Situations d'énumération et exploration des collections

Claire Margolinas, Floriane Wozniak, Olivier Rivière

▶ **To cite this version:**

Claire Margolinas, Floriane Wozniak, Olivier Rivière. Situations d'énumération et exploration des collections. Recherches en Didactique des Mathematiques, 2015, 35 (2), pp.183-220. hal-01218000

HAL Id: hal-01218000
https://uca.hal.science/hal-01218000

Submitted on 30 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

SITUATIONS D'ÉNUMÉRATION ET EXPLORATION DES COLLECTIONS

Claire Margolinas[*], Floriane Wozniak[**], Olivier Rivière[*]

Résumé - Depuis une dizaine d'années, nous avons prolongé les études de Brousseau et Briand concernant l'énumération. Cet article rend compte de la progression de notre réflexion. Nous développerons l'étude expérimentale d'une situation fondamentale, construite en suivant les caractéristiques mises en évidence par les travaux antérieurs, pour analyser en détail les procédures d'élèves de 4 à 12 ans. Nous étudions ensuite l'énumération de collections dont les éléments peuvent être déplacés. Nous montrons les relations complexes qu'entretiennent l'énumération, le tri et l'exploration des collections, qui reposent sur la prise en compte de différents espaces. Nous proposons alors une nouvelle définition d'une situation d'énumération que nous caractérisons par rapport à l'exploration des collections en introduisant les multi-ensembles comme modèle épistémologique de référence. Nous montrons enfin que l'énumération et l'exploration des collections interviennent dans des tâches courantes en français, à l'école maternelle. Nous pensons contribuer ainsi à la transposition didactique de l'énumération.

Mots-clés: énumération, exploration, tri, organisation spatiale, multi-ensemble

ENUMERATION SITUATION AND COLLECTION'S EXPLORATION

Abstract – It's been ten years since we undertook the extension of Brousseau's and Briand's work about enumeration. In this paper, we relate our reflection's progress. We first developp the experimental study of one fundamental situation which is based on the characteristics highlighted by previous works, in order to analyze pupils procedures (4 to 12 years old). We thus study the enumeration of a collection which elements can be moved. We show the complex relationships between enumeration, sorting and exploration of collections, which are based on the taking into account of different spaces. We propose new definitions of enumeration situations, which help to consider enumeration among the more general explorations of a collection introducing multi set as an epistemological model. Finally we show that enumeration and exploration are at stake in ordinary task in kindergarten, which are not mathematical tasks but language tasks. We hope that this paper will contribute to the didactical transposition of enumeration.

Keywords: enumeration, exploration, sorting, spatial organization, multiset

SITUACIÓN DE ENUMERACIÓN Y EXPLORACIÓN DE LAS COLECCIONES

Resumen - Durante diez años, hemos ampliado Briand y Brousseau estudios de la enumeración. En este artículo se informa sobre el progreso de nuestro pensamiento. Vamos a desarrollar el estudio experimental de una situación fundamental, construido de acuerdo con las características señaladas previamente para analizar en detalle los procedimientos de alumnos de 4 a 12 años. Entonces, estudiamos la enumeración de colecciones cuyos elementos se pueden mover. Mostramos la compleja relación entre la enumeración, la clasificación y la exploración de una colección, basado en la consideración de los diferentes espacios. Después consideramos nuevas definiciones de las situaciones de enumeración que la sitúa en el contexto de la exploración de las coleccionesintroduciendo los multiconjuntos como el modelo epistemológico de referencia . Por último, se muestra que la enumeración y la exploración de las colecciones participan en muchas tareas para el aprendizaje del lenguaje a la escuela infantil. Creemos que contribuyen a la transposición didáctica de la enumeración.

Palabras claves: enumeración, exploración, clasificación, organización espacial, multiconjunto

[*] Laboratoire ACTé, EA 4281, Université Blaise Pascal, Clermont-Université.

[**] IRIST, EA 3424, Université de Strasbourg.

Margolinas, C., Wozniak, F., & Rivière, O. (2015). Situations d'énumération et organisation des collections. Recherche en Didactique des Mathématiques, 35(2), 183-220.

INTRODUCTION

Les travaux de Brousseau (1984) ont ouvert le champ d'étude de l'énumération, en s'intéressant au dénombrement. Briand (1993; 1999) a travaillé sur le mesurage des collections et les connaissances prénumériques, il a élargi l'étude à des situations adidactiques permettant un apprentissage de l'énumération, dans le même temps Berthelot et Salin (1992) ont montré le lien entre espace et énumération.

Depuis une dizaine d'années, nous avons poursuivi ces études. Notre but initial (dans le cadre du groupe DéMathÉ[1]) n'était pas de développer des recherches mais d'en donner une nouvelle présentation destinée à un large public utilisant les possibilités multimédia intégrant notamment des vidéos et des animations. Cependant, en cherchant à clarifier certains points et en organisant des observations destinées à devenir les supports de nos vidéos, nous avons considéré d'une façon différente les relations entre énumération, dénombrement, tri ainsi qu'entre énumération et mathématiques. C'est l'objet de cet article de rendre compte de ces travaux.

Il s'agit d'un travail de reprise et de prolongement de l'étude, ce qui est caractéristique d'une démarche scientifique dans le cadre d'une science « normale » (Kuhn, 1970). Nous nous sommes confrontés à la contingence, dans des situations mathématiques ou non, ordinaires ou expérimentales, de manière à mieux comprendre les phénomènes concernant l'énumération. Nous cherchons à répondre principalement à deux questions : Quelles sont les techniques qui permettent d'énumérer ? Quel discours technologique peut permettre de légitimer, étayer, consolider et développer ces techniques ?

Le plan de cet article suit les étapes chronologiques de la progression de notre réflexion. Dans une première partie, nous nous appuierons sur les travaux de Brousseau et Briand qui, en partant de l'étude de difficultés spécifiques du dénombrement, ont mis en évidence l'importance d'une connaissance sous-jacente à celui-ci : l'énumération. Nous développerons l'étude d'une situation fondamentale, construite en suivant les caractéristiques mises en évidence par les travaux antérieurs, pour analyser en détail les procédures d'élèves de 4 à 12 ans que nous avons observés. Dans une seconde partie, nous étudions l'énumération de collections dont les éléments peuvent être déplacés, moins étudiée antérieurement que l'énumération de collections dont les éléments sont fixes. Nous montrerons les relations complexes qu'entretiennent l'énumération, le tri et l'exploration de ce type de collection, qui reposent sur la prise en compte de différents espaces. Cette étude nous a engagé à proposer une nouvelle définition de l'énumération ainsi qu'à caractériser les situations d'énumération, ce qui est l'objet de la troisième partie. Dans une dernière partie, nous donnerons des pistes pour un nécessaire travail de transposition didactique à venir et montrerons que l'énumération et l'exploration des collections interviennent dans des tâches courantes en français, à l'école maternelle. La conclusion sera l'occasion de répondre aux questions principales.

ÉNUMÉRATION ET DÉNOMBREMENT

1. Le travail pionnier de Guy Brousseau

Brousseau (1984) identifie l'énumération comme une connaissance, à partir d'observations portant sur le dénombrement témoignant d'un déséquilibre et donc de connaissances erronées ou absentes :

> 1) À l'Université il est fréquent de voir des étudiants attendre la correction d'un exercice de combinatoire pour être sûrs que leur réponse est correcte. […]
> 2) Dans l'enseignement secondaire les dénombrements posent aussi des problèmes difficiles aux élèves : écrire tous les termes d'un produit de polynômes en troisième année ou faire la liste de tous les éléments d'un ensemble qui ont une certaine propriété en première année ne va pas sans mal parfois même pour de bons élèves.
> 3) À l'école élémentaire certains élèves n'arrivent pas à savoir quelle opération il convient de faire dans les problèmes même si les manipulations évoquées leur sont familières et s'il est clair qu'ils les conçoivent parfaitement.
> 4) En première année d'école primaire on peut observer des enfants qui « savent compter » mais qui ne mettent pas

[1] Le groupe Développement des Mathématiques à l'École (DéMathÉ) a fonctionné de 2003 à 2010, sous la direction de Claire Margolinas, avec Olivier Rivière et Floriane Wozniak et la collaboration technique de Bruno Mastellone ; de 2003 à 2007 avec Bruno Canivenc et Marie-Christine de Redon ; de 2005 à 2007 avec Catherine Aurand ; de 2003 à 2004 avec Colette Andreucci et Alain Mercier. Ce groupe a été créé à l'UMR ADEF (INRP – Université de Provence – IUFM d'Aix-Marseille) puis soutenu par le projet EducMath (INRP) et l'IUFM d'Auvergne. Les situations étudiées dans cet article ont été conçues et expérimentées dans le cadre de ce groupe.

> en œuvre ce savoir pour effectuer des tâches qu'ils comprennent bien pourtant et qui requièrent le comptage : Ils ne comptent qu'en réponse à une demande sociale bien précise et n'ont aucune idée de ce à quoi cette tâche sert ni ce qu'elle permet de maîtriser. (Brousseau, 1984, pp. 2-3).

Il procède alors à une comparaison de ces difficultés :

> Quoique assez différents, ces divers problèmes peuvent être rapprochés intuitivement, il s'agit chaque fois de dénombrer mentalement un ensemble qui n'est pas concrètement présent ou réalisé. (Brousseau, 1984, p. 3)

Cette étude lui permet de donner une première définition mathématique de ce qu'il appelle « l'énumération » :

> Une énumération d'un ensemble est une injection de cet ensemble sur une section commençante de ℕ. (Brousseau, 1984, p. 4)

Il formule alors les hypothèses suivantes :

> Ce serait donc la possibilité de produire et de contrôler la production effective de telles énumérations qui ferait défaut aux élèves en difficulté sur les questions évoquées plus haut. […]
> i) Les élèves doivent passer très brutalement d'un contrôle perceptif de l'énumération de petites collections d'objets déplaçables mais immobiles à un contrôle complètement mental et verbal d'ensembles quelconques.
> ii) Les professeurs ne disposent pas de situations d'enseignement qui leur permettraient de faire développer par leurs élèves des savoir-faire, des anticipations, des stratégies dans des rapports expérimentaux avec le milieu. Ils ne disposent pas non plus de ce fait de moyens de négocier avec eux des contrats didactiques raisonnables à propos de ces questions ni même d'évoquer avec eux ce genre de difficultés.
> iii) Ces conditions seraient une cause principale des difficultés observées. (Brousseau, 1984, pp. 4-5)

C'est sur la base de ces hypothèses que Briand (1993) commence son travail de thèse, principalement dans le domaine des savoirs « prénumériques et numériques » (Briand, 1999).

