



Maths en mouvement : A-t-on besoin des Maths pour étudier le Sport ?

Philippe Vaslin

► To cite this version:

Philippe Vaslin. Maths en mouvement : A-t-on besoin des Maths pour étudier le Sport ?. 2016.
hal-01380975

HAL Id: hal-01380975

<https://hal.science/hal-01380975>

Submitted on 13 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Maths en mouvement : « A-t-on besoin des Maths pour étudier le Sport ? »

Soirée Maths et Sports (19 mars 2016), Semaine des Mathématiques (14-20 mars 2016),

Muséum Henri-Lecoq, Clermont-Ferrand (France).

Ph. VASLIN (LIMOS, UMR 6158 CNRS-Université Blaise Pascal, Clermont Université, 63 178 Aubière Cédex).

Cette question ouvre sur un champ tellement vaste qu'il est nécessaire de le circonscrire pour tenter de lui apporter une réponse convaincante, notamment à l'intention des nombreux pratiquants d'Activités Physiques et Sportives (APS) qui sont habitués à répéter un même exercice des dizaines de fois avant d'arriver à le réaliser parfaitement, sans souvent connaître les principes mécaniques qui le sous-tendent. Afin de rester abordable par un large public, cette présentation est volontairement restreinte à l'analyse des trajectoires aériennes des points caractéristiques d'un bâton lesté avec deux masselottes et lancé avec un mouvement de rotation initial. Cette analyse repose sur quelques règles mathématiques et principes mécaniques qui sont combinés dans un modèle mécanique décomposant le mouvement du bâton lesté en un mouvement de translation de son centre de masse et un mouvement de rotation des deux masselottes autour du centre de masse du système {bâton+masselottes}. Elle constitue une illustration du processus de modélisation inhérent à toute approche scientifique et bien décrit par un célèbre historien français (Braudel, 2011) : « L'utilité des exemples sera de confirmer ou d'infirmer notre schéma théorique, lequel n'est qu'une première esquisse d'explication, une sorte de modèle. Or un modèle ne se suffit jamais à lui-même : il faut le confronter à la réalité, le jeter à l'eau. Flotte-t-il, c'est un point d'importance ; qu'il sombre, tout est à recommencer ». En définitive, le modèle présenté ici aurait aussi pu s'intituler : « Application du théorème de Pythagore et du théorème de Koenig à l'analyse de la trajectoire d'un bâton lesté ».

I - Théorème de Pythagore

En France, tout titulaire du Brevet des Collèges connaît le **théorème de Pythagore** et est donc capable de calculer la longueur de l'hypoténuse (AC) d'un triangle ABC rectangle en B (# 4-5) :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ soit : } \boxed{AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}}.$$

Les côtés du triangle ABC peuvent également être définis par les vecteurs suivants (# 6-8) :

- $\overrightarrow{AB}$, représentant le déplacement de A vers B ;
- $\overrightarrow{BC}$, représentant le déplacement de B vers C ;
- $\overrightarrow{AC}$, représentant le déplacement de A vers C .

Ces vecteurs sont liés entre eux par la **somme vectorielle** suivante : $\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$.

Ces vecteurs peuvent être renommés ainsi : $\overrightarrow{AB} = \vec{V}_{Ox}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{V}_{Oy}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{V}_O$; tels que : $\vec{V}_O = \vec{V}_{Ox} + \vec{V}_{Oy}$.

Quels que soient les noms donnés aux côtés du triangle ABC , le théorème de Pythagore s'écrit alors (# 9-11) :

$$\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 \text{ ou encore : } \vec{V}_O^2 = \vec{V}_{Ox}^2 + \vec{V}_{Oy}^2 \text{ soit : } \boxed{\|\vec{V}_O\| = \sqrt{\vec{V}_{Ox}^2 + \vec{V}_{Oy}^2}}.$$

En effet, l'écriture du théorème de Pythagore avec des vecteurs ne change rien aux calculs ni au résultat, par application du **produit scalaire** :

$$\vec{V}_O^2 = \|\vec{V}_O\| \cdot \|\vec{V}_O\| \cos(\vec{V}_O, \vec{V}_O), \text{ soit : } \boxed{\vec{V}_O^2 = \|\vec{V}_O\|^2 = V_O^2} ;$$

$$\text{car l'angle } (\vec{V}_O, \vec{V}_O) \text{ est nul et donc : } \cos(\vec{V}_O, \vec{V}_O) = 1.$$

