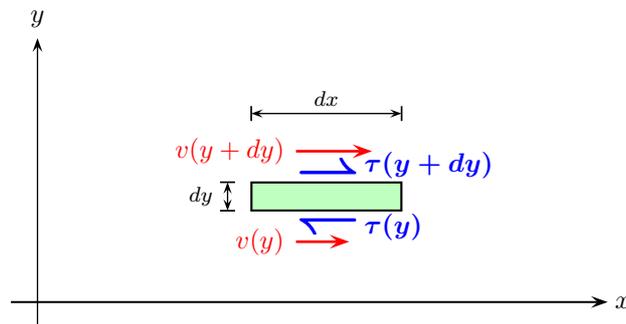


FIGURE 4 – Zoom sur une petite portion du fluide cisailé de la Figure 3. La vitesse  $v(y)$  (flèches rouges) est différente de part et d'autre d'un petit élément de fluide (hauteur  $dy$  et largeur  $dx$ ), ce qui induit des contraintes cisailantes  $\tau(y)$  (flèches bleues) de part d'autre de l'élément.

1. Nataf, H.-C. and J. Sommeria (2000). *La physique de la Terre*, chapitre 1. Belin CNRS Éditions.

Convention de signe : la contrainte cisailante  $\tau$  est considérée positive si elle traduit l'accélération d'une couche de fluide par une autre située au-dessus d'elle<sup>2</sup> (Figure 4), ce qui correspond aussi au freinage de cette même couche par celle qui se trouve juste en dessous d'elle. Autrement dit, un gradient de vitesse positif correspond à une contrainte cisailante positive (équation 3), et inversement.

Dans le cas particulier de notre expérience (Figure 3), la vitesse  $v$  varie linéairement entre les deux plaques, son gradient est donc constant :

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\mathcal{V}}{d} \Rightarrow \tau = \mu \frac{\mathcal{V}}{d}.$$

Les contraintes cisailantes  $\tau$  dans cette expérience sont donc constantes partout dans le fluide. Ainsi, puisqu'une contrainte résulte de l'action d'une force sur une surface, la force  $F$  appliquée à la plaque est reliée à la contrainte  $\tau$  par la relation  $F = \tau S$  et on retrouve la relation observée dans l'expérience :

$$F = \tau S = \mu \frac{\mathcal{V} S}{d}.$$

## 4 Cas simples d'écoulement de fluide

Nous allons aborder quelques cas simples d'écoulement de fluide et déterminer, dans chaque cas, comment la vitesse  $\vec{v}$  varie en fonction de la position dans l'écoulement.

### 4.1 Écoulement dans un chenal horizontal

Regardons tout d'abord le cas de l'écoulement d'un fluide visqueux dans un chenal horizontal, à deux dimensions. Ce cas représenterait, par ex., un écoulement de magma dans un filon, un écoulement de fluide dans une fissure lors d'une injection par fracturation hydraulique, ou encore un écoulement dans un canal de dérivation vu de dessus (un canal destiné à diminuer le débit de crue d'un cours d'eau). L'écoulement a lieu à cause d'une différence de pression entre l'amont et l'aval du chenal (Figure 5), et on traite le problème à deux dimensions, dans le plan  $Oxy$ , en considérant que l'écoulement n'a lieu que dans la direction et le sens de l'axe  $Ox$ .

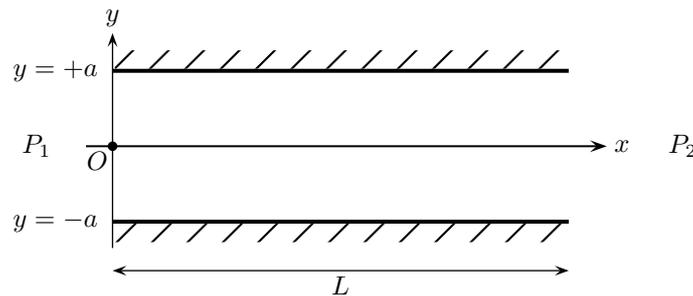


FIGURE 5 – Schéma d'un écoulement dans un chenal horizontal. L'écoulement est confiné latéralement par des parois imperméables en  $y = \pm a$ , et il s'effectue de gauche à droite parallèlement à la direction  $Ox$  grâce à une différence de pression  $\Delta P = P_1 - P_2$  appliquée sur une distance  $L$ .

2. Cela revient à définir  $\tau$  comme positive si elle est orientée dans le même sens qu'un axe du repère lorsqu'elle agit sur une surface orientée positivement (c-à-d une surface avec un vecteur unitaire normal orienté dans le même sens qu'un axe du repère) ou bien si  $\tau$  est dans le sens opposé à l'axe lorsqu'elle agit sur une surface négative. Dans les autres cas,  $\tau$  est définie comme négative.

Avec cette géométrie, et en considérant que le fluide est incompressible, l'équation de continuité s'écrit

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Puisque le fluide ne s'écoule que dans le sens de l'axe  $Ox$ ,  $v_y = 0$ . On déduit donc de l'équation de continuité qu'en tout point de l'écoulement  $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ , et donc que la vitesse ne dépend que de la position  $y$ . Si l'écoulement est stationnaire (ses caractéristiques ne dépendent pas du temps), la deuxième loi de Newton impose alors que la somme des forces qui agissent sur le fluide est nulle, et en décomposant cette somme des forces suivant les deux axes du repère on obtient

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= \Sigma \vec{F}_{\parallel Ox} + \Sigma \vec{F}_{\parallel Oy} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \Sigma F_{\parallel Ox} &= 0 \quad \text{et} \quad \Sigma F_{\parallel Oy} = 0, \end{aligned}$$

où  $\Sigma \vec{F}_{\parallel Ox}$  est la somme des forces parallèles à l'axe  $Ox$  et  $\Sigma \vec{F}_{\parallel Oy}$  la somme des forces parallèles à l'axe  $Oy$ .

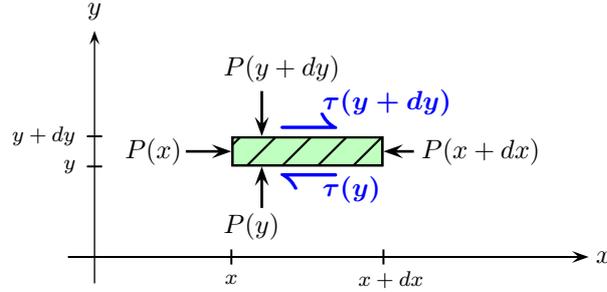


FIGURE 6 – Bilan des forces agissant sur un élément de fluide de hauteur  $dy$ , de largeur  $dx$  et de profondeur  $dz$  (perpendiculaire à la figure et non représenté ici), et donc de volume  $\Delta V = dx dy dz$ .

Les forces qui agissent sur le volume élémentaire de fluide parallèlement à l'axe  $Ox$  (Figure 6) sont induites par la pression  $P$  qui s'exerce sur ses parois latérales : forces  $P(x)dydz$  sur la paroi gauche et  $-P(x+dx)dydz$  sur la paroi droite, et par les contraintes cisailantes  $\tau$  qui agissent sur les parois supérieure et inférieures : forces  $-\tau(y)dx dz$  en  $y$  et  $\tau(y+dy)dx dz$  en  $y+dy$ . Ainsi la somme des forces parallèles à l'axe  $Ox$  s'écrit

$$\begin{aligned} \Sigma F_{\parallel Ox} &= [P(x) - P(x+dx)] dy dz + [-\tau(y) + \tau(y+dy)] dx dz \\ &= -\frac{[P(x+dx) - P(x)]}{dx} dx dy dz + \frac{[\tau(y+dy) - \tau(y)]}{dy} dx dy dz \\ &= -\frac{\partial P(x)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau(y)}{\partial y} dx dy dz \\ &= \left[ -\frac{\partial P(x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau(y)}{\partial y} \right] \Delta V. \end{aligned}$$

Puisque la somme des forces parallèles à  $Ox$  doit être nulle, on en déduit que

$$-\frac{\partial P(x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau(y)}{\partial y} = 0,$$

et en utilisant la loi rhéologique (3) pour les fluides Newtoniens,  $\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$  :

$$\Sigma F_{\parallel Ox} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial P(x)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Lorsqu'on considère les forces parallèles à  $Oy$ , on remarque que l'écoulement ayant lieu le long de l'axe  $Ox$ , il n'y a pas de contraintes cisailantes parallèlement à  $Oy$  (Figure 6). Les forces s'exerçant parallèlement à  $Oy$  sur le volume élémentaire de fluide ne sont donc dues qu'à la pression agissant sur ses parois inférieures et supérieures :

$$\begin{aligned} \Sigma F_{\parallel Oy} &= [P(y) - P(y + dy)] dx dz \\ &= -\frac{[P(y + dy) - P(y)]}{dy} dx dy dz \\ &= -\frac{\partial P(y)}{\partial y} \Delta V, \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Sigma F_{\parallel Oy} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial P(y)}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

La pression dans le fluide ne dépend donc que de la position  $x$ , et l'écoulement est donc régi par l'équation (4) :

$$-\frac{dP}{dx} + \mu \frac{d^2 v}{dy^2} = 0. \quad (6)$$

Puisque la pression ne dépend que de  $x$  et la vitesse ne dépend que de  $y$ , on en déduit que

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{d^2 v}{dy^2} = \text{constante},$$

et cette équation se résout facilement à l'aide des conditions aux limites (Figure 5) :

$$\frac{dP}{dx} = \text{constante} \Rightarrow P(x) = P_1 - \frac{\Delta P}{L} x,$$

où l'on utilise le fait que  $P(x = 0) = P_1$  et  $P(x = L) = P_2 = P_1 - \Delta P$ . Donc

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 v}{dy^2} &= \frac{dP}{dx} = -\frac{\Delta P}{L}, \\ \Leftrightarrow v(y) &= -\frac{\Delta P}{2\mu L} y^2 + \lambda_1 y + \lambda_2, \end{aligned}$$

et les deux constantes d'intégration  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  se déduisent des conditions aux limites pour la vitesse :

$$v(y = \pm a) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = \frac{\Delta P}{2\mu L} a^2,$$