2. Caractériser l'énumération au-delà du dénombrement

Briand (1999) identifie l'énumération comme une connaissance permettant de contrôler une situation de comptage:

> […] pour contrôler une situation de comptage, l'enfant doit faire fonctionner une connaissance (l'énumération) qui se réfère à l'exploration de la collection et qui conditionne complètement le bon déroulement de l'activité. […] (Briand, 1999, p. 52[2])

Ainsi, tout dénombrement par comptage organise la mise en correspondance biunivoque de la liste (stable et ordonnée) des mots-nombres avec l'ensemble des éléments de la collection d'objets qu'il s'agit de dénombrer. Le dénombrement par comptage a été étudié également dans le cadre de la psychologie (notamment par : Gelman & Gallistel, 1978; Gelman, 1983; Cowan, Dowker, Christakis, & Bailey, 1996; Le Corre, Van De Walle, Brannon, & Carey, 2006; Butterworth, Reeve, Reynolds, & Lloyd, 2008). Cependant, notre objet d'étude n'est pas le dénombrement par recours au comptage, mais l'énumération qui est une technique assurant le passage en revue une et une seule fois de chaque élément d'un ensemble, dont nous ne discutons pas l'importance relative par rapport à d'autres techniques intervenant dans le comptage, comme dans les travaux cités.

Dans le cas classique du dénombrement d'un ensemble de points dessinés sur une feuille, comme sur la figure 1, le doigt pointe un à un les points à dénombrer. Ce faisant, l'ensemble des points est parcouru selon un certain « ordre » qui peut être représenté par le chemin réalisé par le doigt.

Figure 1. – Ensemble de 11 points épars.

C'est ainsi que Briand va constater que *:*

> dans la réalisation effective de l'énumération d'une collection, la relation d'ordre n'est pas nécessaire. Elle est une conséquence d'une énumération. (Briand, 1993, p. 30)

[2] Les numéros de pages concernant la thèse de Joël Briand sont ceux du texte déposé sur les archives ouvertes « thèses en ligne », http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00494623 (permalien).

Ceci le conduit à faire une étude mathématique de l'énumération comme production d'une relation d'ordre et à proposer une première définition pour un ensemble fini : « une énumération de l'ensemble E est un ordre total sur cet ensemble ». Cependant, cette première définition ne rendant pas compte « de la façon dont l'énumération se réalise », il va introduire la notion de chemin :

> Soit un ensemble E et une relation binaire antisymétrique notée R. Un chemin C de E selon R est une suite d'éléments de E (a_1, a_2, a_3, a_4, …, a_n) telle que $\forall i \in [1, n-1]$ alors (a_i, a_{i+1}) $\in$R. (Briand 1993, p. 24).

Et une seconde définition qui s'appuie sur les chemins :

> Soit un ensemble E fini muni d'une relation antisymétrique R. Tout chemin (relatif à R) maximal sans cycle de E est une énumération de l'ensemble E. (op. cité, p. 25).

3. Situations fondamentales de l'énumération

Briand (1993) suit la méthode fondatrice de la théorie des situations didactiques, qui est de « faire correspondre […], à chaque connaissance, sa situation fondamentale. » (Brousseau, 1984, p. 3). Il a ainsi étudié plusieurs situations fondamentales telles que : « l'énumération d'une collection d'objets montrés soit (indépendamment de l'activité numérique) la solution du problème posé » (Briand, Lacave-Luciani, Harvouët, Bedere, & Goua De Baix, 2000). Nous nous intéressons ici particulièrement à l'une d'entre elles, la situation *des boîtes d'allumettes :*

> Un élève dispose devant lui (sur une table) d'un tas de boîtes d'allumettes identiques percées sur le côté d'un petit trou permettant le passage d'une allumette. Des bâtonnets sont les allumettes desquelles on a ôté le phosphore. Ces bâtonnets, en grand nombre, sont dans une boîte plastique. Il s'agit de placer une allumette et une seule dans chaque boîte sans l'ouvrir, de savoir lorsque l'on a terminé. Lorsque l'élève estime avoir terminé, il vérifie ou fait vérifier par un autre élève (ou par l'enseignant au début). Pour cela, les élèves assistent à l'ouverture des boîtes. S'il y a une seule allumette dans chaque boîte et si aucune boîte n'est vide, alors l'élève a réussi. (Briand *et al* 2000, p. 10)

La situation est proposée à des élèves de moyenne section de maternelle – enfants de 4 à 5 ans –, selon deux modalités correspondant aux variables didactiques identifiées dans l'analyse *a priori* : dans la modalité 1 les élèves peuvent déplacer les boîtes d'allumettes à leur guise, dans la modalité 2 les boîtes sont collées sur un support. L'expérimentation a eu lieu dans le cadre du COREM[3] dans deux classes (GM1 et GM2).

Dans la même période, Berthelot & Salin (1992, pp. 232-238) ont mis en évidence l'effet des conditions spatiales dans des situations d'énumération à partir de l'observation de trois situations proposées à des enfants entre quatre et cinq ans : la situation des boîtes d'allumettes avec 6 puis 20 boîtes ; la situation du facteur dans laquelle il faut déposer une lettre dans chaque boîte issue d'« un ensemble de 18 casiers, placés en 3 rangées superposées de 6 casiers chacune, de longueur totale 2,50 m » (*op. cit.* p. 237) ; et une situation identique à celle du facteur mais où les « boîtes sont petites, disposées en quadrillage, sous le contrôle de la vue, et indéplaçables » (*op. cit.* p. 237). Leurs observations ont ainsi montré que les élèves qui réussissent à accomplir ces tâches d'énumération utilisent, dans le cas des boîtes d'allumettes fixées sur un support, une exploration des boîtes s'appuyant sur l'organisation spatiale des éléments de la collection à énumérer en construisant « une stratégie adaptée par la prise en compte des repères (type ligne-colonne) suggérés par la situation elle-même » (*op. cit.* p. 238).

Dans le prolongement de ces travaux, nous avons alors observé une situation, qui est une déclinaison de la situation fondamentale de l'énumération, dans laquelle l'organisation spatiale n'induit pas de repère, de manière à étudier finement les stratégies des élèves.

ÉNUMÉRATION DE COLLECTIONS D'OBJETS FIXES

1. Stratégies spatiales utilisées pour dénombrer

Les psychologues se sont intéressés, de longue date, aux stratégies spatiales utilisées pour dénombrer. Shannon (1978) a étudié les techniques de comptage d'un ensemble de dix points suivant différentes dispositions en lignes ou en colonnes, sur une cohorte de 25 enfants de chaque catégorie d'âges entre 3 et 6 ans.

Trois techniques de pointage sont identifiées :

[3] Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, École Jules Michelet, Talence.

> In the *proximal* strategy sequencing was based on the proximity of items as in the Potter and Levy (1968) study. In the *peripheral* strategy the child outlined the form before counting the interior items. A number of the younger children counted only the peripheral items. In the *linear* strategy the child counted up and down columns, back and forth across rows, or used a consistent left-to-right sequence. (Shannon, 1978, p.1213).

Une évolution des techniques de comptage en fonction de l'âge des enfants et de leur maîtrise de la file numérique est observée. La technique *proximal count* est utilisée par des enfants de 3 ans et son usage décroît au profit de la technique *peripherical count* vers 4 à 5 ans, tandis que la technique *linear count* est mise en œuvre par des enfants de 5 à 6 ans. La maîtrise de la comptine numérique aurait également un effet dans le choix des stratégies. Ainsi, un enfant de 6 ans qui utilise la technique *linear count* avec 10 points, va revenir vers la technique *peripherical count* pour dénombrer 14 points ; de la même façon, un enfant qui utilise la technique *peripherical count* avec 7 points, emploiera la technique *proximal count* avec 10 points.

Nous retenons de cette étude le recours à l'espace comme principe organisateur de l'énumération :

> In sum, it appears that in counting visual arrays children adopt spatial strategies which are designed to bring order to the task, but that in doing so they are limited by their processing capabilities. (Shannon, 1978, p. 1215)

2. Retrouver des objets dans une salle de jeu

Cornell et Heth (1983) se sont intéressés aux « connaissances spatiales » (*spatial cognition*) dans deux situations dans lesquelles des enfants doivent récolter des objets « their common feature the unconstrained search for objects in open environments » (p. 94). Nous allons nous intéresser à la deuxième situation, qui concerne des enfants de 3 à 5 ans (32 enfants de chaque classe d'âge).

Dans l'expérimentation en laboratoire, douze pièces de puzzle sont cachées par un expérimentateur devant un enfant, dans une salle de jeu dans laquelle se trouve un certain nombre d'objets divers. Les pièces sont cachées dans des enveloppes, disposées de façon circulaire autour d'un espace dans lequel évoluent l'enfant et l'expérimentateur. L'enfant doit récolter les pièces puis reconstruire le puzzle.

Dans cette situation d'action, l'enfant est amené à explorer de façon exhaustive un ensemble fini de douze lieux. S'il veut minimiser ses déplacements, il est conduit à explorer une seule fois chaque lieu. L'énumération dans le méso-espace de la salle de jeu apparait ainsi comme une condition suffisante, mais non nécessaire, de réussite.

L'intérêt des auteurs ne porte pas spécifiquement sur l'énumération, cependant un résultat attire notre attention : les répétitions (recherche dans un lieu déjà récolté) sont corrélées avec l'âge des enfants (environ 19 % pour les enfants de 3 ans et 10 % pour ceux de 5 ans) et le moment de reconstitution du puzzle (18 % avec retour au centre et 11 % quand toutes les pièces sont recueillies avant la reconstitution).