II - Trajectoire d'un projectile

Le vecteur $\vec{V}_O$ ainsi obtenu représente la **vitesse initiale** du centre de gravité G d'un projectile (ex : poids, balle) lancé depuis le point A , de coordonnées cartésiennes (x_A, y_A) (# 12-15). En mécanique classique, en appliquant la deuxième loi de Newton – ou Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) : $\vec{F} = m\vec{a}$ – et en négligeant la résistance de l'air, on démontre que le mouvement de G est défini par les équations horaires (c'est-à-dire fonction

du temps) suivantes :

$$x_G^t = V_0 \cos \alpha_0 t + x_A \quad \text{et :} \quad y_G^t = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin \alpha_0 t + y_A \quad (\# 16).$$

A partir de ces équations horaires, on obtient l'équation de la trajectoire du projectile (# 17) :

$$y_G = \frac{-g x_G^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha_0} + \left(\frac{g x_A}{V_0^2 \cos^2 \alpha_0} + \tan \alpha_0 \right) x_G - \left(\frac{g x_A}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha_0} + \tan \alpha_0 \right) x_A + y_A.$$

Cette équation permet de tracer la trajectoire de G , qui est une parabole, ou plutôt une famille de paraboles, en fonction des valeurs choisies pour α_0 . Chacune de ces paraboles permet d'atteindre les points particuliers suivants :

- **Portée** : ce point est atteint lorsque le projectile retombe sur le sol. Dans le cas classique¹ où l'altitude d'atterrissage est **nulle** ($y_G = 0$), l'abscisse de ce point se calcule ainsi :

$$x_{max} = \left(\frac{V_0 \sin \alpha_0 + \sqrt{V_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2 g y_A}}{g} \right) V_0 \cos \alpha_0 + x_A \quad (\# 19).$$

Dans le domaine sportif, la portée correspond approximativement à la **performance** d'un lancer ou d'un saut. Toutes choses étant égales par ailleurs (x_A, y_A, V_0, g), la **portée maximale** dépend de l'angle initial (α_0). Dans le cas général (ex : lancer de poids), contrairement à la croyance populaire, l'angle initial permettant de lancer le boulet le plus loin possible **n'est pas égal à 45°** (Lenz & Rappl, 2010). En effet, cet angle ($\alpha_0 = \pi/4$) n'est qu'une solution du cas très particulier où l'altitude de départ est **nulle** ($y_A = 0$), c'est-à-dire que le projectile est lancé **depuis le sol**. Dans ce cas, on obtient effectivement :

$$x_{max} = \frac{V_0^2 \sin 2 \alpha_0}{g} + x_A, \quad \text{ou encore :} \quad x_{max} = \frac{V_0^2}{g} + x_A \quad (\text{car : } \sin 2 \alpha_0 = 1 \text{ pour } \alpha_0 = \pi/4).$$

- **Hauteur maximale** (flèche) : cette hauteur est atteinte à l'instant précis où le projectile ne monte plus (sa vitesse verticale cesse d'être positive) mais n'a pas commencé à descendre (sa vitesse verticale n'est pas encore négative). C'est donc l'instant où sa vitesse verticale est **nulle** :

$$V_y = 0, \quad \text{soit :} \quad y_{max} = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2 g} + y_A \quad (\# 36).$$

Dans le cas général, toutes choses étant égales par ailleurs (x_A, y_A, V_0, g), l'angle initial permettant d'atteindre la flèche maximale est **toujours 90°** ($\alpha_0 = \pi/2$). Celle-ci se calcule alors ainsi :

$$y_{max} = \frac{V_0^2}{2 g} + y_A \quad (\# 37).$$

Entre ces deux points particuliers (portée et flèche maximales), lorsque l'angle initial augmente, la flèche augmente également tandis que la portée diminue (# 20-35).

Toutes ces équations s'appliquent au calcul des trajectoires de nombreux projectiles (engins) ou points matériels (centre de masse) dans le domaine sportif, à condition qu'ils ne soient pas sensibles à la résistance de l'air : lancer de poids, centre de masse d'un sauteur en longueur ou en hauteur, d'un trampoliniste, d'un plongeur, etc. On peut aussi les appliquer au calcul des trajectoires des balles et ballons (ex : rugby, # 38), sachant que dans ces derniers cas, la résistance de l'air et la rotation de la balle sur elle-même (effet Magnus) devraient être prises en compte.

III – Centre de gravité

Le **centre de gravité** ou **centre de masse** ou **centre d'inertie** est une notion couramment utilisée sur le terrain des pratiques sportives et dans les écrits et discours des spécialistes des APS. Mais de quoi s'agit-il exactement ?

¹ Dans le cas général, elle peut également être **positive** (atterrissage en contre-haut) ou **négative** (atterrissage en contre-bas). Dans l'équation de x_{max} (# 19), le terme y_A est alors simplement remplacé par : $(y_A - y_G)$.