On trouve ainsi que le profil de vitesse dans le chenal est parabolique (Figure 7) :

$$v(y) = \frac{\Delta P}{2\mu L} (a^2 - y^2). \quad (7)$$

Remarques :

1.  $v(y) \propto \Delta P/L = -dP/dx$ , c-à-d que la vitesse est proportionnelle à l'opposé du gradient de pression : la pression *diminue* le long de l'écoulement ;

2. la vitesse est maximale au centre du chenal :  $v_{max} = v(y = 0) = \frac{\Delta P}{2\mu L} a^2$  ;

3. la vitesse moyenne  $v_{moyen}$  (notée aussi  $\bar{v}$ ) vaut

$$\bar{v} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a v(y) dy = \frac{\Delta P}{3\mu L} a^2 = \frac{2}{3} v_{max} ;$$

4. le débit volumique de l'écoulement dans le chenal est

$$Q_v = \iiint v(y) dy dz = \int_0^D dz \int_{-a}^a v(y) dy = \frac{2\Delta P}{3\mu L} a^3 D,$$

où  $D$  est la profondeur du chenal selon  $Oz$ . Autrement dit, le débit volumique est le produit de la vitesse moyenne  $\bar{v}$  et de la section  $S = 2aD$  du chenal perpendiculaire à l'écoulement :

$$Q_v = \bar{v} S = 2aD\bar{v} = \frac{2\Delta P}{3\mu L} a^3 D ;$$

5. le débit massique de l'écoulement dans le chenal est

$$Q_m = \iiint \rho v(y) dy dz = \rho Q_v = \rho \frac{2\Delta P}{3\mu L} a^3 D.$$

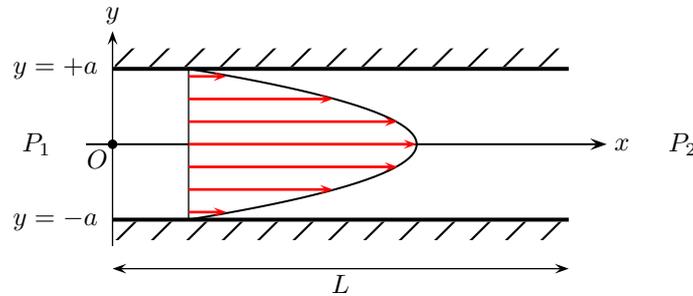


FIGURE 7 – Profil de vitesse (courbe noire) et vecteurs vitesses à différentes positions  $y$  (flèches rouges) dans le chenal horizontal.

## 4.2 Écoulement dans une conduite cylindrique horizontale

Changeons maintenant la géométrie de l'écoulement et étudions le cas d'un écoulement visqueux dans une conduite horizontale cylindrique de rayon  $R$ , comme représenté sur la Figure 8. Ce cas représenterait par ex. l'écoulement d'un magma visqueux dans un tunnel de lave ou bien l'écoulement d'un fluide visqueux dans un forage horizontal. Comme dans le cas précédent, l'écoulement a lieu à cause d'une différence de pression  $\Delta P$  appliquée sur une distance  $L$  le long de la conduite, et on suppose que l'écoulement n'a lieu que le long de la conduite parallèlement à l'axe  $Ox$ .

La différence de pression  $\Delta P$  exerce une force  $\Delta P \pi y^2$  sur la section d'un cylindre de fluide fictif de rayon  $y$  dans la conduite (voir la section en coupe de la Figure 8). Si l'écoulement est stationnaire, alors cette force est équilibrée par les forces de cisaillement exercées par l'écoulement visqueux sur la surface longitudinale  $2\pi y L$  de ce même cylindre fictif. Ces forces de cisaillement sont induites par les contraintes cisailantes  $\tau(y)$ .

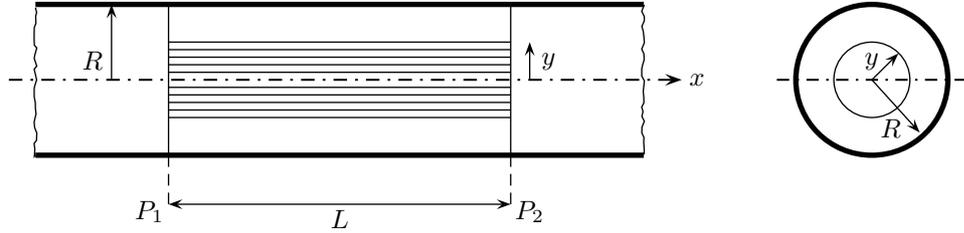


FIGURE 8 – Sections longitudinale (à gauche) et perpendiculaire (à droite) d'un écoulement dans une conduite cylindrique horizontale de rayon  $R$ . Le fluide s'écoule dans le même sens que  $Ox$  grâce à une différence de pression  $\Delta P = P_1 - P_2 > 0$  appliquée sur une distance  $L$ . La position radiale est repérée par  $y$ .

Ainsi, en régime stationnaire

$$\begin{aligned} \Sigma F_{\parallel Ox} = 0 &\Rightarrow \Delta P \pi y^2 + 2\pi y L \tau(y) = 0, \\ &\Leftrightarrow \tau(y) = -\frac{\Delta P y}{L} \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Et en utilisant la loi rhéologique (3) pour les fluides Newtoniens :

$$\begin{aligned} \tau(y) = \mu \frac{dv}{dy} &= -\frac{\Delta P y}{L} \frac{y}{2}, \\ \Rightarrow v(y) &= -\frac{\Delta P}{4\mu L} y^2 + C_1, \end{aligned}$$

où  $C_1$  est une constante d'intégration que l'on détermine grâce à la condition aux limites d'une vitesse d'écoulement nulle sur les parois de la conduite :  $v(y = R) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2$ . On trouve ainsi que le profil de vitesse dans une conduite horizontale de rayon  $R$  est lui aussi parabolique :

$$v(y) = \frac{\Delta P}{4\mu L} (R^2 - y^2). \quad (8)$$

On en déduit que

1. la vitesse maximale au centre du chenal est  $v_{max} = \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2$  ;
2. la vitesse moyenne  $\bar{v} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v(y) 2\pi y dy = \frac{\Delta P}{8\mu L} R^2 = \frac{1}{2} v_{max}$  ;
3. le débit volumique dans la conduite  $Q_v = \int_0^R v(y) 2\pi y dy = \bar{v} \pi R^2 = \frac{\Delta P}{8\mu L} \pi R^4$ . Cette relation est la *Loi de Hagen-Poiseuille* ;

4. le débit massique dans la conduite  $Q_m = \int_0^R \rho v(y) 2\pi y dy = \rho Q_v = \rho \frac{\Delta P}{8\mu L} \pi R^4$ .

Comme dans le cas précédent, c'est le gradient de pression  $-\Delta P/L$  qui importe et détermine (avec la viscosité et le rayon) l'ordre de grandeur de la vitesse d'écoulement et donc le débit du fluide.

## 5 Dynamique des fluides visqueux : l'équation de Navier-Stokes

Nous venons de voir deux exemples d'écoulement pour lesquels une différence de pression était imposée et forçait l'écoulement. Cependant, dans la nature les forces liées à la gravité participent également à l'écoulement. Nous allons donc traiter le cas général qui est décrit par l'équation de Navier-Stokes. Cette équation traduit la deuxième loi de Newton, appliquée aux fluides, qui stipule que la somme des forces qui s'exercent sur un corps est égale à la masse de ce corps multipliée par son accélération :

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}.$$

Il nous faut donc déterminer comment les trois termes de cette équation s'écrivent pour un fluide en mouvement. Cet exercice peut paraître fastidieux mais il est intéressant car il révèle comment est construite l'équation de Navier-Stokes et ce que signifie chacun de ces termes. Toutefois, les plus impatientes ou ceux qui ne sont pas intéressés par cet exercice peuvent la découvrir tout de suite dans la section 5.4.

### 5.1 Masse du fluide

Commençons par le plus facile, c-à-d la masse d'un petit volume élémentaire de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ . Son volume  $\Delta V = dx dy dz$ , et on en déduit aisément la masse :

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho dx dy dz. \quad (9)$$

### 5.2 Accélération du fluide

L'accélération d'un fluide n'est pas aussi simple que celle d'un corps solide. En effet, une particule de fluide peut accélérer pour deux raisons : parce que les conditions de l'écoulement changent avec le temps mais aussi parce qu'elle peut être entraînée par les particules environnantes, celles-ci pouvant l'accélérer si elles sont plus rapides (à cause d'un rétrécissement de la géométrie de l'écoulement par ex., comme illustré sur la Figure 1) ou au contraire la ralentir si elles sont plus lentes. Ainsi, l'accélération totale d'une particule de fluide qui se déplace à une vitesse  $\vec{v}$  est la somme d'une accélération temporelle et d'une accélération spatiale (ou *advective*). La vitesse  $\vec{v}$  d'une particule de fluide varie donc potentiellement dans le temps et dans l'espace, et son accélération totale (appelée aussi la dérivée *particulaire* ou la dérivée *totale* de la vitesse) s'écrit  $\frac{D\vec{v}}{Dt}$  pour la différencier de  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  qui ne représente que l'accélération temporelle.

Puisque la vitesse  $\vec{v}$  d'une particule de fluide peut varier dans le temps et dans l'espace, on peut l'écrire

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) = (v_x, v_y, v_z) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z, t) \\ v_y(x, y, z, t) \\ v_z(x, y, z, t) \end{pmatrix}.$$

Regardons tout d'abord comment s'écrit la composante selon  $Ox$  de l'accélération totale de cette particule. Puisque  $v_x$  dépend de  $x, y, z$  et  $t$ , la différentielle totale  $dv_x$  s'écrit

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz,$$

et la dérivée totale est la dérivée par rapport au temps de cette différentielle totale :

$$\begin{aligned} \frac{Dv_x}{Dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_x \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_x. \end{aligned}$$

En procédant de la même façon pour les composantes de l'accélération totale selon  $Oy$  et  $Oz$ , on trouve que  $\frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_y$  et  $\frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_z$ .