Par contre, les répétitions ne sont pas corrélées avec la nature du lieu dans lequel les objets sont cachés, contrairement aux hypothèses initiales des auteurs, qui pensaient que les enfants se souviendraient de l'emplacement des objets grâce aux objets proches des enveloppes. L'hypothèse initiale des auteurs : (1) les enfants se souviennent des objets proches des enveloppes, a été testée en concurrence avec une autre hypothèse (2) ils organisent leur recherche en suivant un parcours circulaire. Un test de Monte Carlo permet de favoriser la seconde hypothèse. Les enfants ont exploité l'organisation spatiale des lieux où étaient cachés les objets comme moyen de différencier les lieux explorés de ceux qui ne l'avaient pas encore été. Cependant, la situation ne contraignait pas les enfants à rendre leur exploration plus efficace et donc à énumérer, puisque pour réussir il suffisait de trouver toutes les pièces du puzzle.

C'est pourquoi il nous semble nécessaire d'étudier les stratégies des enfants, dans le micro-espace, lorsque les éléments à énumérer ne sont pas spatialement organisés, ni mobiles, ni discernables les uns par rapport aux autres et que la réussite exige une énumération. C'est pour recueillir ces données auprès d'élèves de 4 à 12 ans que nous avons élaboré la situation des *sucres cachés*. Nous avions en effet besoin de données pour analyser, du point de vue des organisations spatiales, les techniques d'énumération mises en œuvre. D'autre part, nous voulions voir s'il y avait une évolution dans les taux de réussite ou dans la nature des techniques utilisées. Cette situation, conçue pour les besoins de notre étude hors classe, n'est pas une situation d'apprentissage. Elle s'apparente à la situation des boîtes d'allumettes (Briand, Lacave-Luciani, Harvouët, Bedere et Goua De Baix, (2000) ou à celle des pots (Berthelot & Salin 1992).

3. La situation des sucres cachés

Une série de points est dessinée sur une feuille. Sur chaque point est posé un sucre et un seul, recouvert d'un chapeau (figure 2).

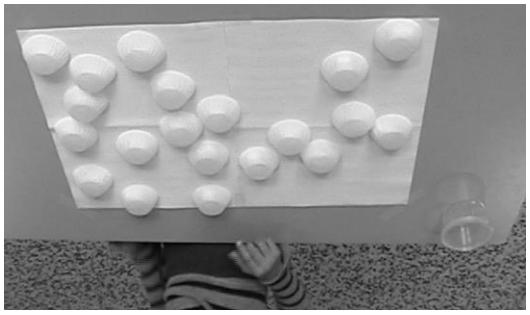


Figure 2. **–** Une configuration matérielle de la situation (la photo a été retournée de manière à donner une idée du point de vue de l'élève).

Il s'agit de ramasser tous les sucres en respectant les règles suivantes :

1. Pour pouvoir prendre un sucre, il faut attraper le chapeau, prendre le sucre, poser le sucre dans un récipient désigné et reposer le chapeau sur le point.
2. Pour avoir le droit de saisir un nouveau chapeau, il faut avoir pris un sucre et l'avoir déposé dans le récipient.
3. Pour gagner, il faut avoir pris tous les sucres et annoncer que la récolte des sucres est terminée en disant « j'ai fini ».

On perd dans deux cas :

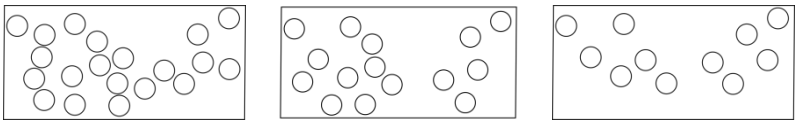
a) Au cours du jeu, si l'on soulève un chapeau et qu'il n'y a pas de sucre, dans ce cas le jeu s'arrête ;
b) À la fin du jeu, si une fois enlevés tous les chapeaux, il reste un sucre sur la table.

Dans cette situation, pour gagner, chacun des chapeaux doit être soulevé une et une seule fois, et donc la collection des chapeaux énumérée. Alors que le but du jeu est de récupérer les sucres cachés, la fonction des chapeaux est de matérialiser le traitement effectif des éléments de la collection puisque l'absence de sucre témoigne de ce que le chapeau a déjà été soulevé. Les points ne sont que des marqueurs de la place occupée par les chapeaux (et les sucres) pour assurer que leur configuration reste la même au cours du travail de l'élève mais aussi que la situation soit identique au cours des différentes expérimentations.

Les élèves ne pouvaient pas marquer les chapeaux ou dessiner sur la feuille. En absence d'ostensif pour identifier ce qui a été traité, c'est l'organisation de l'exploration de la collection des chapeaux qui permet la prise en charge du contrôle du traitement des chapeaux.

Les collections de points

Quand il y a peu de points, la *stratégie de base* qui consiste à mémoriser les chapeaux déjà soulevés est efficace. Notre objectif étant de réaliser des observations avec des élèves d'âges différents, nous avons construit des supports différents nommés A, B et C dans la suite de ce texte. Ils sont présentés sur la figure 3.



Support A Support B Support C

Figure 3. – Les différents supports dans la position présentée aux élèves (échelle réduite : tous les supports réels sont au format A2).

Le support A comporte 20 points. En enlevant cinq points du support A, on obtient le support B qui contient donc 15 points et en retirant encore 4 points au support B on obtient le support C qui a 11 points. Sur ces feuilles blanches les points sont épars et aucune configuration spatiale particulière n'apparaît nettement.

4. Analyse *a priori*

Les stratégies possibles, qui peuvent être combinées, reposent soit sur un principe organisateur « local » soit sur une structuration « globale » de l'ensemble des chapeaux à énumérer. Nous verrons dans l'analyse des

observations qu'elles sont présentes successivement dans les techniques utilisées par les élèves. Nous illustrerons notre analyse à partir de la collection des chapeaux posés sur le support A.

Cheminement de proche en proche

Il s'agit d'une adaptation de la stratégie de base : chaque point déjà énuméré est mémorisé en relation avec ses voisins (Shannon, 1978). L'énumération se fait alors de proche en proche. La difficulté est de contrôler le caractère traité ou non traité de chaque point, en particulier s'il y a plusieurs chapeaux proches d'un même chapeau, comme par exemple dans la figure 4. Deux chapeaux peuvent être soulevés dans leur relation de proximité au premier chapeau.

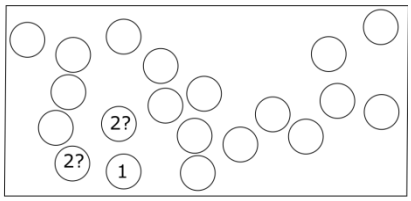


Figure 4. **–** Cheminement de proche en proche.

Constellations

Il est parfois possible de reconnaître dans une configuration de points une « constellation » : image socialement connue (visage, points du dé, etc.). Dans ce cas, suivre une telle constellation peut être efficace pour réussir l'énumération. Dans notre configuration, nous ne voyons pas de constellation apparaître.

Bords

Il est possible de « suivre les bords » (c'est-à-dire de pointer d'abord tous les points les plus proches des bords de la feuille), puis de tenter d'énumérer les points « intérieurs » en faisant une sorte « d'escargot ». Cette procédure est hasardeuse car la détermination d'un point traité ou non devient de plus en plus difficile à contrôler quand on s'éloigne des bords. Dans la figure 5, sans marquage, il n'est pas facile de savoir que le neuvième chapeau a été soulevé alors que le chapeau marqué d'un point d'interrogation ne l'a pas encore été.

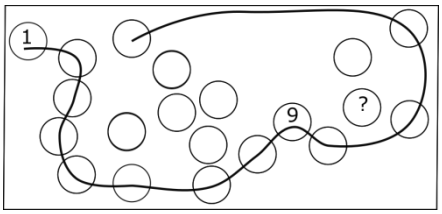


Figure 5. – Cheminement en suivant les bords de la feuille.

Paquets

Partitionner la collection en « paquets » permet de se ramener à la stratégie de base à l'intérieur des paquets. La difficulté consiste à garder la mémoire de la partition – surtout si un chapeau se trouve à la « frontière » entre ces paquets (figure 6) – tout en assurant une énumération correcte au sein de chaque « paquet ».

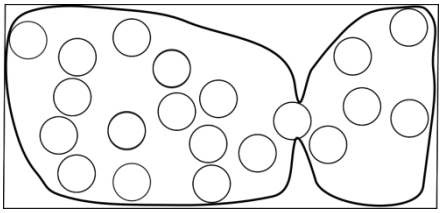


Figure 6. **–** Point frontière.

Chemins parallèles

Pour balayer la collection sans oublier de point ni en pointer deux fois, une solution efficace consiste à suivre une direction. Ce faisant, on attribue à chaque point une position sur un réseau de droites parallèles. La succession des positions permet de ne pas oublier de point, ni de pointer deux fois le même point puisqu'un réseau de parallèles garantit l'absence d'intersection. En situation, il ne s'agit pas toujours de droites parallèles au sens strict car il n'est pas possible de visualiser un alignement des points sur les supports de cette manière, cependant les chemins ayant une orientation similaire jouent le même rôle.

En termes d'énumération, la difficulté de la situation proposée est qu'il y a peu de *n-uplets* de points vraiment alignés ($n > 2$) et que ces alignements constitués peuvent être sécants.

Il faut donc trouver un moyen de contrôler que les chemins suivis ont des orientations similaires. Un tel contrôle peut être facilité si les directions retenues sont présentes dans le milieu (bords de la feuille, bords de la table, etc.). La difficulté consiste alors à mémoriser les choix opérés pour suivre ces lignes, comme dans la figure 7 où le chapeau marqué d'un point d'interrogation aurait pu appartenir à la ligne située au-dessus.

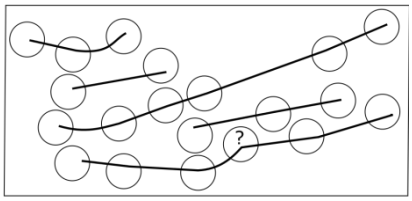


Figure 7. – Lignes d'orientation similaire.