Par définition, le centre de gravité G d'un système de n points matériels M_i , de masses respectives m_i , est le **barycentre** ou **position moyenne pondérée** des positions des points M_i affectés de leurs coefficients de pondération respectifs m_i :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_i^n m_i \vec{OM}_i}{\sum_i^n m_i}$$

L'application de cette définition au calcul du centre de masse d'une tige rigide – supposée sans masse – lestée par deux masses m_1 et m_2 fixées respectivement à chacune de ses extrémités M_1 et M_2 se traduit ainsi :

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2}{m_1 + m_2} \quad (\# 39).$$

Si $m_1 = m_2$: $\vec{OG} = \frac{m_1 (\vec{OM}_1 + \vec{OM}_2)}{2m_1}$ alors : $\vec{OG} = \frac{1}{2} \vec{M_1 M_2}$.

Ainsi que l'on pouvait s'en douter, G est situé au **milieu** du segment $M_1 M_2$.

Si $m_1 = 2m_2$: $\vec{OG} = \frac{m_2 (2\vec{OM}_1 + \vec{OM}_2)}{3m_2}$ alors : $\vec{OG} = \frac{2}{3} \vec{OM}_1 + \frac{1}{3} \vec{OM}_2$.

Dans ce cas, le centre de masse de la tige lestée est situé au **tiers** du segment $M_1 M_2$, du côté de M_1 .

Si $m_1 = 3m_2$: $\vec{OG} = \frac{m_2 (3\vec{OM}_1 + \vec{OM}_2)}{4m_2}$ alors : $\vec{OG} = \frac{3}{4} \vec{OM}_1 + \frac{1}{4} \vec{OM}_2$ (# 40).

Dans ce cas, le centre de masse de la tige lestée est situé au **quart** du segment $M_1 M_2$, du côté de M_1 .

IV - Lancer d'un bâton lesté

Soit un bâton – supposé sans masse – lesté par deux masselottes m_1 et m_2 , telles que : $m_1 = 3m_2$. Si on tient ce bâton en M_1 (point vert) et qu'on le lance en lui communiquant un mouvement de rotation (de vitesse angulaire initiale $\vec{\omega}_O$), on peut représenter les trajectoires des points M_1 (vert), M_2 (rouge) et G (noir), tout au long de la phase aérienne du mouvement (# 41-101). En fait, les trajectoires de ces trois points (# 102-105) sont les résultats de calculs utilisant les notions suivantes :

- La trajectoire du **centre de masse** est calculée à l'aide de l'équation de la trajectoire d'un projectile ;
- Les positions instantanées (sur chaque image) des points M_1 et M_2 sont calculées en utilisant la définition du centre de masse, les lois de composition des mouvements et le Premier Théorème de Koenig (cf. *infra*).

Les **lois de composition des mouvements** permettent de décomposer le mouvement du bâton lesté en (# 106) :

- un mouvement de **translation** de son centre de masse G , point matériel fictif assimilé à un projectile suivant une trajectoire parabolique ;
- un mouvement de **rotation** autour de son centre de masse : dans le référentiel barycentrique (R^*) d'origine G et en translation dans le référentiel terrestre (R), chacun des points M_1 et M_2 , situés aux deux extrémités du bâton, suit une trajectoire circulaire de centre G .

Le mouvement de **rotation** du bâton autour de son centre de masse fait intervenir les moments cinétiques des points M_1 et M_2 , calculés dans le référentiel barycentrique (R^*) du système {bâton+masselottes} :

$$\vec{\sigma}_G(M_1/R^*) = \vec{\sigma}_1^* = \vec{GM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1^* \quad \text{et} : \quad \vec{\sigma}_G(M_2/R^*) = \vec{\sigma}_2^* = \vec{GM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2^* ;$$

$$\text{avec} : \quad \vec{v}_1^* = \vec{v}(M_1/R^*) \quad \text{et} : \quad \vec{v}_2^* = \vec{v}(M_2/R^*) .$$

Leur somme vectorielle représente le **moment cinétique barycentrique** du système :

$$\vec{\sigma}_G(\Sigma/R^*) = \vec{\sigma}_G(M_1/R^*) + \vec{\sigma}_G(M_2/R^*) , \quad \text{qui s'écrit plus simplement} : \quad \vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_1^* + \vec{\sigma}_2^* .$$

En outre, le centre de masse G du système possède un moment cinétique, calculé en O dans le référentiel terrestre (R), qui s'écrit :

$$\vec{\sigma}_O(G/R) = \vec{OG} \wedge m \vec{v}_G .$$

Par conséquent, d'après le **Premier Théorème de Koenig**, le moment cinétique total du système {bâton+masselottes}, calculé en O dans R , s'écrit :

$$\vec{\sigma}_O(\Sigma/R) = \vec{\sigma}_O(G/R) + \vec{\sigma}^* \quad \text{soit : } \boxed{\vec{\sigma}_O(\Sigma/R) = \overrightarrow{OG} \wedge m \vec{v}_G + \vec{\sigma}_1^* + \vec{\sigma}_2^*}.$$