Ainsi, les trois composantes de l'accélération totale du fluide dans le volume élémentaire sont

$$\begin{aligned} \frac{Dv_x}{Dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{Dv_y}{Dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

### 5.3 Somme des forces

La somme des forces qui s'exercent sur un volume élémentaire est la somme des forces  $\vec{F}_v$  qui agissent sur tout son volume et des forces  $\vec{F}_s$  qui agissent sur ses surfaces.

#### 5.3.1 Forces de volume $\vec{F}_v$

Les forces de volume sont les forces induites par la gravité, qui agit sur toutes les particules de fluides du volume élémentaire, et puisque ce volume possède une masse  $\Delta m = \rho \Delta V$ , on en déduit que

$$\vec{F}_v = \begin{pmatrix} F_{vx} \\ F_{vy} \\ F_{vz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta m g_x \\ \Delta m g_y \\ \Delta m g_z \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} \Delta V.$$

### 5.3.2 Forces de surface $\vec{F}_s$

Les forces qui s'exercent sur les surfaces du volume élémentaires peuvent agir soit perpendiculairement soit tangentielllement à ces surfaces. Dans le premier cas, les forces sont induites par la pression du fluide qui s'exerce perpendiculairement aux surfaces, alors que dans le second cas les forces sont induites par les contraintes cisailantes qui agissent parallèlement aux surfaces. Ces contraintes sont représentées sur la Figure 9, où une contrainte agit sur une surface repérée par la position  $i$  et est orientée dans la direction  $j$  : les contraintes dont les indices  $i$  et  $j$  sont différents représentent les contraintes cisailantes, qui sont alors notées  $\tau_{ij}$ , alors que les contraintes  $\sigma_{ii}$  dont les indices sont identiques représentent les contraintes normales aux surfaces.

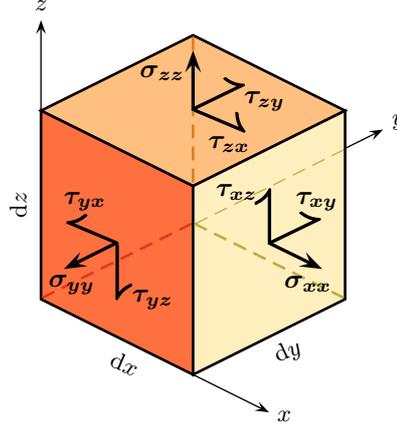


FIGURE 9 – Les contraintes cisailantes  $\tau_{ij}$  et normales  $\sigma_{ii}$  s'exercent sur les six surfaces du volume élémentaire de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  mais par souci de clarté seules les contraintes agissant sur les surfaces en  $x + dx$  (jaune), en  $y$  (orange foncé) et en  $z + dz$  (orange clair) sont représentées sur cette figure.

Tout comme les forces de volume, les forces de surface sont des vecteurs à trois composantes :  $\vec{F}_s = (F_{sx}, F_{sy}, F_{sz})$ . Chacune de ces forces de surface est le produit d'une contrainte par la surface sur laquelle cette contrainte agit. Ainsi, la somme des forces de surface parallèles à l'axe  $Ox$  (en notant positivement les forces orientées dans le même sens que  $Ox$ ) est égale à

$$\begin{aligned} \Sigma F_{sx} &= \sigma_{xx}(x + dx)dydz - \sigma_{xx}(x)dydz \\ &\quad + \tau_{zx}(z + dz)xdy - \tau_{zx}(z)xdy \\ &\quad + \tau_{yx}(y + dy)xdz - \tau_{yx}(y)xdz, \\ \Leftrightarrow \Sigma F_{sx} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz \\ \Leftrightarrow \Sigma F_{sx} &= \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \Delta V. \end{aligned}$$

Dans un fluide Newtonien, les contraintes et les déformations sont reliées par les relations

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \sigma_{yy} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \sigma_{zz} &= -P + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \tau_{zy} &= \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Ces relations sont considérées ici comme établies et ne sont donc pas démontrées. Toutefois, il faut noter qu'elles correspondent au cas où les pressions qui s'exercent sur le volume élémentaire sont définies comme positives (encore une autre convention...).

En injectant les expressions pour  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$  et  $\tau_{zx}$  dans la somme des forces de surface parallèles à  $Ox$  que nous venons de déterminer, on obtient alors

$$\begin{aligned}\Sigma F_{sx} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( -P + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right) \Delta V \\ \Leftrightarrow \Sigma F_{sx} &= \left( -\frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \Delta V \\ \Leftrightarrow \Sigma F_{sx} &= \left( -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) \Delta V \\ \Leftrightarrow \Sigma F_{sx} &= \left( -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right) \Delta V.\end{aligned}$$

Le dernier terme à droite entre parenthèses est nul d'après l'équation de continuité :  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ . Ainsi, la somme des forces de surfaces parallèles à l'axe  $Ox$  se réduit à

$$\Sigma F_{sx} = \left( -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \right) \Delta V = \left( -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x \right) \Delta V.$$

En réalisant le même raisonnement et les mêmes manipulations mathématiques pour les forces de surfaces parallèles aux deux autres axes, on obtient

$$\begin{aligned}\Sigma F_{sy} &= \left( -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \right) \Delta V = \left( -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y \right) \Delta V \\ \Sigma F_{sz} &= \left( -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \right) \Delta V = \left( -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z \right) \Delta V\end{aligned}$$

## 5.4 Équation de Navier-Stokes

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour écrire la deuxième loi de Newton pour notre volume élémentaire de fluide selon les trois axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . En simplifiant tous les termes par le volume  $\Delta V$  et en écrivant ces équations dans l'autre sens ( $m\vec{a} = \Sigma \vec{F}$ , façon dont elles sont habituellement écrites), on obtient les trois composantes de l'**équation de Navier-Stokes** :

$$\begin{cases} \rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ \rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\ \rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z, \end{cases}$$

ou bien sous forme vectorielle :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}. \quad (10)$$

Autres repères : les composantes de l'équation de Navier-Stokes dans des repères cylindriques et sphériques sont détaillées en annexes A.2 et A.3.

## 6 Écoulements laminaires et turbulents : le nombre de Reynolds<sup>3</sup>

L'équation de Navier-Stokes (10) est généralement trop compliquée pour être résolue (il n'a toujours pas été démontré qu'il existe toujours une solution à cette équation...) sauf dans quelques cas particuliers bien définis tels que les exercices donnés en annexe B, par ex. Néanmoins, lorsqu'on trouve une solution, elle correspond toujours à l'un des deux régimes d'écoulement possibles : soit l'écoulement est laminaire, soit l'écoulement est turbulent.

### 6.1 Écoulements laminaires et turbulents

Les caractéristiques physiques principales d'un **écoulement laminaire** sont les suivantes :

- vitesse constante au cours du temps en tout point de l'écoulement ;
- chaque élément de fluide se déplace le long d'une trajectoire bien définie (*ligne de courant*) et « lisse » ;
- toutes les particules de fluide partant d'un même point donné de l'écoulement (à des temps différents) suivent la même trajectoire, ou ligne de courant.

À l'inverse, dans un **écoulement turbulent** :

- aucune des caractéristiques du régime laminaire n'est présente ;
- l'écoulement est irrégulier avec des fluctuations rapides et soudaines de la vitesse à la fois dans le temps et dans l'espace (Figure 10) ;
- la trajectoire suivie par une particule de fluide est très irrégulière et change continuellement ;
- différentes particules de fluides partant d'un même point donné de l'écoulement (à des temps différents) suivent des trajectoires différentes ;
- les fluctuations de vitesse sont spontanées, dans le temps et dans l'espace, même si les conditions aux limites de l'écoulement restent les mêmes (Figure 10).

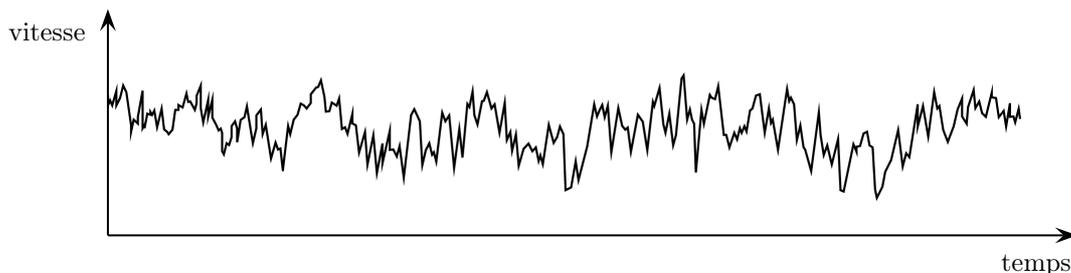


FIGURE 10 – Fluctuations de vitesse (sans unité) en un point fixe dans un écoulement turbulent. (Adapté de Tritton, D. J. (1988). *Physical Fluid Dynamics – 2nd ed.*, Fig. 2.6. Oxford University Press.)