5. Analyse approfondie des observations

Étude quantitative des résultats

La situation des sucres a été proposée à 46 élèves de l'école primaire[4]. Le support A a été proposé à 18 élèves de cycle 3, le support B à 11 élèves de cycle 2 et le support C à 17 élèves de maternelle. Lorsqu'un élève échoue la première fois, il peut faire un second essai sur le même support s'il le souhaite mais pas de troisième essai.

Les données sont constituées d'un ensemble de 78 clips vidéo correspondant à l'ensemble des essais. Le tableau 1 résume le nombre de réussites et d'échecs aux différents essais en mentionnant le niveau des élèves et les supports utilisés. En sommant le nombre de réussites et d'échecs au premier essai, on retrouve le nombre d'élèves et en sommant le nombre de réussites et échecs au second essai on retrouve le nombre d'échecs au premier essai.

	Nombre d'élèves	Support	Réussite au 1er essai	Échec au 1er essai	Réussite au 2e essai	Échec au 2e essai
Maternelle	17	C	5	12	4	8
CP/CE1	9	B	1	8	5	3
CE2	9	A	0	9	4	5
CM2	9	A	4	5	2	3
Total	44		10	34	15	19

Tableau 1. – Réussite et échec aux deux essais.

Ainsi, par exemple, sur les 17 élèves de maternelle qui ont travaillé sur le support C, 5 d'entre eux ont réussi dès le premier essai. Sur les 12 élèves qui ont échoué au premier essai, 4 ont réussi au second essai. Au final, 9

[4] L'école primaire en France se compose de l'école maternelle (3 à 6 ans) et de l'école élémentaire (6 à 11 ans). Le cycle 1 correspond aux deux premières années de l'école maternelle (petite et moyenne section), le cycle 2 concerne les élèves de dernière année de l'école maternelle (grande section) et des deux premières années de l'école élémentaire (CP, CE1). Les trois dernières années de l'école élémentaire forment le cycle 3 (CE2, CM1, CM2).

élèves de maternelle sur 17 ont réussi au bout de deux essais maximum, soit un taux de réussite de 53 % (tableau 2).

	Nombre d'élèves	Réussites	% réussites
Maternelle	17	9	53 %
CP/CE1	9	6	67%
CE2/CM2	18	10	56 %

Tableau 2. – Réussites au bout de deux essais maximum.

Ces résultats mettent en évidence un nombre d'échecs élevé, même après un second essai. En effet, dans le meilleur des cas, les deux tiers seulement des élèves d'un niveau donné réussissent à énumérer correctement tous les chapeaux. Alors que quatre élèves de CE2 sur neuf réussissent au second essai, le même taux de réussite est obtenu dès le premier essai en CM2. Le taux de réussite au cycle 3 (57 %) cache donc des fluctuations entre le CE2 et le CM2 : à l'issue des deux essais, 67 % des élèves de CM2 réussissent (6 élèves sur 9) contre 44 % en CE2 (4 élèves sur 9). Ces fluctuations du taux de réussite d'un niveau à un autre montrent donc la fragilité des connaissances acquises. Regardons à présent plus en détail les techniques d'énumération qui ont conduit à un succès.

Les techniques d'énumération conduisant à une réussite

Une question méthodologique se pose concernant la description des techniques utilisées par les élèves. Pour les besoins de cet article, nous ne retenons que l'ordre dans lequel les chapeaux ont été saisis. Nous avons considéré qu'il y avait discontinuité dans le cheminement d'un point à un autre lorsque le chapeau soulevé n'est pas contigu au chapeau précédent. Sur les différentes figures se trouvent le numéro d'ordre du traitement du point et un trait continu entre deux points contigus traités consécutivement.

Sans distinguer le premier du deuxième essai, neuf élèves de maternelle ont réussi. La technique dominante est le partitionnement de l'espace en « paquets », et au sein d'une même zone, un cheminement de proche en proche. Tous les élèves qui réussissent dès le premier essai, ont fait une partition qui repose sur une latéralisation droite-gauche[5] (figure 8, Mat -E1-e1).

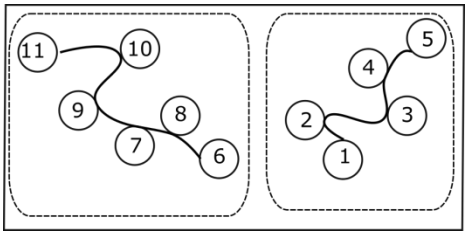


Figure 8. – Partitionnement en deux de l'ensemble des chapeaux (feuille C).

Le recours au sens droite-gauche peut se comprendre en examinant la figure 2. La main droite de l'élève est posée sur la table, il saisit donc avec la main droite ce qui est à sa portée immédiate, ce qui induit une progression vers la gauche pour les élèves droitiers.

Un seul élève partitionne avec succès l'ensemble des chapeaux en quatre sous-ensembles, en faisant des paquets de trois ou de deux (figure9, Mat-E16-e2).

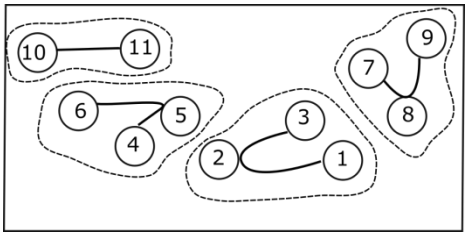


Figure 9. – Partitionnement en quatre sous-ensembles (feuille C).

[5] Nous utilisons le code suivant classe-élève-essai, ainsi Mat-E1-e1 signifie que ce qui est transcrit est le premier essai de l'élève 1 de maternelle, la figure représente les chapeaux tels que l'élève les verraient suivant une vue de dessus : les ronds à droite de l'image sont à la droite de l'élève.

La deuxième technique utilisée est celle d'un chemin continu qui se réalise de proche en proche en suivant une ou plusieurs directions principales non nécessairement parallèles (représentées en pointillé sur la figure 10, Mat-E6-e2).

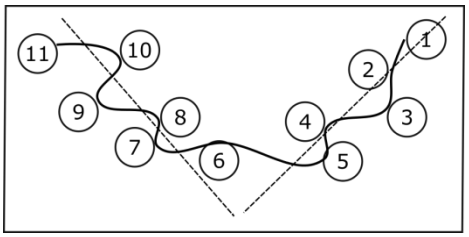


Figure 10. – Chemin de proche en proche (feuille C).

Considérons à présent les techniques mises en œuvre par les élèves de CP-CE1. Tous les élèves réalisent un partitionnement en deux, voire trois sous-ensembles. Le partitionnement en deux sous-ensembles selon la latéralisation droite-gauche est dominant : cinq des six élèves l'utilisent, traitant les points situés à droite comme un « bloc » parcouru selon un cheminement dont la direction globale, ascendante ou descendante, est verticale. Les dix autres points semblent alors globalement parcourus selon une direction horizontale, ou une direction verticale (CP-CE1-E2-e2, figure 11). Il s'agit en effet d'une caractéristique anthropologique fondamentale des sociétés de l'écrit, qui organisent non seulement l'écriture mais aussi l'espace et les corps suivant des directions perpendiculaires (Goody, 1979; Privat, 2006).

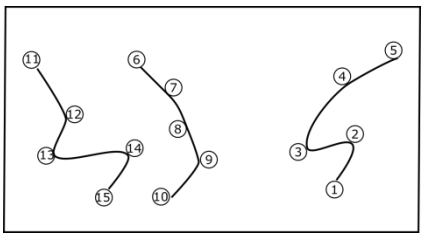


Figure 11. – Partitionnement et direction verticale (feuille B).

Les élèves de CE2 et de CM2 travaillent sur le support A où le nombre de sucres est plus important sans pour autant que les dimensions de la feuille soient modifiées. Ainsi, l'augmentation de la densité des chapeaux sur la feuille rend la perception visuelle d'un partitionnement de l'espace, et donc d'une partition potentielle de l'ensemble des chapeaux, plus difficile. Un seul élève, en CE2, utilise clairement un partitionnement reposant sur la latéralisation gauche-droite et un seul élève, en CM2, suit clairement un chemin qui parcourt l'ensemble des chapeaux de proche en proche. Les autres élèves font une partition selon le principe organisateur de la proximité spatiale sans que n'apparaissent clairement de directions privilégiées (figure 12, CM2-E4-e1). Une telle technique parait bien fragile et fortement liée à la contingence, en l'occurrence à la configuration spatiale des points.

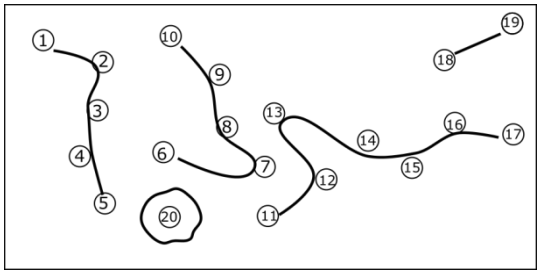


Figure 12. – Partitionnement sans direction privilégiée (feuille A).

La technique de l'élève dans ces différents cas est conditionnée par le milieu : la configuration des points apparaît alors comme une variable didactique essentielle. Sur les supports C ou B, un espace physique délimite une zone qui partitionne spatialement la configuration des points et par conséquent l'ensemble des chapeaux.

Ces deux grands sous-ensembles identifiés, les points sont parcourus selon le principe organisateur de la proximité spatiale.

Nous avons toutefois observé deux cas (figure 13, CM2-E6-e2 à gauche et CE2-E6-e2 à droite) où la technique de l'élève correspond à l'exploration de l'ensemble des chapeaux selon une structuration (globalement) en lignes horizontales.

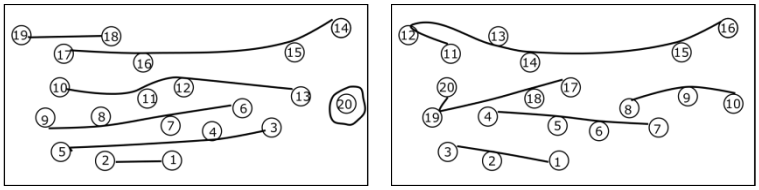


Figure 13. – Structuration en lignes horizontales (feuille A).