Cependant, si le **moment cinétique total** du système dans R est calculé en G plutôt qu'en O , il devient :

$$\vec{\sigma}_G(\Sigma/R) = \overrightarrow{GG} \wedge m \vec{v}_G + \vec{\sigma}_1^* + \vec{\sigma}_2^* \quad \text{soit : } \boxed{\vec{\sigma}_G(\Sigma/R) = \vec{\sigma}_G(\Sigma/R^*) = \vec{\sigma}^*} \quad (\text{car : } \overrightarrow{GG} = \vec{0}).$$

En phase aérienne d'un lancer, si la résistance de l'air peut être négligée, on démontre que le moment cinétique total du système reste **constant**. Ce résultat implique que, tant que le système ne se déforme pas, sa vitesse de rotation autour de son centre de masse G reste aussi **constante** et égale à sa vitesse de rotation initiale ($\vec{\omega}_O$). Les équations horaires des mouvements des points M_1 et M_2 autour de G ont été écrites sur ces bases, puis elles ont été implémentées dans un programme de simulation qui a permis de réaliser les figures des diapositives 41 à 105.

Dans les études biomécaniques des mouvements humains en général, et sportifs en particulier, le corps humain est souvent modélisé sous la forme d'un système de 15 segments polyarticulés, comportant donc 15 centres de masse segmentaires et un centre de masse global. Ainsi, lors d'une phase aérienne, quels que soient les mouvements segmentaires effectués par un sportif pour esquiver une barre (ex : saut en hauteur) ou réaliser une figure acrobatique (ex : gymnastique, trampoline), son centre de masse G suit une *trajectoire parabolique* et tous les autres centres de masse segmentaires tournent autour de G à des **vitesse angulaires** qui peuvent être **identiques** – si le sportif ne « gesticule » pas en l'air (ex : salto groupé, carpié ou tendu) – mais qui sont généralement **variables** (ex : mouvement de « pédalage » d'un sauteur en longueur). En effet, dans tous les cas, le théorème de Koenig s'applique de la même manière que dans l'exemple présenté ici, et **le moment cinétique total du sportif reste constant**, pour autant que la résistance de l'air puisse être négligée.

Conclusion : A-t-on besoin des « Maths » pour étudier le « Sport » ?

Théorème de Pythagore, trigonométrie, géométrie, algèbre, vecteurs (somme, produit scalaire, produit vectoriel), lois de Newton, trajectoire d'un projectile (portée maximale, hauteur maximale, parabole de sûreté), barycentre (centre de gravité), composition des mouvements (translation + rotation), moment cinétique, premier *théorème de Koenig*, sont les connaissances mathématiques et mécaniques qui ont été utilisées pour réaliser ce diaporama à l'aide d'applications informatiques libres (Geogebra, Scilab). On peut certes se passer des mathématiques et de la mécanique classique pour analyser, comprendre et expliquer le geste sportif, mais on prend alors le risque de raconter quelques bêtises... Pour éviter ce piège grossier, s'il est nécessaire de posséder les connaissances mathématiques idoines, il faut avant tout faire preuve d'une curiosité et d'une ouverture d'esprit indispensables à leur acquisition. En effet, en extrapolant les panneaux de signalisation situés à l'entrée de la Kopernikusstraße à Berlin (Allemagne), la voie ouverte par les précurseurs de la Mécanique classique (Nicolas Copernic, 1473-1543) n'est pas interdite aux cyclistes ni aux pratiquants des autres Activités Physiques et Sportives (# 107). Car, ainsi que l'écrivait G.W. Leibniz en 1687 : « Rien ne nous saurait être appris dont nous n'ayons déjà dans l'esprit l'idée qui est comme la matière dont cette pensée se forme » (# 108).

Bibliographie

Braudel F. (2011) L'identité de la France. Paris : Flammarion, 2^e édition, 1081 p. Livre I : Espace et Histoire ; Chap. 2 : La cohésion du peuplement : villages, bourgs et villes ; III. Expliquer le système : les villes, p. 187.

Geogebra : <https://www.geogebra.org/home>

Leibniz Gottfried Wilhelm (1687) Discours de Métaphysique, Paris : Gallimard, 2004, 562 p.

Lenz A. & Rappl F. (2010) The optimal angle of release in shot put. arXiv:1007.3689v2 [physics.pop-ph].

Scilab : <http://www.scilab.org/>