Regardons maintenant les différents termes de l'équation de Navier-Stokes afin de comprendre leur rôle relatif dans les écoulements laminaires et turbulents. Il nous faut tout d'abord remarquer que la pression  $P$  présente dans l'équation de Navier-Stokes (10) est la pression totale qui s'exerce en un point de l'écoulement. Or une partie de cette pression est simplement liée au poids de la colonne de fluide au-dessus du point où on mesure la pression : cette

---

3. Cette section est pour partie reprise du cours de Ariel Provost *Introduction à la Dynamique des Fluides Géophysiques. Problèmes et concepts de mécanique des fluides* (DynaFlu.doc, Ariel Provost, 17/10/2008).

partie de la pression est la pression hydrostatique, et elle ne joue aucun rôle dans l'écoulement (même un fluide au repos possède une pression hydrostatique). La pression  $P$  dans un écoulement est donc la somme de cette pression hydrostatique,  $\rho g z$ , et d'une pression *dynamique*  $p$  directement liée à l'écoulement :  $P = \rho g z + p$ . Si par soucis de simplicité on se limite aux écoulements stationnaires ( $\partial \vec{v} / \partial t = \vec{0}$ ) alors l'équation de Navier-Stokes (10) se réduit à

$$\begin{aligned} \rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} &= -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \\ \Leftrightarrow \rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} &= -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v}, \\ \Leftrightarrow -\vec{\nabla} p &= \rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} - \mu \nabla^2 \vec{v}. \end{aligned} \quad (11)$$

La force motrice (par unité de volume) de l'écoulement étant  $-\vec{\nabla} p$ , ce terme ne peut être négligeable devant aucun des deux autres. Par contre, il est plausible que l'un de ces deux termes soit négligeable devant l'autre, c-à-d que la force motrice  $-\vec{\nabla} p$  soit presque égale au terme  $\rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}$  ou au terme  $\mu \nabla^2 \vec{v}$ . Le terme  $\rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}$  représente les forces « inertielles » (par unité de volume) présentes dans l'écoulement, forces pour lesquelles les frottements sont négligeables : ces forces transfèrent la quantité de mouvement du fluide par mouvement de matière. Le terme  $\mu \nabla^2 \vec{v}$  représente quant à lui les forces « visqueuse » (par unité de volume) induites par la viscosité du fluide et pour lesquelles l'accélération du fluide est négligeable : ces forces transfèrent la quantité de mouvement du fluide par diffusion visqueuse.

Ainsi, si les forces inertielles sont négligeables par rapport aux forces visqueuses, l'équation de Navier-Stokes stationnaire se réduit à l'équilibre entre force motrice et forces visqueuses qui caractérise les **écoulement laminaires** :

$$\left| \rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right| \ll \left| \mu \nabla^2 \vec{v} \right| \Rightarrow \vec{\nabla} p = \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (12)$$

À l'inverse, si ce sont les forces visqueuses qui sont négligeables par rapport aux forces inertielles, l'équation de Navier-Stokes stationnaire se réduit à l'équilibre entre force motrice et forces inertielles qui caractérise les **écoulement turbulents** :

$$\left| \rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right| \gg \left| \mu \nabla^2 \vec{v} \right| \Rightarrow \vec{\nabla} p = -\rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}. \quad (13)$$

## 6.2 Nombre de Reynolds

On définit le **nombre de Reynolds  $Re$**  comme le rapport entre l'ordre de grandeur des forces inertielles,  $\left| \rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right|$ , et celui des forces visqueuses,  $\left| \mu \nabla^2 \vec{v} \right|$ .

### 6.2.1 Comparaison des ordres de grandeur

Dans l'écoulement considéré, la vitesse atteint un maximum  $v_0$  quelque part dans l'écoulement, et la géométrie de cet écoulement peut être caractérisée par une échelle de longueur  $L$  (la distance séparant deux parois entre lesquelles l'écoulement a lieu ou la taille d'un objet autour duquel le fluide s'écoule par ex.). L'ordre de grandeur caractéristique de la vitesse de l'écoulement est donc  $v_0$  (c-à-d que  $|\vec{v}|$  est presque partout comparable à  $v_0$ , inférieure certes mais pas d'un facteur 10 ou plus), celui de ses dérivées premières et donc des composantes de  $\vec{\nabla} v$  est  $v_0/L$ , et celui de ses dérivées secondes et donc de  $\nabla^2 v$  est  $v_0/L^2$ . En reportant ces

résultats dans la définition du **nombre de Reynolds**, on obtient l'ordre de grandeur de ce *nombre sans dimension* :

$$Re = \frac{|\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}|}{|\mu \nabla^2 \vec{v}|} = \frac{|\rho v_0 (v_0/L)|}{|\mu (v_0/L^2)|} = \frac{\rho v_0 L}{\mu}.$$

Le calcul du nombre de Reynolds permet de distinguer les écoulements laminaires des écoulements turbulents. Quelque soit l'écoulement considéré, l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds nous permet de déterminer si cet écoulement a lieu en régime laminaire ou turbulent :

$$\begin{aligned} Re \ll 1 &\Leftrightarrow |\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}| \ll |\mu \nabla^2 \vec{v}| \Rightarrow \text{écoulement laminaire,} \\ Re \gg 1 &\Leftrightarrow |\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}| \gg |\mu \nabla^2 \vec{v}| \Rightarrow \text{écoulement turbulent.} \end{aligned}$$

Lorsque le nombre de Reynolds a une valeur proche de 1, les trois termes de l'équation de Navier-Stokes (11) sont du même ordre et jouent vraisemblablement un rôle d'importance similaire dans l'écoulement. La transition d'un régime à l'autre (laminaire  $\leftrightarrow$  turbulent) n'a donc pas lieu de manière abrupte à une valeur bien déterminée du nombre de Reynolds mais s'effectue au contraire sur une gamme, relativement étroite, autour d'une valeur critique  $Re_c \simeq 1000$  : on considère qu'un écoulement est laminaire lorsque  $Re < 1$ , turbulent lorsque  $Re > 2000$ , et que la gamme de valeurs  $1 < Re < 2000$  correspond à la transition entre ces deux régimes.

### 6.2.2 Dédimensionnalisation de l'équation de Navier-Stokes

On peut aussi dédimensionnaliser l'équation de Navier-Stokes. Pour cela, on exprime toutes les mesures de distances par rapport à l'échelle caractéristique de longueur  $L$  de l'écoulement : la variable de position  $x$  peut alors s'écrire  $x = Lx'$ , où la variable de position  $x'$  est sans dimension (elle prend la valeur 1 lorsque  $x = L$ , la valeur 2.3 lorsque  $x = 2.3L$ , etc.). De même, on peut dédimensionnaliser les variables de vitesse, de temps et de pression à l'aide de leur échelle caractéristique respectives  $v_0$ ,  $L/v_0$  et  $\rho v_0^2$  :  $v = v_0 v'$ ,  $t = (L/v_0)t'$  et  $p = \rho v_0^2 p'$ . À l'aide de ces expressions, l'équation de Navier-Stokes devient alors

$$(\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' = -\vec{\nabla}' p' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \vec{v}'.$$

Cette équation n'a pas de dimension, elle est donc identique à toutes les échelles et pour tous les fluides : elle reste la même à l'échelle d'un fleuve comme à l'échelle d'un filon magmatique, et si  $x' = 0.5$  on se trouve alors au milieu de l'écoulement, quelque soit sa taille réelle et qu'il s'agisse d'eau ou de magma. De plus, cette équation dédimensionnée met en lumière la signification du nombre (sans dimension) de Reynolds : on retrouve l'équation de Navier-Stokes (12) pour les écoulements laminaires lorsque  $Re \ll 1$  et l'équation de Navier-Stokes (13) pour les écoulements turbulents lorsque  $Re \gg 1$ .

### 6.3 Couche limite

Quand  $Re \ll 1$ , le terme inertiel est négligeable devant le terme visqueux, et l'équation de Navier-Stokes peut se simplifier pour prendre la forme (12). À l'inverse, quand  $Re \gg 1$ , c'est le terme visqueux qui est négligeable devant le terme inertiel et l'équation de Navier-Stokes peut être approximée par l'équation (13) ; l'écoulement est alors celui d'un « fluide parfait ».

Mais il y a une différence très importante entre ces deux cas extrêmes. Le terme inertiel peut être partout négligeable devant le terme visqueux, et donc l'approximation (12) s'applique sans complication particulière. Par contre, le terme de frottement visqueux est forcément prépondérant au voisinage immédiat des parois (où la vitesse et le nombre de Reynolds s'annulent). L'approximation pour les fluides turbulents donnée par l'équation (13) ne peut donc être valable que *presque* partout : dans les écoulements turbulents, il existe près des parois une **couche limite** (*boundary layer*) où le terme visqueux domine et où il doit donc être pris en compte. Cette couche limite est la source de nombreuses instabilités et elle est à l'origine d'une grande partie de la complexité des écoulements réels.

L'épaisseur  $\delta$  de la couche limite a pour ordre de grandeur

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}} = \sqrt{\frac{\mu L}{\rho v_0}}, \quad (14)$$

où  $L$  est la dimension caractéristique de l'écoulement (distance entre parois, diamètre d'un obstacle, etc.). La Figure 11(b) illustre cette couche limite et son effet sur l'écoulement. Cette figure représente le profil de vitesse autour d'une plaque fine parallèle à la direction d'écoulement. Dans ce cas là, la dimension caractéristique  $L$  de l'écoulement est la longueur de la plaque (plus précisément, la position le long de la plaque, mesurée depuis son point le plus en amont de l'écoulement) : l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite croît donc de part et d'autre de la plaque (équation 14). Derrière la plaque, en aval de l'écoulement, le fluide modifie peu à peu sa vitesse pour recouvrer sa valeur caractéristique  $v_0$  : cette zone de recouvrement est le sillage créé par la plaque, zone dans laquelle la vitesse est plus faible que  $v_0$ . C'est ce phénomène qu'on retrouve juste derrière un bateau, un nageur ou un cycliste et qui explique pourquoi il est plus facile de se mouvoir en restant en ligne les uns derrière les autres. Pour une vitesse caractéristique d'écoulement donnée, l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite et celle du sillage augmentent avec la longueur  $L$  de la plaque. À l'inverse,  $\delta$  décroît avec  $Re$  : plus un écoulement