Cependant, on voit bien chez ces deux élèves comment ce principe est difficile à tenir : dans un cas un point apparaît isolé, dans l'autre cas le principe n'a pas été tenu jusqu'au bout.

Un exemple de techniques d'énumération non réussie

Nous avons observé que la réussite de l'énumération reposait sur une organisation (explicite ou implicite) de l'ensemble à explorer. Nous allons à présent observer le cas d'un élève de CE2 qui échoue à deux reprises (figure 14).

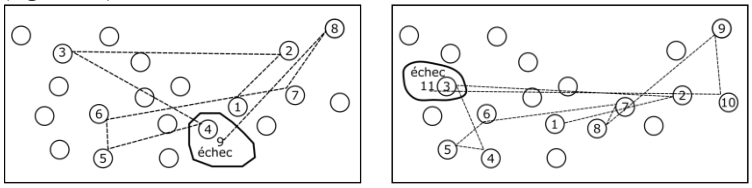


Figure 14. **–** Essais 1 et 2 de CE2-E7 (feuille A).

Un constat s'impose : cet élève n'utilise pas, comme nous l'avons vu précédemment, la proximité spatiale comme principe organisateur. À l'inverse, il semble saisir les chapeaux dans des espaces qu'il espère suffisamment éloignés de ceux dans lesquels il a déjà ramassé des sucres pour ne pas risquer de soulever deux fois le même. Ainsi, l'éloignement entre deux points consécutivement traités semble être un critère prédictif de l'échec car, en ce cas, il n'est pas possible de contrôler la constitution de l'ensemble des points traités. Cet élève semble moins chercher à réussir qu'à retarder le moment de son échec.

6. Stratégies spatiales utilisées pour énumérer

La structuration spatiale de la collection des sucres facilite la constitution et le contrôle des éléments déjà traités et non encore traités par le cheminement d'un élément à un autre qu'elle induit. Lorsqu'un partitionnement spatial est assez visible, comme avec le support C où un espace médian semble bien délimiter deux sous-ensembles, les élèves ont opportunément structuré leur énumération en partitionnant l'ensemble des chapeaux à partir de ce partitionnement spatial. En revanche, la proximité spatiale de deux chapeaux joue un rôle organisateur de l'exploration de l'ensemble des chapeaux, dès lors que l'élève ne reconnaît pas de structuration spatiale prototypique. Quelques élèves néanmoins ont investi la situation en donnant des directions à leur exploration. Ce sont donc des techniques « opportunistes » et contingentes reposant sur un abord perceptif de la situation qui sont utilisées.

Nos résultats confirment les difficultés des élèves face à l'énumération : nous constatons de nombreux échecs et peu de stratégies fiables, même en ce qui concernent les réussites. Comparons maintenant nos résultats avec ceux des travaux antérieurs.

Dans la situation des boîtes d'allumettes (Briand, Lacave-Luciani, Harvouët, Bedere, & Goua De Baix, 2000), il ne s'agit pas de retrouver un objet caché. Cependant un objet est bien caché, l'allumette déposée dans la boîte, ce qui induit la nécessité d'énumérer la collection des boîtes. Dans la seconde modalité de la situation, les boîtes sont fixes selon une organisation qui n'est pas précisée : « la disposition de la collection est choisie sans structure spatiale évidente. » (*op. cit.* p. 19). Les élèves doivent placer une allumette dans chaque boîte. Lorsque cette situation est proposée, les élèves ont bénéficié de deux phases collectives pour « faire formuler les

stratégies » et « faire anticiper un résultat » et les élèves ont, à quatre reprises, vécues la situation avec des boîtes mobiles.

Dans Briand, Loubet & Salin (2004) est présenté le résultat d'une observation auprès de vingt-cinq élèves de moyenne section de maternelle. Bien que « le marquage des boîtes n'est ni suggéré, ni institué » (Briand *et al.*, 2000) un feutre est mis à la disposition des élèves ce qui, par effet de contrat didactique, conduit une majorité d'entre eux à utiliser le marquage (20 élèves sur 25). De la même façon, une majorité d'élèves (21 sur 25) va organiser spatialement l'exploration des boîtes soit en suivant des lignes horizontales (de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche), soit de proche en proche en « suivant des arcs de cercles virtuels », soit en adoptant un cheminement en « escargot ».

Le travail préalable sur l'exploration de la collection des boîtes d'allumettes fixées et la présence d'un feutre qui induit la technique de marquage, empêchent de tirer des conclusions sur le rôle des organisations spatiales dans l'élaboration d'une technique d'énumération. Ainsi, nos propres observations, parce qu'elles ont été conduites sans enseignement préalable, avec des élèves d'âges et de niveaux scolaires différents, sans recours possible au marquage, ont permis de mettre en évidence que l'organisation ou plutôt la structuration spatiale de la collection à énumérer est une technique d'énumération tandis que les conditions physiques (proximité et accessibilité des objets à traiter) de la réalisation de l'inventaire jouent le rôle de variables didactiques en situation d'énumération.

ÉNUMÉRATION DE COLLECTIONS D'OBJETS DÉPLA-ÇABLES, TRI ET EXPLORATION

1. Retour sur la situation des boîtes d'allumettes

Nous allons maintenant nous intéresser à la modalité 1 identifiée par (Briand, Lacave-Luciani, Harvouët, Bedere, & Goua De Baix, 2000), dans laquelle les élèves peuvent déplacer les boîtes d'allumettes à leur guise (voir *supra*). Les chercheurs vont constater un taux de réussite nettement différent lors de la première séance avec un groupe de six élèves : cinq échecs dans la classe GM1, six réussites dans la classe GM2, alors que l'analyse *a priori* ne permettait pas de l'anticiper.

L'observation de la différence de réussite dans les deux classes a permis aux chercheurs de découvrir après-coup que les conditions de la mise à disposition des boîtes d'allumettes et leur place sur la table provoquent « un effet d'ergonomie » (*op. cit.,* p. 13). Dans la classe GM1, les boîtes d'allumettes sont déposées en vrac près de l'élève sur la table assez près de lui, alors que dans la classe GM2 toutes les boîtes d'allumettes sont présentées dans un grand carton qui est posé assez loin de l'élève.

> Dans le cas de GM2, l'action 4 [poser la boîte remplie en l'écartant des boîtes non encore remplies] sera réalisée au moindre coût en reposant la boîte devant soi. Il n'y a aucune raison pour que l'élève repose la boîte parmi les boîtes non encore remplies. La réussite à l'activité peut donc être constatée alors que l'élève n'a pas décidé de séparer les deux collections. […] la deuxième collection (boîtes-allumettes) peut se construire totalement à son insu. On peut donc faire l'hypothèse que la différence de résultats est largement explicable par cette différence d'organisation. (*op. cit.*, p. 14)

Une autre différence concernant l'espace a été découverte après-coup, il s'agit de la place de la boîte contenant les allumettes qui, si elle est placée au centre de la table peut jouer le rôle de « séparateur naturel » (p. 14) « entre les boîtes remplies et les boîtes à remplir » (p. 14).

Enfin, les auteurs procèdent à l'étude détaillée du secouage :

> À un moment ou à un autre, les enfants secouent pour savoir s'il y a une allumette dans une boîte. […] Il peut être un moteur de tri [des boîtes avec allumettes] afin de constituer une nouvelle collection. […] L'élève qui ne se fonde que sur le bruit pour trier […] est devant une tâche très coûteuse et peu fiable. (p. 15).

Prenant la suite de ces réflexions, nous allons nous intéresser à l'énumération de collections d'objets déplaçables et à la question du tri, dont nous montrerons qu'elle est liée à l'énumération dans ce type de milieu.

2. Classer, ordonner, trier

La définition d'une relation d'équivalence dans un ensemble permet de constituer des classes et donc de classer ses éléments. Par exemple, étant donné une collection de jetons de couleurs primaires, la relation « avoir même couleur que » définit trois classes que l'on peut nommer « rouge, bleue, jaune ».

La définition d'une relation d'ordre sur un ensemble permet d'ordonner ses éléments. Par exemple, étant donné une collection de bâtons, la relation « être plus long que » permet d'ordonner les bâtons suivant leur longueur.

En revanche, « trier » n'est pas défini de façon unique en mathématiques. Comme le souligne Briand (1999-2000, pp. 8-9), trier peut signifier « classer » – le tri selon un ou plusieurs attributs permet alors de définir une partition de l'ensemble – ou « ordonner » – les algorithmes de tri en informatique, par exemple, reposent sur une relation d'ordre. Dans la langue vernaculaire, « trier » signifie, suivant les contextes, classer – « répartir en plusieurs classes et selon certains critères sans éliminer »[6] –, ordonner, ou prendre une signification plus spécifique : « Séparer, dans un ensemble de choses, ce que l'on doit conserver de ce que l'on doit éliminer »[7] qui revient à faire une partition entre « ce qui est gardé » et « ce qui est éliminé ».

Trier la collection de jeton coloré suivant la propriété « être jaune » revient en effet à partitionner la collection en deux sous-ensembles : celui des objets « jaunes » et celui des objets « non jaunes ». Si la collection était préalablement classée suivant le critère des couleurs, les classes autres que jaunes seraient donc réunies en un seul sous-ensemble, le tri peut donc s'obtenir à partir du classement. Réciproquement, effectuer un tri suivant le critère « jaune » puis « rouge » puis « bleu » permet d'obtenir le classement de la collection suivant le critère des couleurs.

3. Dénombrement de jetons

Considérons le dénombrement par comptage de jetons mobiles posés sur une table. Pour s'assurer qu'une relation biunivoque entre l'ensemble des mots-nombres et l'ensemble des jetons est construite, il est nécessaire de contrôler que l'exploration de l'ensemble des jetons est bien exhaustive. Une technique en usage dès trois ans consiste à déplacer les jetons sur la table (figure 15).