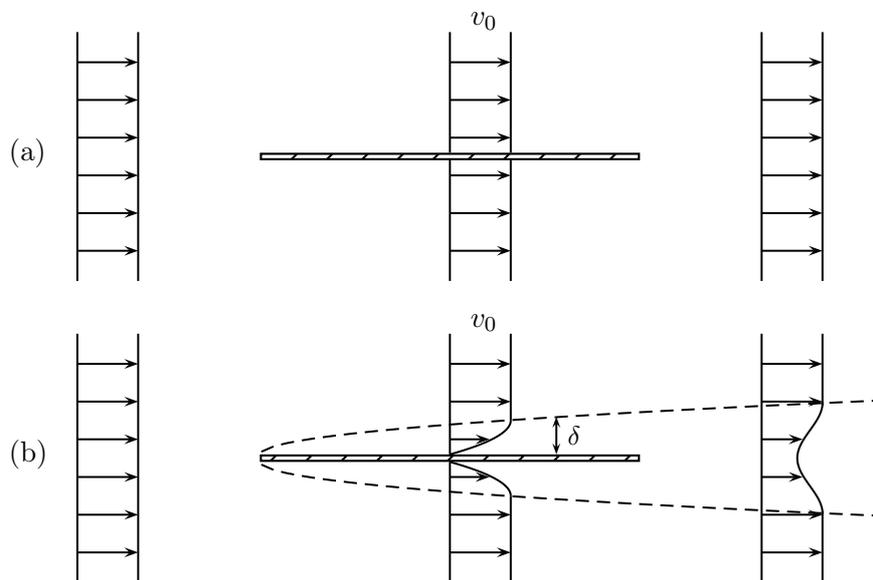


FIGURE 11 – Profils de vitesse autour d'une plaque fine : (a) cas d'un fluide parfait (viscosité nulle); (b) fluide réel à nombre de Reynolds élevé.  $v_0$  est la vitesse de l'écoulement loin de la plaque. Les lignes en pointillés indique les bords de la couche limite et du sillage en aval de la plaque. (Adapté de Tritton, D. J. (1988). *Physical Fluid Dynamics – 2nd ed.*, Fig. 8.2. Oxford University Press.)

est turbulent, et plus l'épaisseur de la couche limite et celle du sillage sont faibles.

## 7 Écoulement laminaire autour d'une sphère : la loi de Stokes

L'écoulement d'un fluide autour d'une sphère est un problème qui a été abordé il y a près de deux siècles par Stokes<sup>4</sup>. La solution à ce problème a donné la **Loi de Stokes** et la **vitesse de Stokes** qui sont appliquées à de nombreuses situations en sciences de la Terre comme par ex. le transport des sédiments par l'air et l'eau en sédimentologie, le comportement des aérosols dans l'atmosphère, la chute de tephras depuis un panache volcanique, ou encore le comportement des cristaux dans les magmas (annexe B.3.1). La vitesse de Stokes est également utilisée pour mesurer la viscosité des fluides, dont les magmas à faible viscosité, à l'aide d'un viscosimètre à bille (annexe B.3.2).

### 7.1 Loi de Stokes

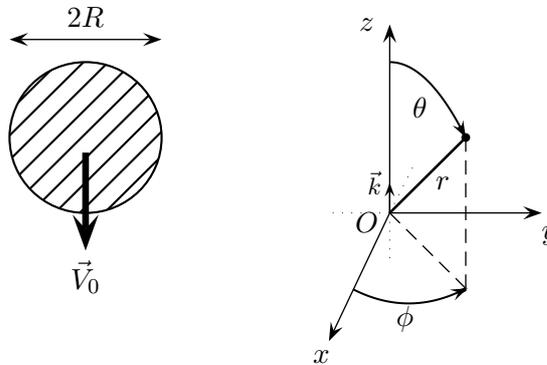


FIGURE 12 – Chute d'une sphère rigide dans un fluide au repos de masse volumique  $\rho_f$  et de viscosité  $\mu_f$ . La sphère a un rayon  $R$  et chute avec une vitesse constante  $\vec{V}_0 = V_0 \vec{k}$  parallèlement à l'axe  $Oz$  dans un repère sphérique  $(O, r, \theta, \phi)$ .

La géométrie du problème est illustrée par la Figure 12, où une sphère de rayon  $R$  se déplace à une vitesse constante  $\vec{V}_0$  (sous l'action de son propre poids, par ex.) dans un fluide au repos de masse volumique  $\rho_f$  et de viscosité  $\mu_f$ . La géométrie de ce problème est sphérique, ce qui rend particulièrement complexe la résolution de l'équation de Navier-Stokes. Toutefois, plusieurs simplifications peuvent être faites pour faciliter cette résolution. On suppose que la sphère est rigide, qu'elle se déplace verticalement, parallèlement à l'axe  $Oz$ , et qu'elle ne subit aucune rotation. Cette dernière simplification impose qu'il n'y a pas de mouvement de fluide dans le plan horizontal ( $v_\phi = 0$ ) et que le champ de vitesse ne dépend pas de l'angle  $\phi$  (les dérivées partielles  $\partial/\partial\phi$  des composantes de la vitesse sont donc nulles).

Tout ceci permet de simplifier considérablement l'équation de Navier-Stokes, et l'utilisation de la fonction de courant (*stream function*, une astuce mathématique qui ne sera pas détaillée ici) et des conditions aux limites

$$v_r(r = R) = V_0 \cos \theta \quad \text{et} \quad v_\theta(r = R) = -V_0 \sin \theta,$$

4. Stokes G.G., 1851. On the effects of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 9, Part II: 8–106.

(afin que la vitesse du fluide soit égale à la vitesse de la sphère à sa surface ; attention  $V_0 < 0$  sur la Figure 12...) donnent la solution suivante :

$$\begin{aligned}v_r(r, \theta) &= V_0 \cos \theta \left( \frac{3R}{2r} - \frac{R^3}{2r^3} \right), \\v_\theta(r, \theta) &= -V_0 \sin \theta \left( \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3} \right).\end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que la vitesse du fluide tend vers 0 à l'infini ( $r \rightarrow \infty$ ) et qu'on retrouve bien les conditions aux limites à la surface de la sphère. À l'aide de cette solution, on peut calculer la traînée (*drag*) exercée par le fluide sur la sphère. L'expression de cette force de frottement est la **Loi de Stokes** :

$$\vec{F}_D = -6\pi R\mu_f\vec{V}_0, \quad (15)$$

où le signe négatif indique que la force de frottement est dirigée dans le sens opposé à la vitesse de déplacement de la sphère (donc sur la Figure 12,  $\vec{F}_D$  est dirigée vers le haut puisque  $\vec{V}_0$  est dirigée vers le bas). Cette loi peut aussi s'exprimer sous la forme d'un coefficient de frottement en normalisant la force de frottement (15) par la force d'impact induite par la pression dynamique  $\frac{1}{2}\rho_f V_0^2$  que le fluide exerce sur la surface  $S = \pi R^2$  de la sphère :

$$C_D = \frac{|F_D|}{\frac{1}{2}\rho_f V_0^2 \pi R^2} = \frac{24\mu_f}{2RV_0\rho_f} = \frac{24}{Re}, \quad (16)$$

où le nombre de Reynolds de l'écoulement autour de la sphère  $Re = \rho_f V_0(2R)/\mu_f$ . Comme le montre la Figure 13, la loi de Stokes reproduit bien les mesures à condition que le nombre de Reynolds ne dépasse pas une valeur de l'ordre de 1 ; pour des valeurs de  $Re$  supérieures à 10 la loi de Stokes sous-estime de façon non négligeable les mesures. Autrement dit, la loi de Stokes n'est valable que pour les écoulements laminaires !

## 7.2 Vitesse de Stokes

La loi de Stokes (15) permet de calculer la vitesse de chute d'une sphère dans un fluide. Alternativement, cette loi permet de déterminer la viscosité d'un fluide si l'on connaît la vitesse de chute d'une sphère dans ce fluide ; c'est le principe du viscosimètre à bille (annexe B.3.2). Un corps en chute libre dans un fluide atteint une vitesse limite lorsque son poids apparent est équilibré par les frottements exercés par le fluide. Dans le cas d'une sphère rigide de rayon  $R$  et de masse volumique  $\rho_s$  (comme celle de la Figure 12), le poids apparent de la sphère est  $\frac{4}{3}\pi R^3 \Delta\rho \vec{g}$ , où par convention la différence de masse volumique  $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$  : si la sphère est plus dense que le fluide,  $\Delta\rho > 0$ , le poids apparent de la sphère est donc du même signe que  $\vec{g}$  et elle chute ; si la sphère est moins dense,  $\Delta\rho < 0$ , son poids apparent est du signe opposé à  $\vec{g}$  et elle remonte ; si la sphère et le fluide ont des masses volumiques identiques, le poids apparent de la sphère est nul, elle ne se déplace donc pas.

La vitesse de Stokes d'une sphère rigide (rayon  $R$ , diamètre  $d$ ) qui chute sous son propre poids dans un fluide visqueux est la vitesse de chute  $v_s$  pour laquelle le poids apparent de la sphère est équilibré par la force de frottement donnée par la loi de Stokes (15) :  $\frac{4}{3}\pi R^3 \Delta\rho g = 6\pi R\mu_f v_s$ . On en déduit ainsi la **vitesse de Stokes** :

$$v_s = \frac{2}{9} \frac{\Delta\rho g R^2}{\mu_f} = \frac{\Delta\rho g d^2}{18\mu_f} \quad \text{pour une sphère rigide.} \quad (17)$$

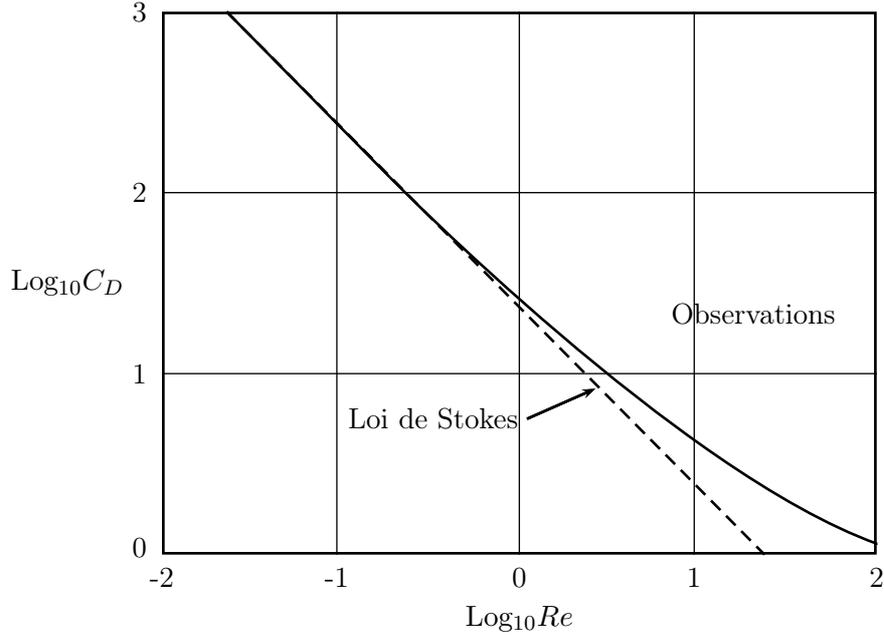


FIGURE 13 – Comparaison des mesures du coefficient de frottement (courbe continue) sur une sphère rigide et de la loi de Stokes  $C_D = 24/Re$  (courbe pointillée, équation 16). (Adapté de Batchelor, G. K. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*, Fig. 4.9.2. Cambridge University Press.)

*Note* : si  $\Delta\rho > 0$  alors  $v_s$  est positive c-à-d dirigée dans le même sens que  $\vec{g}$  (poids apparent positif) ; à l'inverse,  $v_s < 0$  indique que la vitesse de Stokes est dirigée dans le sens opposé à  $\vec{g}$ .

Dans le cas d'une sphère fluide qui se déplace dans un autre fluide (une gouttelette d'aérosol dans l'atmosphère, par ex.), les conditions aux limites de l'écoulement sont différentes : dans le cas d'une sphère rigide, la vitesse du fluide doit être égale à la vitesse de la sphère à sa surface ; dans le cas d'une sphère fluide, ce sont les contraintes cisailantes qui doivent être identiques au contact entre les deux fluides, à la surface de la sphère. Ceci modifie légèrement l'expression de la vitesse de chute qui s'écrit alors

$$v_s = \frac{\Delta\rho g d^2}{12\mu_f} \left( \frac{\mu_f + \mu_s}{\mu_f + \frac{3}{2}\mu_s} \right) \quad \text{pour une sphère fluide,} \quad (18)$$

où  $\mu_s$  est la viscosité du fluide dans la sphère.

Remarques :

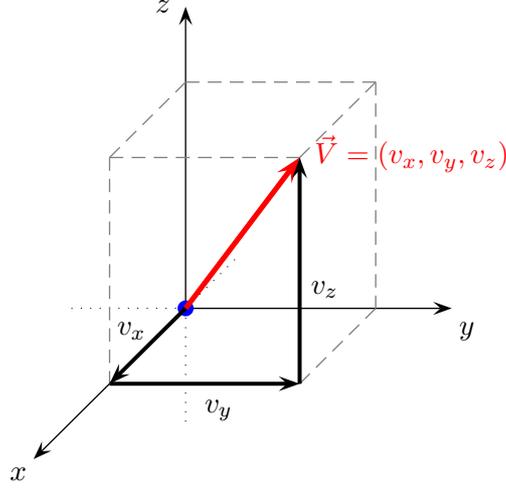
1. la vitesse de Stokes se base sur la loi de Stokes, elle n'est donc valable que pour des écoulements laminaires ! ;
2. l'expression générale de la vitesse de chute (18) permet de retrouver la vitesse de Stokes (17) pour une sphère rigide en considérant que dans ce cas  $\mu_s \gg \mu_f$  ;
3. pour une bulle de gaz, de viscosité négligeable devant celle du fluide,  $\mu_s \ll \mu_f$  et  $v_s = \frac{\Delta\rho g d^2}{12\mu_f}$ . À taille et masse volumique identiques, une bulle de gaz remonte donc 1,5 fois plus vite que ne chute une sphère rigide.

# ANNEXES

## A Équations de continuité et de Navier-Stokes

### A.1 Coordonnées cartésiennes

Vitesse  $\vec{V} = (v_x, v_y, v_z)$ , et forces par unité de volume  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$



— Équation de continuité :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

— Équations de Navier-Stokes :

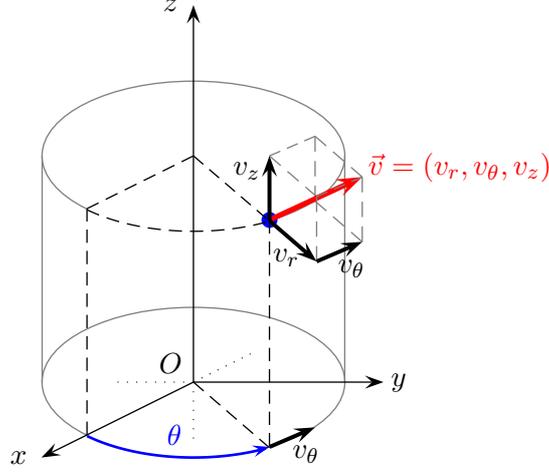
$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + F_x$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + F_y$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + F_z$$

## A.2 Coordonnées cylindriques

Vitesse  $\vec{V} = (v_x, v_\theta, v_z)$ , et forces par unité de volume  $\vec{F} = (F_r, F_\theta, F_z)$



— Équation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

— Équations de Navier-Stokes :

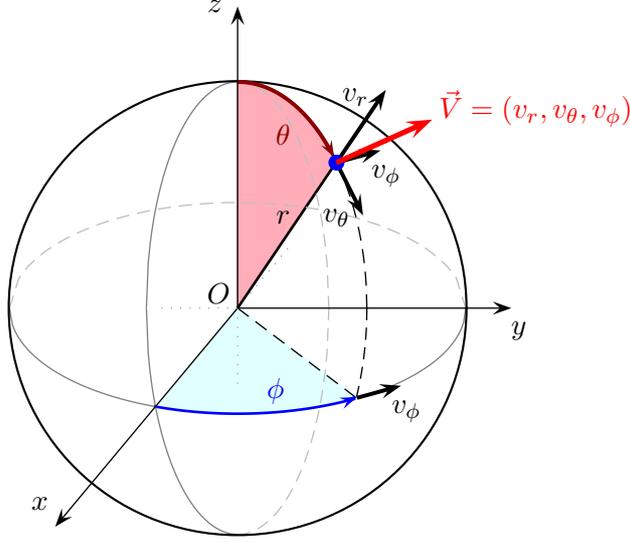
$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} \\ &+ \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + F_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ &+ \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + F_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} \\ &+ \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + F_z \end{aligned}$$

### A.3 Coordonnées sphériques

Vitesse  $\vec{V} = (v_r, v_\theta, v_\phi)$ , et forces par unité de volume  $\vec{F} = (F_r, F_\theta, F_\phi)$



— Équation de continuité :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0.$$

— Équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{v_\phi^2}{r} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} \\ &+ \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{(\partial v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + F_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2}{r \tan \theta} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ &+ \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + F_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\phi v_\theta}{r \tan \theta} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} \\ &+ \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] + F_\phi \end{aligned}$$

## B Exercices

### B.1 Conservation de la masse dans un conduit (puits de forage, conduit volcanique...)

#### B.1.1 Variation de la section du conduit

On considère un conduit volcanique vertical dont la taille (la section) se rétrécit vers le haut et avec une géométrie simplifiée : un évent est de forme circulaire avec un rayon  $R_2 = 10$  m alors qu'en profondeur le conduit est relié à un réservoir magmatique avec une section horizontale de rayon  $R_1 = 1$  km. De plus, on considère que la vitesse d'ascension du magma  $u$  est uniforme à chaque profondeur  $z$  et que la masse volumique du magma  $\rho$  est constante.

1. Si la vitesse de sortie du magma  $v_2$  lors d'une éruption plinienne est de l'ordre de  $100 \text{ m s}^{-1}$ , à quelle vitesse verticale  $v_1$  se déplace le magma dans le réservoir ?
2. Comment varie le rapport des vitesses  $v_1/v_2$  avec les rayons  $R_1$  et  $R_2$  ?

#### B.1.2 Variation de la section du conduit et de la masse volumique

En partant du problème B.1.1 précédent (même géométrie), on considère maintenant que le magma dégaze lors de son ascension. Dans le réservoir, toutes les espèces volatiles sont dissoutes et la masse volumique du magma est celle du liquide,  $\rho_{1 \text{ magma}} = \rho_{\text{liquide}}$ . Par contre, à la sortie de l'évent le magma est vésiculé à un taux volumique  $\alpha$ , ce qui en réduit la masse volumique à  $\rho_{2 \text{ magma}} = (1 - \alpha)\rho_{\text{liquide}}$ . La masse volumique du magma n'est plus constante puisqu'elle dépend du taux de vésicularité (qui varie avec la profondeur) du magma mais on considère néanmoins qu'elle est uniforme à chaque profondeur  $z$ .

1. Comment varie le rapport des vitesses  $v_1/v_2$  en fonction des autres paramètres ? Si le taux de vésiculation  $\alpha = 90\%$ , à quelle vitesse  $v_1$  se déplace le magma dans le réservoir ?
2. Dans ce problème, quel paramètre a l'effet le plus important : la variation de section du conduit ou le taux de vésiculation ?
3. Démontrez que la masse volumique du magma à la sortie de l'évent peut effectivement s'écrire approximativement  $\rho_{2 \text{ magma}} = (1 - \alpha)\rho_{\text{liquide}}$ .