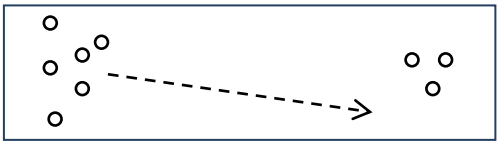


Figure 15. – Dénombrement de jetons déplaçables.

Ce geste qui déplace les jetons permet de contrôler aisément ce qui est compté de ce qu'il reste à compter et participe de la constitution de d'une partition liée au tri des jetons selon le critère « a été compté ». L'énumération effective se réalise par la construction progressive de deux ensembles selon un processus dynamique : l'ensemble des objets non comptés et celui des objets comptés (c'est-à-dire mis en correspondance biunivoque avec la comptine numérique) où le cardinal du second ensemble augmente jusqu'à ce que le cardinal du premier devienne nul. Le micro-espace de la table est organisé pour séparer les objets traités des objets non traités et matérialiser cette activité de tri. Il s'agit ici de la description de l'observateur et pas de l'enfant qui réalise ce dénombrement. En effet, cette activité est incorporée (Lahire, 1998; Bourdieu, 2000). Elle a été rencontrée par l'enfant comme un tout, qui comprend l'énoncé des mots-nombres et le geste, déclenché par l'injonction « compte ».

L'observation du dénombrement de points dessinés ou de jetons mobiles permet de mettre en lumière que la technique d'énumération pour dénombrer conduit à effectuer un tri. Nous allons considérer à présent une situation de tri d'objets déplaçables.

4. Énumération et espaces de tri

Nous avons construit une situation de tri[8] ayant les caractéristiques suivantes : le critère de tri relève d'une catégorie déjà connue par l'élève et n'est pas constamment perceptible, ce qui rend nécessaire la manipulation des objets à trier. La collection est constituée de jetons dont certains ont une gommette sur une seule de leurs faces. Il s'agit de trier l'ensemble *E* des jetons en fonction de la présence ou non de la gommette sur une de leurs faces. Une technique consiste à :

---

[6] Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales www.cnrtl.fr/definition/trier consulté le 15 janvier 2015.

[7] Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales www.cnrtl.fr/definition/trier consulté le 15 janvier 2015.

[8] Dans le cadre de cet article, nous n'analyserons pas finement les résultats expérimentaux concernant cette situation.

1. Extraire les jetons avec gommette visible de l'ensemble des jetons non traités E_{nt}. Un premier ensemble de jetons traités se constitue alors : l'ensemble des jetons respectant positivement le critère « avoir une gommette » $E+$;
2. Choisir un jeton dans le tas des jetons non triés et le retourner. Si une gommette se trouve sur la face cachée, placer le jeton dans le tas précédent, sinon le placer dans un nouveau tas. Un deuxième ensemble de jetons traités se constitue alors : l'ensemble des jetons retournés sans gommette, respectant négativement le critère « avoir une gommette » : E_-;
3. Recommencer le point 2 jusqu'à épuisement de l'ensemble des jetons non traités E_{nt}.

L'exploration de la collection des jetons en vue de les trier a produit une partition « dynamique » de l'ensemble initial des jetons E : l'ensemble des jetons non-traités E_{nt} d'une part, l'ensemble des jetons traités E_t d'autre part, lui-même formé de la réunion de l'ensemble $E+$ des jetons qui respectent le critère de tri et de l'ensemble $E-$ des jetons qui ne le respectent pas : $E = E_{nt} \cup E_t$, $E_t = E+ \cup E-$.

La constitution de trois espaces est donc une procédure en réponse au tri : l'espace des jetons non triés où se trouve l'ensemble des jetons non triés E_{nt} ; l'espace des jetons triés où se trouvent les sous-ensembles $E+$ et $E-$ et l'espace de traitement dans lequel l'élève retourne chaque jeton pour vérifier si le critère de tri est respecté (figure 16). Cette structuration spatiale – espace de l'ensemble des objets traités, espace de l'ensemble des objets non traités, espace de traitement – consubstantielle d'un tri matériel, est générale.

La figure 16, présente la photo du travail en cours d'une élève de quatre ans, en fin d'année scolaire de petite section de maternelle. Elle montre la grande proximité des différents espaces, ce qui permet d'anticiper qu'elle risque d'échouer dans son tri : de fait, peu de temps après, les espaces se sont chevauchés et l'élève n'a plus été en mesure de contrôler la constitution des différents ensembles.

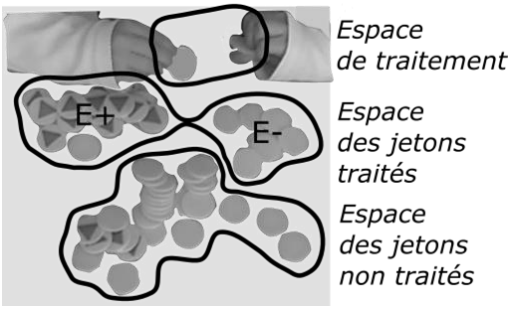


Figure 16. – Tri de jetons marqués : les espaces.

Revenons au dénombrement d'objets mobiles qui repose sur une activité de tri. Trois espaces structurent le milieu de référence de l'élève. En observant la figure 15, nous constatons que l'espace de travail est cet espace médian dans lequel le pion se déplace après avoir été extrait de l'ensemble des jetons à dénombrer/non traités (E_{nt}) pour rejoindre l'espace où se trouve l'ensemble des jetons dénombrés/traités (E_t). Cette structuration spatiale, qui donne un lieu au partitionnement de l'ensemble initial des objets à explorer $E = E_t \cup E_{nt}$ se réalise donc selon un processus dynamique.

Ce partitionnement existe aussi dans le cas du dénombrement des points sur une feuille, dans ce cas c'est le chemin qui permet de déterminer ce qui a été déjà traité de ce qui ne l'a pas été, cependant, il ne s'appuie pas exclusivement sur des considérations spatiales. L'analyse des stratégies des élèves dans la situation d'énumération des sucres cachés montre que celles-ci sont souvent basées sur des partitionnements de l'espace, et que celles-ci sont privilégiées dès que la structure de la collection ou de son support le permettent.

C'est pour clarifier ce qu'est une situation d'énumération et mieux prendre en compte la relation entre énumération et tri, que nous allons discuter maintenant les définitions de l'énumération.

SITUATIONS D'ÉNUMÉRATION, NOUVELLES DÉFINITIONS

1.Énumération et collections à configuration modifiable

Dans la description par Briand (1999, p.53) de l'activité de dénombrement par comptage, la quatrième étape consiste à « *conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.*» Lorsque les points sont dessinés sur une feuille, cette « mémoire » s'incarne dans le chemin qui fait aller d'un point à un autre sur la feuille. C'est

ainsi que Briand a considéré les chemins comme une piste pour produire une définition de l'énumération (voir *supra*).

En revanche, dans l'exemple des jetons déplaçables, c'est le geste qui prend en charge cette « mémoire » de sorte que l'activité intellectuelle de contrôle est remplacée par une activité spatiale.

Dans une perspective didactique (et non cognitiviste), nous ne nous intéressons pas aux compétences mnésiques des sujets quand ils résolvent un problème requérant l'énumération, mais aux éléments constitutifs des techniques d'énumération. Dans le cas du tri de jetons marqués, c'est la constitution d'espaces bien délimités qui prend en charge cette « mémoire de la collection des éléments déjà choisis », ou plutôt qui assure le contrôle qu'un même jeton ne sera pas traité deux fois. C'est en ce sens que nous pouvons dire que le geste décharge le sujet de la mémorisation – au sens cognitif – de ce qui a été traité et de ce qu'il reste à traiter.

Trier les jetons marqués est ainsi une situation dans laquelle la délimitation des espaces devient nécessaire en réponse à un but : obtenir *in fine* deux collections distinctes. Une fois les espaces parfaitement délimités, l'activité de tri pourrait s'interrompre et être reprise à un autre moment sans que cela n'affecte la réussite. La conservation de l'information relative aux éléments déjà traités (dénombrés, triés, etc.), qui est la clé de l'énumération dans ces deux types de situation repose, ici, sur une structuration de l'espace dans lequel se trouve l'ensemble des éléments à traiter.

Or, comme nous l'avons mentionné plus haut, Briand (1999, pp. 23-26) a révélé que l'énumération induisait une relation d'ordre total. En synthétisant ces deux aspects, nous considérons que la production d'une relation d'ordre se réalise au travers d'un partitionnement. Nous proposons une nouvelle définition de l'énumération qui permet d'englober les différentes situations que nous avons étudiées :

> « Énumérer une collection consiste à *traiter chaque élément d'une collection une fois et une seule*, ce qui revient à produire un ordre total permettant d'identifier chaque élément une fois et une seule. Il s'agit d'une définition très générale : traiter peut vouloir dire compter, mais aussi trier, ou encore comparer, etc. Pour réaliser un tel traitement, il est nécessaire de *réaliser à tout moment une partition de la collection entre les éléments déjà traités et les éléments qui ne sont pas encore traités*. » (Margolinas & Wozniak, 2012, pp. 80-81)

2. Les multi-ensembles comme modèle épistémologique

Une différence substantielle existe entre dénombrement et tri : dans le cas du dénombrement, la réussite repose sur la mise en correspondance biunivoque de la liste des mots nombres et des éléments de l'ensemble à dénombrer. Dans le cas du tri, il n'est pas essentiel que chaque jeton soit traité une et une seule fois pour réussir, même si c'est une condition d'efficacité. Il est possible qu'un jeton soit extrait, retourné et qu'il soit déposé dans l'ensemble des jetons à traiter, ce qui est observable fréquemment, en particulier quand l'espace des *E*- n'a pas encore été construit. En effet, tout objet peut être à nouveau passé en revue, et alors placé dans le bon sous-ensemble au sein de l'espace des jetons traités. Nous parlerons dans ce cas *d'exploration* de la collection : chaque élément est bien passé en revue, mais pas nécessairement une seule fois. C'est pour prendre en compte cette différence essentielle que nous avons cherché une nouvelle définition de l'énumération, qui permette de la considérer comme un cas particulier de l'exploration d'un ensemble.