## B.2 Écoulement d'un fluide visqueux

### B.2.1 Chenal horizontal (canal de dérivation de l'Artière ou filon magmatique horizontal (*sill*) par ex.)

L'écoulement d'un fluide visqueux dans un chenal horizontal est schématisé sur la Figure 14, où l'on traite l'écoulement à deux dimensions dans le plan  $Oxy$  (on néglige l'écoulement qui pourrait éventuellement avoir lieu le long de l'axe  $Oz$  perpendiculaire à la figure).

1. Écrivez l'équation de continuité et démontrez que la vitesse ne dépend que de la position  $y$ .

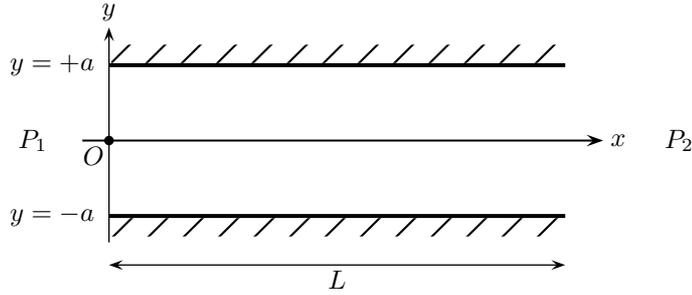


FIGURE 14 – Schéma d'un écoulement dans un canal confiné par des parois imperméables en  $y = \pm a$ . L'écoulement a lieu dans le même sens que  $Ox$  grâce à une différence de pression  $\Delta P = P_1 - P_2 > 0$  appliquée sur une distance  $L$ .

2. Retrouvez à l'aide des notes de cours les équations qui régissent cet écoulement ( $P$  est la pression dans le fluide,  $\mu$  sa viscosité et  $v$  la composante de la vitesse selon  $Ox$ ) :

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

3. À partir de ces équations, trouvez l'expression du profil de vitesse  $v(y)$  dans le canal.
4. Où la vitesse d'écoulement  $v(y)$  est-elle maximale? Quelle est son expression?
5. Quelle l'expression de la vitesse moyenne?
6. Quelle est l'expression du débit massique? Quelle est celle du débit volumique?
7. Les contraintes cisailantes  $\tau$  sont reliées à l'écoulement et à la viscosité du fluide par la relation  $\tau = \mu \frac{dv}{dy}$ .
- (a) Trouvez l'expression du profil des contraintes cisailantes  $\tau(y)$  dans l'écoulement.
- (b) À quels endroits dans l'écoulement les contraintes cisailantes sont elles les plus fortes (les contraintes positives les plus élevées et/ou les contraintes négatives les plus négatives)?
8. Si on avait choisi un repère légèrement différent avec  $Ox$  le long de la base du canal alors  $y$  varierait entre  $y = 0$  à la base et  $y = 2a$  en haut du canal.
- (a) Trouvez l'expression des profils de vitesse et des contraintes cisailantes dans ce nouveau repère.
- (b) Quelles sont les nouvelles expressions de la vitesse maximale et de la vitesse moyenne?
- (c) Quels sont les débits massiques et volumiques?
- (d) À quels endroits le fluide est-il le plus cisailé?
- (e) Trouvez vous ces résultats étonnants ou vous y attendez vous?

### B.2.2 Cylindre horizontal (loi de Hagen-Poiseuille)

Les équations simplifiées qui régissent l'écoulement stationnaire d'un fluide de viscosité  $\mu$  dans le cylindre horizontal schématisé sur la Figure 15 sont les suivantes :

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[ \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

$P$  est la pression dans le fluide,  $v$  est sa vitesse d'écoulement horizontale,  $x$  est la position le long de l'écoulement, et  $y$  est la position radiale. (La première équation est obtenue en considérant l'équilibre des forces parallèles à l'axe  $Ox$ , et la deuxième équation traduit l'équilibre des forces perpendiculaires à l'axe du cylindre.)

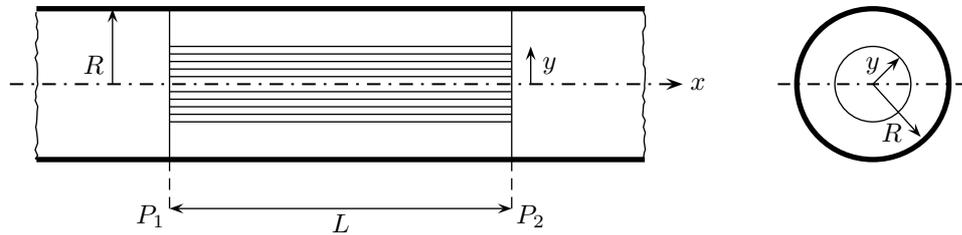


FIGURE 15 – Sections schématiques longitudinale (à gauche) et perpendiculaire (à droite) d'un écoulement dans un cylindre horizontal de rayon  $R$ . L'écoulement s'effectue de gauche à droite dans la section longitudinale, parallèlement à la direction  $Ox$ , grâce à une différence de pression  $\Delta P = P_1 - P_2$  appliquée sur une distance  $L$ , et la position radiale dans le cylindre est repérée par  $y$ .

1. À partir de ces équations, trouvez l'expression du profil de vitesse  $v$  dans le cylindre.
2. Déduisez en la relation entre le débit volumique, le gradient de pression dans le fluide et le rayon  $R$  du cylindre (loi de Hagen-Poiseuille).
3. Comparez les vitesses maximale et moyenne. Remarquez la différence avec le chenal horizontal (B.2.1).
4. Donnez le profil de contraintes cisailantes. Où sont elles les plus fortes ?

### B.2.3 Chenal vertical (filon magmatique vertical (*dyke*), fracture hydraulique...)

La géométrie de ce problème est similaire à celle de l'exercice B.2.1 excepté que le chenal est maintenant orienté verticalement (Figure 16). La gravité va donc avoir une influence sur l'écoulement.

On simplifie le problème avec les hypothèses suivantes :

- l'écoulement est incompressible, laminaire et stationnaire ;
- le chenal à une épaisseur  $2a$  constante ;
- le fluide de masse volumique  $\rho$  et de viscosité  $\mu$  s'écoule uniquement vers le haut, dans le même sens que l'axe  $Oz$  ;
- on suppose que la vitesse d'écoulement ne dépend pas de la position  $x$  (perpendiculaire à la Figure 16).

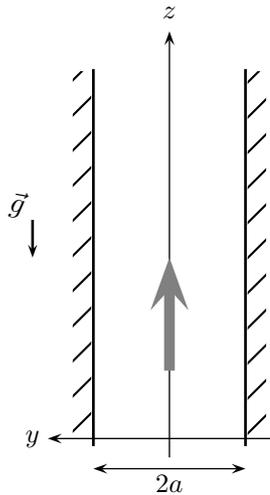


FIGURE 16 – Schéma de l'écoulement dans un canal vertical de largeur  $2a$ . La position dans le canal est repérée par les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et l'écoulement s'effectue vers le haut dans le même sens que l'axe  $Oz$ .

1. Utilisez l'équation de continuité et démontrez que la vitesse ne dépend que de  $y$ .
2. Écrivez l'équation de Navier-Stokes et déduisez en le profil de vitesse verticale.
3. Donnez le profil de contraintes cisailantes.
4. Quelles conditions doit satisfaire le gradient de pression pour que l'écoulement puisse avoir lieu
  - (a) vers le haut ?
  - (b) vers le bas ?
  - (c) pour qu'il n'y ait pas d'écoulement ?
5. Dans chaque cas, où les contraintes cisailantes sont-elles les plus élevées ?

#### B.2.4 Conduit vertical (puits de forage, conduit volcanique...)

Ce problème est similaire à l'exercice B.2.3 précédent excepté que la géométrie est maintenant cylindrique.

Un fluide de masse volumique  $\rho$  et de viscosité  $\mu$  s'écoule dans un conduit vertical (Figure 17), et on fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le conduit est cylindrique et de rayon constant ;
- l'écoulement est incompressible, unidirectionnel,  $\parallel Oz$  (on suppose que la vitesse ne dépend que de la distance à l'axe du conduit), laminaire et stationnaire.

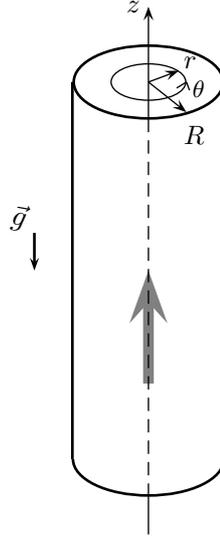


FIGURE 17 – Schéma de l'écoulement dans un conduit vertical de rayon  $R$ . L'écoulement s'effectue vers le haut dans le même sens que l'axe  $Oz$ . La position dans le conduit est repérée par la position radiale  $r$ , la position angulaire  $\theta$  et l'altitude  $z$ .

En coordonnées cylindriques, l'équation de continuité s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

où  $v_r$ ,  $v_\theta$  et  $v_z$  sont les composantes du vecteur vitesse,  $v = (v_r, v_\theta \text{ et } v_z)$ .

Quant à l'équation de Navier-Stokes, elle s'écrit selon l'axe  $Or$  :

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right],$$

selon l'axe  $O\theta$  :

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right],$$

et selon l'axe  $Oz$  :

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \rho g.$$

1. Quel est le profil de vitesse pour cet écoulement ?
2. Quel est le profil de contraintes cisailantes associé ?
3. Quelle condition doit satisfaire la pression pour que l'écoulement puisse avoir lieu vers le haut ?

### B.2.5 Écoulement gravitaire à l'air libre (glacier, coulée de boue, coulée de lave...)

L'écoulement gravitaire d'un glacier est schématisé sur la Figure 18 avec les hypothèses simplificatrices suivantes :

- l'écoulement est stationnaire, bidimensionnel et dans la direction de plus grande pente ;
- l'épaisseur de l'écoulement est constante ;
- le fluide est newtonien ;
- l'écoulement est incompressible.

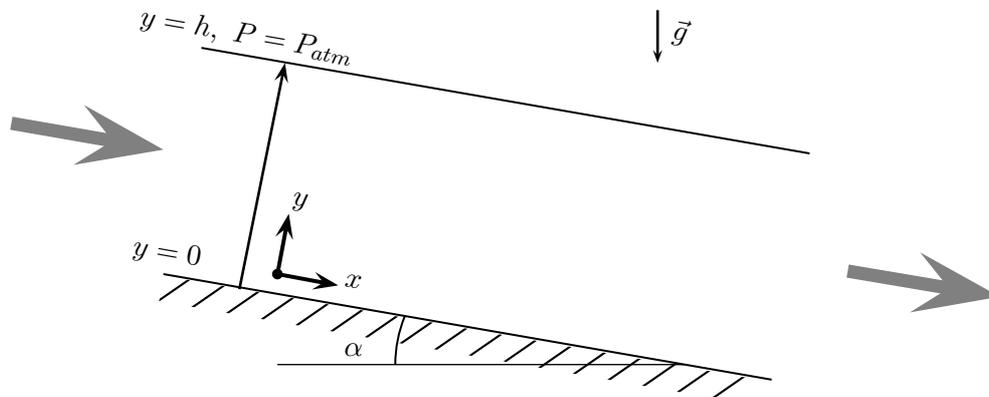


FIGURE 18 – Section verticale schématisée d'un écoulement gravitaire à l'air libre (un glacier par ex.). L'écoulement a une épaisseur constante  $h$  et s'écoule de gauche à droite (flèches grisées), parallèlement à la direction  $Ox$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. La direction  $Oy$  est orientée perpendiculairement à la direction d'écoulement et vers le haut : la base de l'écoulement est située en  $y = 0$  et sa surface supérieure en  $y = h$ . L'accélération  $\vec{g}$  due à la pesanteur est dirigée verticalement vers le bas.

1. Écrivez puis simplifiez les équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité dans le repère  $Oxy$  de la Figure 18. Attention à la gravité...
2. Le glacier a une épaisseur  $h$  constante, et à sa surface la pression est partout égale à la pression atmosphérique. Déduisez en le profil de pression dans le glacier et vérifiez que la pression ne dépend pas de la position le long de l'écoulement.
3. L'écoulement a lieu à l'air libre, il n'y a donc pas de cisaillement à sa surface. Quelle est l'autre condition aux limites que doit satisfaire l'écoulement ? Déduisez en le profil de vitesse dans le glacier.
4. Comparez la vitesse moyenne d'écoulement du glacier et sa vitesse maximale.
5. Quel est le débit volumique du glacier ?
6. Donnez l'expression du profil de contraintes cisailantes présentes dans l'écoulement. Où sont elles les plus fortes ?

## B.3 Chute d'une sphère dans un fluide visqueux

### B.3.1 Chute d'une particule

On considère la chute d'une particule sous l'effet de la gravité dans un fluide visqueux. Pour simplifier le problème on suppose que cette particule est de forme sphérique, avec une masse volumique constante et le cas échéant une viscosité constante, et que le fluide a une viscosité et une masse volumique constantes.

1. Quelle est la taille maximale d'une particule qui chuterait selon la loi de Stokes ? Traitez les deux cas d'une particule rigide et d'une gouttelette de fluide.
2. Trouvez cette taille maximale dans les cas suivants ainsi que la vitesse de chute pour la particule considérée :
  - (a) sédimentation d'un grain de sable dans l'eau (diamètre de  $100\ \mu\text{m}$ ,  $\rho_s = 2500\ \text{kg m}^{-3}$ );
  - (b) chute d'une gouttelette de brouillard ( $50\ \mu\text{m}$ ,  $\rho_l = 1\ \text{kg m}^{-3}$ ,  $\mu = 2 \times 10^{-5}\ \text{Pa s}$ );
  - (c) sédimentation de cristaux d'olivine dans un basalte ( $\rho_s = 3300\ \text{kg m}^{-3}$ , diamètres de  $1\ \text{cm}$  et de  $1\ \text{mm}$ ,  $\rho_l = 2800\ \text{kg m}^{-3}$ ,  $\mu = 10^2\ \text{Pa s}$ );
  - (d) sédimentation d'un tephra de cendre volcanique dans l'atmosphère ( $50\ \mu\text{m}$ ,  $\rho_s = 2400\ \text{kg m}^{-3}$ ).

### B.3.2 Viscosimètre à bille

On veut mesurer la viscosité d'une lave peut cristallisée. La mesure en laboratoire de la masse volumique  $\rho_{lave}$  d'un échantillon donne une valeur de  $2820\ \text{kg m}^{-3}$ . Pour mesurer la viscosité de la lave, on utilise un viscosimètre à bille : on fond entièrement l'échantillon, on relâche une bille en titane de  $2\ \text{mm}$  de diamètre dans la lave fondue, et on mesure à l'aide de rayons X la vitesse de déplacement de la bille sous l'effet de la gravité. La bille de titane a une masse volumique de  $2145\ \text{kg m}^{-3}$ , et on mesure des temps de passage de  $125\ \text{s}$  et  $208\ \text{s}$  à des distances de  $3.0\ \text{mm}$  et  $5.0\ \text{mm}$  du point de largage.

1. Déduisez de ces données la viscosité de l'échantillon fondu.
2. Pourquoi peut-on utiliser cette méthode de mesure ?

## C Solutions

### C.1 Conservation de la masse

#### C.1.1 Variation de la section

1.  $v_1 \sim 10^{-2} \text{ m s}^{-1} = 1 \text{ cm s}^{-1}$
2.  $\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 10^{-4}$

#### C.1.2 Variation de la section et de la masse volumique

1.  $\frac{v_1}{v_2} = (1 - \alpha) \frac{S_2}{S_1}$
2. La variation de section induit une variation de vitesse d'un facteur 100,  $\alpha$  induit une variation d'un facteur 10...
3.  $\alpha = \frac{V_{gaz}}{V_{total}}$ ,  $M_{total} = m_{gaz} + m_{liquide}$  et  $m_{gaz} = \rho_{gaz} V_{gaz} = \alpha \rho_{gaz} V_{total} \dots$

### C.2 Écoulement d'un fluide visqueux

#### C.2.1 Chenal horizontal

3.  $u(y) = \frac{\Delta P}{2\mu L}(a^2 - y^2)$
4.  $v_{max} = u(y=0) = \frac{\Delta P}{2\mu L}a^2$
5.  $v_{moyenne} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a u(y) dy = \frac{\Delta P}{3\mu L}a^2$
6.  $Q_m = \rho Q_v = \rho \frac{2\Delta P}{3\mu L} D a^3$  avec  $D$  la largeur du chenal (perpendiculaire à la figure)
7. (a)  $\tau(y) = -\frac{\Delta P}{L}y$   
(b)  $y = \pm a$
8. (a)  $v_x(y) = \frac{\Delta P}{2\mu L}(2ay - y^2)$ ,  $\tau(y) = \frac{\Delta P}{L}(a - y)$   
(b)  $v_{max}$  et  $v_{moyenne}$  inchangées  
(c)  $Q_m$  et  $Q_v$  inchangés  
(d)  $y = 0$  et  $y = 2a$

#### C.2.2 Cylindre horizontal

1.  $v_x(y) = \frac{\Delta P}{L} \frac{(R^2 - y^2)}{4\mu}$
2.  $Q_v = \frac{\Delta P}{8\mu L} \pi R^4$  : Loi de Hagen-Poiseuille
3.  $v_{moyenne} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(y) 2\pi y dy = \frac{\Delta P}{8\mu L} R^2 = \frac{1}{2} v_{max}$
4.  $\tau(y) = -\frac{\Delta P}{2L}y$

### C.2.3 Chenal vertical

1.  $v_z(y) = -\frac{1}{2\mu} \left( \rho g + \frac{dP}{dz} \right) (a^2 - y^2)$
2.  $\tau(y) = \left( \rho g + \frac{dP}{dz} \right) y$
3. (a)  $\rho g + \frac{dP}{dz} < 0 \Leftrightarrow \frac{dP}{dz} < -\rho g$
4.  $y = \pm a$

### C.2.4 Conduit vertical

1.  $v_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \left( \rho g + \frac{dP}{dz} \right) (R^2 - r^2)$
2.  $\tau(r) = \left( \rho g + \frac{dP}{dz} \right) \frac{r}{2}$
3.  $\rho g + \frac{dP}{dz} < 0 \Leftrightarrow \frac{dP}{dz} < -\rho g$

### C.2.5 Glacier

1.  $\vec{g}$  est vertical  $\Rightarrow$  deux composantes pour  $\vec{g}$  :  $g_x = \rho g \sin \alpha$  et  $g_y = -\rho g \cos \alpha$
2.  $P(y) = \rho g \cos \alpha (h - y) + P_{atm}$
3.  $\tau(y = h) = 0$  et  $v_x(y = 0) = 0 \Rightarrow v_x(y) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} (2hy - y^2)$
4.  $v_{moyenne} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} h^2 = \frac{2}{3} v_{max}$
5.  $Q_v = \frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} D h^3$  avec  $D$  la largeur du glacier (perpendiculaire à la figure)
6.  $\tau(y) = \rho g \sin \alpha (h - y)$  est maximum à la base du glacier ( $y = 0$ )

## C.3 Chute d'une sphère

### C.3.1 Chute d'une particule

1. Le nombre de Reynolds doit être très petit...
2. (a)  $d < 10^{-4}$  m,  $v_{100 \mu\text{m}} \simeq 8 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$   
(b)  $d < 9 \times 10^{-5}$  m,  $v_{50 \mu\text{m}} \simeq 7 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$   
(c)  $d < 0.2$  m,  $v_{1 \text{ cm}} \simeq 3 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$ ,  $v_{1 \text{ mm}} \simeq 3 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-1}$   
(d)  $d < 7 \times 10^{-5}$  m,  $v_{50 \mu\text{m}} \simeq 0.2 \text{ m s}^{-1}$

### C.3.2 Viscosimètre

1.  $\mu \simeq 61 \text{ Pa s}$ .