Pour décrire l'efficacité de l'exploration d'un ensemble par le passage en revue de ses éléments, nous proposons d'utiliser les multi-ensembles qui ont été introduits dans les années 1960 pour l'étude mathématique de problèmes de tri en informatique (Blizard, 1989; Singh, Ibrahim, Yohanna, & Singh, 2008). Un multi-ensemble permet en effet de décrire les situations où un même élément d'un ensemble est traité plusieurs fois, grâce à la notion de multiplicité.

Considérant un ensemble E fini, un multi-ensemble M est un ensemble fini d'éléments de E qui peuvent apparaître plusieurs fois. Il est muni d'une application de M dans $\mathbb{N}$, appelée multiplicité, qui à tout élément $x \in M$, associe le nombre de fois $m(x)$ où x apparaît dans le multi-ensemble M. Par exemple, supposons que l'exploration d'un ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ ait conduit à pointer les éléments de E dans l'ordre suivant : *a, b, b, a, c, a*. Le multi-ensemble qui rend compte de cette exploration est $M = \{\{a, a, a, b, b, c\}\}$; il est associé à la multiplicité m définie par : $m(a) = 3$, $m(b) = 2$, $m(c) = 1$, $m(d) = 0$.

Cette notion de multi-ensemble permet de prendre en compte la répétition du traitement d'un élément. Reprenons la situation du tri de l'ensemble E des jetons dont certains sont marqués. Le tri des jetons avec gommette est réussi à deux conditions : d'une part E_{nt} est vide et d'autre part tous les jetons avec gommette sont dans $E+$ (et donc tous les jetons sans gommette dans E-). Si nous nous intéressons maintenant à l'efficacité de la procédure de traitement qui conduit à la réussite ou à l'échec, considérons l'application « multiplicité de traitement » $m : E \rightarrow \mathbb{N}$ qui associe à un jeton, le nombre de fois qu'il est traité. Ainsi, quand un jeton j est traité

deux fois, $m(j) = 2$. Ceci revient à considérer que l'élève traite un ensemble M dans lequel j est répété deux fois et non pas l'ensemble E constitué des jetons donnés au départ.

Nous définissons l'énumération comme *la connaissance qui permet l'exploration d'un ensemble E avec une multiplicité de traitement égale à 1 pour tout élément.*

Cette définition est compatible avec celles données par Brousseau et Briand, et n'a pas pour fonction de les remplacer, notre but étant en effet d'envisager d'autres stratégies d'exploration d'un ensemble, dont l'efficacité dépend de la situation.

Dans le cas du dénombrement d'une collection d'objets (déplaçables ou non), l'énumération est la seule stratégie d'exploration valide, puisque seule la multiplicité de traitement égale à 1 est compatible avec l'appariement entre les éléments de la collection et une section commençante des nombres naturels, dans les termes de Brousseau.

Un tri peut être valide même si la multiplicité de traitement de certains éléments est supérieure ou égale à 1. Il n'est d'ailleurs pas certain que le tri « systématique » que constitue l'énumération de la collection soit toujours, dans les conditions effectives du traitement d'une collection d'objets, ni la plus rapide, ni la plus fiable. De nouvelles recherches sur ce point nous semblent nécessaires.

3. De la situation fondamentale de l'énumération aux situations d'énumération

Comme nous venons de le voir, le recours aux multi-ensembles fournit un critère pour établir si l'exploration d'une collection est une énumération. Il permet aussi de clarifier la distinction entre exploration et énumération d'une collection. Dans une situation de tri, la collection des objets à trier est nécessairement explorée mais pas nécessairement énumérée. Les objets de la collection doivent impérativement être passés en revue de manière exhaustive mais le critère d'unicité de traitement n'est pas une condition de réussite : une activité de tri ne conduit pas nécessairement à une énumération où tous les éléments triés ont une multiplicité de 1. En revanche, dans la situation des sucres et celle des boîtes d'allumettes fixées, l'énumération a un caractère de nécessité et constitue une condition de réussite de la tâche à accomplir.

Cependant, dans la situation des boîtes d'allumettes mobiles (secouage) et plus généralement dans les situations de tri, une multiplicité supérieure à 1 n'interdit pas la réussite.

Nous proposons donc la définition suivante : *une situation est dite « situation d'énumération » si l'énumération est une condition suffisante de réussite de la tâche à accomplir, même si elle n'est pas une condition nécessaire.*

Nous pouvons donc distinguer clairement une situation fondamentale de l'énumération dans laquelle l'énumération est une condition nécessaire et suffisante de réussite et une situation d'énumération dans laquelle l'énumération n'est qu'une condition suffisante. La situation des boîtes d'allumettes et la situation des sucres cachés sont des situations fondamentales de l'énumération tandis que le tri des jetons marqués est (seulement) une situation d'énumération.

PISTES POUR UN NÉCESSAIRE TRAVAIL DE TRANSPOSITION DIDACTIQUE

Notre étude ne porte pas sur les techniques d'énumération en fonction de l'organisation spatiale des éléments de la collection à énumérer mais révèle la façon dont l'espace est utilisé et organisé pour énumérer des objets indiscernables. En effet, ce qui caractérise les situations que nous avons étudiées c'est que les objets des collections à énumérer étaient identiques. Si dans la situation de tri il y avait bien des jetons avec gommette et d'autres sans, il n'était pas possible de distinguer deux jetons d'une même catégorie. Les éléments étant indiscernables, il n'y avait guère qu'une action sur ceux-ci qui permettait de réaliser le partitionnement entre éléments traités et non traités. La structuration de l'ensemble des objets à énumérer était donc réglée par une technique liée à l'espace.

1. Stratégies non spatiales utilisées pour énumérer

Cependant, dans le cas où les objets de la collection à énumérer ne sont pas indiscernables, ce sont les éléments caractéristiques de ces objets qui peuvent contribuer à structurer la collection et ce faisant à construire une technique d'énumération. Briand (1993) propose par exemple, lorsque les éléments à énumérer ont une grandeur commune, d'organiser l'exploration de la collection en recourant à la relation d'ordre que permet la comparaison

selon cette grandeur. Cette technique d'énumération qui repose sur une caractérisation des éléments à énumérer se retrouve dans d'autres types de tâche comme la production de tous les éléments d'un ensemble.

Prenons le cas de la recherche des diviseurs d'un nombre entier. Il s'agit d'un type de tâches bien identifié en arithmétique pour lequel deux techniques sont institutionnalisées. L'une repose sur la définition de ce qu'est le diviseur d'un nombre entier, l'autre repose sur une représentation des nombres entiers comme éléments de l'anneau euclidien ($\mathbb{Z}$, +, ×). Dans un cas on cherche les produits de deux entiers $a \times b$ égaux à 60 dont le premier terme est 1, puis 2, puis 3, etc. Dans le second cas, on utilise la décomposition en produits de facteurs premiers de 60 qui permet de dire que ses diviseurs sont de la forme $2^n \times 3^p \times 5^k$ avec $n = 0,1$ ou 2 ; $p = 0$ ou 1 et $k = 0$ ou 1. Dans les deux cas, la relation d'ordre sur les entiers permet de structurer les calculs et d'assurer une exploration exhaustive.

Cet exemple illustre combien la technique d'énumération utilisée repose sur un modèle de l'ensemble dont il faut énumérer les éléments. Le choix d'une caractérisation des éléments de l'ensemble des diviseurs de 60 détermine le choix de la technique utilisée. L'énumération repose donc sur une structuration, sur la construction d'un modèle, de l'ensemble à explorer.

Partitionnement spatial, recours à une grandeur et à la relation d'ordre associée, recours aux propriétés caractéristiques des éléments de l'ensemble structurées par un arbre de tri sont autant de techniques d'énumération. Ces techniques permettent de résoudre une diversité de problèmes que l'on retrouve dans le champ des mathématiques : explorer un ensemble pour dénombrer, apparier les éléments de deux ensembles, trier, repérer un élément, retrouver un élément manquant, déterminer tous les éléments d'un ensemble. Voici sans doute, en mathématiques, les ingrédients d'un travail transpositif à venir pour intégrer dans l'institution scolaire ce nouveau sujet d'enseignement, l'énumération.

Si l'énumération a d'abord été rencontrée comme une connaissance nécessaire pour réussir dans les tâches de dénombrement, Briand (1993) a mis en évidence la place de l'énumération comme connaissance en jeu aux prises avec le contingent dans de nombreuses situations considérées institutionnellement comme relevant des mathématiques ou non.

2. Un exemple de situation d'énumération non mathématique

Nous allons considérer ici une tâche proposée aux élèves pour l'étude du français qui présente, à l'insu des professeurs, des difficultés d'exploration de plusieurs collections. Nous ne pouvons pas ici faire l'analyse exhaustive de cette activité en terme d'énumération, ce qui serait un développement trop long, notre ambition est seulement de montrer aux chercheurs en didactique des mathématiques que le concept d'énumération permet de comprendre certaines difficultés posées par des tâches courantes qui ne sont pas institutionnellement proposées en mathématiques, mais dans une autre discipline scolaire.

« TRAMPOLINE» : une tâche en maternelle

Beaucoup de situations au début de l'apprentissage de la lecture en fin d'école maternelle ou en première année d'école élémentaire, demandent de découper des étiquettes-lettres pour reconstituer des mots donnés en modèle, comme dans la figure 17.

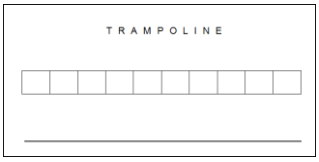


Figure 17 – Une fiche de français en GS d'école maternelle : trampoline (échelle réduite).

Nous sommes au mois d'avril, les élèves ont à disposition un alphabet en écriture scripte, un récipient, des ciseaux et un crayon. Ils peuvent également se servir d'une règle de correspondance des graphies (figure 18), qui est d'usage quotidien dans la classe observée. Le mot « trampoline » écrit sur la fiche est issu d'un album étudié dans la classe. Les élèves ont donc déjà rencontré ce mot bien qu'ils ne sachent pas encore lire.

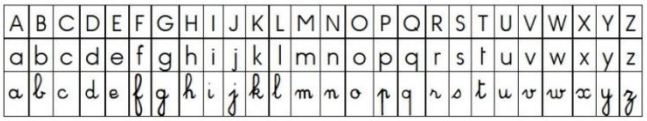


Figure 18. – Règle de correspondance des graphies.

La consigne donnée par la maîtresse est la suivante : « Vous devez d'abord découper les lettres scriptes qui sont sur cette bande et les déposer dans la boîte. Vous allez coller les lettres dans les cases de la fiche pour écrire le mot qui correspond au modèle. Ensuite vous devez écrire ce mot au crayon en écriture cursive sur la ligne.»

Les élèves doivent à la fois parcourir la collection des lettres du mot « TRAMPOLINE » et celle des lettres-étiquettes découpées en les coordonnant de manière à produire le mot demandé en écriture scripte. Ils doivent ensuite parcourir à nouveau la collection des lettres du mot « TRAMPOLINE » pour l'écrire en écriture cursive, en s'aidant éventuellement de la règle de correspondance des graphies (ce qui constitue une autre tâche dont nous ne parlerons pas dans ce texte).

Nous pouvons décrire deux situations d'énumération. L'une avec une collection d'objets déplaçables et dans une configuration modifiable – l'ensemble des étiquettes-lettres une fois découpées –, l'autre avec une collection d'objets fixes dans une configuration non modifiable – les lettres dans le mot « TRAMPOLINE ». Ceci conduit à utiliser dans la même situation d'enseignement deux techniques d'exploration en les articulant.

Une complexité de la tâche « TRAMPOLINE » qui échappe au professeur

Suivons pas à pas ce que doivent faire les élèves pour respecter la consigne de leur professeur et les situations qui sont ainsi générées. Ils doivent d'abord découper la bande des lettres pour obtenir des lettres-étiquettes (figure 19).

Figure 19 – Les lettres-étiquettes dans la boîte.

Pour réussir à coller les étiquettes au bon endroit, les élèves doivent explorer les lettres du mot « TRAMPOLINE » dans une configuration en ligne et explorer des lettres-étiquettes qui forment une collection d'objets mobiles dans une configuration modifiable.

Il y a donc, *a priori*, deux possibilités : partir de la collection de lettres du mot TRAMPOLINE, chercher les étiquettes-lettres correspondantes et les placer dans les cases ou bien partir de la collection des étiquettes-lettres et se servir de la position des lettres dans le mot TRAMPOLINE pour remplir les cases.

Si l'élève part du mot TRAMPOLINE, il doit *:* garder en mémoire la lettre en cours de traitement dans le mot-modèle ; organiser l'exploration des lettres-étiquettes, c'est-à-dire faire le tri entre les étiquettes de manière à trouver l'étiquette correspondant à la lettre chercher. Que constatons-nous ?

La plupart des élèves cherchent à résoudre la tâche suivant cette procédure. Cependant, ils sont confrontés à une difficulté majeure en ce qui concerne le tri : ils saisissent une étiquette, l'examinent, éventuellement en la comparant avec la lettre recherchée sur le mot-modèle, parfois en utilisant le tableau de correspondance et, si l'étiquette ne convient pas, la remettent dans la boîte. Ils mélangent ainsi les étiquettes non encore traitées et l'étiquette traitée, ce qui allonge énormément le temps de recherche de la bonne étiquette, car ils finissent par retomber – sans s'en rendre compte – sur la même étiquette-lettre. Les étiquettes sur lesquelles ils opèrent sont alors en nombre supérieur à 26, puisqu'ils reprennent sans cesse les mêmes. L'ensemble qu'il traite est le multi-ensemble, dans lequel les éléments sont répétés suivant leur multiplicité.

De fait, beaucoup d'élèves se trompent et avancent très lentement dans la partie de l'activité qui concerne les lettres-étiquettes en écriture scripte. Bien entendu, il pourrait y avoir bien d'autres causes à la lenteur des élèves avec les lettres-étiquettes, cependant un évènement intervient dans la classe qui conforte notre identification d'une difficulté d'exploration de la collection.

Angélique est une élève qui n'écoute jamais bien les consignes et commence les activités toujours en retard. Elle a oublié qu'il fallait d'abord découper toute la bande en lettres-étiquettes et commence le travail au moment où les autres élèves ont déjà fini le découpage des lettres-étiquettes. Elle se sert donc directement de la bande pour reconstituer le mot-modèle en écriture scripte (figure 20).

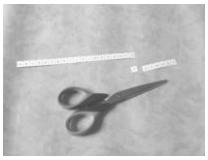


Figure 20 – Le travail d'Angélique.

La difficulté d'exploration est ainsi diminuée : au début, Angélique n'a qu'à parcourir la bande en ligne pour déterminer la bonne lettre à découper. Au fur et à mesure du découpage, la difficulté augmente, mais reste tout de même bien inférieure, du point de vue de l'exploration d'une collection d'objets mobiles, au traitement des vingt-six lettres-étiquettes dans la boîte. À la fin, Angélique obtient seulement quatre morceaux de bande – b à d ; f à h ; j à k ; u à z – et deux étiquettes avec une lettre seule – q et s –, sans compter les étiquettes collées au fur et à mesure. C'est ainsi qu'Angélique, en oubliant de découper les vingt-six lettres-étiquettes peut plus facilement explorer la collection d'étiquettes qui se constituent progressivement sans jamais atteindre plus de six étiquettes distinctes. À la grande surprise de l'enseignante, Angélique, pour une fois, finit avant tout le monde et rend une fiche impeccable…

Pour réaliser la tâche demandée, il n'est pas nécessaire d'explorer une fois et une seule chacune des lettres-étiquettes dans la boîte pour retrouver celle correspondant à la lettre-modèle. L'énumération n'est donc pas une condition de réussite. Cependant, la mise en œuvre d'une technique d'exploration systématique qui, pour la collection mobile des étiquettes, correspond à un tri entre traité et non traité, permet de diminuer la complexité de la tâche.

L'introduction de la boîte dans le milieu de l'élève a une dimension organisatrice de la tâche. Mais en même temps qu'elle évite à l'élève de perdre des lettres-étiquettes, la boîte constitue un espace contraint dans lequel l'élève peut difficilement explorer la collection des vingt-six lettres-étiquettes tout en distinguant celles déjà traitées et celles qui ne l'ont pas encore été. Plusieurs variables interviennent : la taille de la boîte, qui permet ou non de séparer deux espaces, la possibilité (contrat didactique, contraintes de place) de renverser les lettres-étiquettes sur la table. Dans la séance observée, la boîte était petite, par contre, certains élèves ont pris l'initiative de renverser la boîte des lettres-étiquettes sur la table, ce qui change assez radicalement leur situation en termes d'exploration de la collection. En effet, si les étiquettes sont toutes tournées face visible, ils peuvent à la fois organiser la collection dans des espaces séparés et l'explorer visuellement à la recherche d'une lettre désignée, en combinant donc plusieurs stratégies d'exploration.

Dans nos observations de cette situation ou d'autre similaires, très nombreuses dans les classes de maternelle, nous constatons que les professeurs ne repèrent pas ces difficultés et attribuent la lenteur de la réalisation de la tâche à un « manque d'organisation » qui semblerait relever de la personnalité des élèves et non de connaissances spécifiques. Les stratégies pertinentes adoptées par les élèves : organisation du tri des lettres-étiquettes en tas traité – non traité, renversement de la boîte et exploration partielle des lettres-étiquettes, ne sont pas relevées ni commentées.

Même si du point de vue de l'institution scolaire il s'agit de « français », nous avons montré que des connaissances d'énumération et d'exploration sont en jeu dans ces tâches et qu'elles sont responsables de certaines difficultés d'élèves, ce qui échappe aux professeurs qui ne disposent pas des outils qui leur permettraient de prendre en compte ces connaissances.

CONCLUSION

En reprenant l'étude de l'énumération, nous avons été amenés à clarifier ce qu'est une situation d'énumération. En effet, suivant une méthode classique en théorie des situations didactiques, l'énumération a été étudiée au travers de la conception et l'expérimentation d'une situation fondamentale. En considérant, plus largement, des situations d'exploration d'une collection d'objets, nous proposons de définir l'énumération comme une exploration « efficace », déterminée par une multiplicité de 1 dans le modèle des multi-ensembles. Si explorer un ensemble consiste à passer en revue de façon exhaustive ses éléments, énumérer consiste à explorer cet ensemble mais en traitant une et une seule fois chacun des éléments. Ainsi, toute situation d'exploration dans laquelle le recours à l'énumération est une condition suffisante de réussite de la tâche à accomplir est considérée comme une situation d'énumération. Cela rend possible la reconnaissance de l'énumération comme connaissance utile dans de nombreuses situations d'enseignement, y compris or de ce qui est défini institutionnellement comme

étant des « mathématiques ». Cette étude de l'énumération a par ailleurs permis de mieux identifier le rôle des organisations spatiales dans les situations d'énumération. C'est à partir de ce point de vue que nous allons répondre aux deux questions énoncées en introduction.

1. Quelles sont les techniques qui permettent d'énumérer ?

Toute technique d'énumération doit organiser le partitionnement des éléments qui ont été traités de ceux qu'il reste à traiter. Dans les situations que nous avons évoquées, dans différents contextes, nous avons vu comment l'action sur les objets de la collection à énumérer peut contribuer à assumer cette fonction. Nous avons mis en évidence le double rôle de l'espace et de l'organisation spatiale : comme variable didactique et comme technique. Nous révélons également la portée des analyses centrées sur l'énumération et l'exploration, au-delà des situations initialement étudiées.

Les techniques qui permettent d'énumérer demandent de distinguer deux grands types de situations suivant que la configuration spatiale de la collection à énumérer est modifiable ou non. En effet, ce n'est pas la mobilité des objets qui est essentielle mais la possibilité de modifier leur configuration : dans la situation des sucres cachés, chapeaux et sucres sont des objets déplaçables et pourtant leur configuration spatiale est non modifiable. De la même façon, dans la situation des boîtes d'allumettes, les allumettes peuvent se déplacer alors que les configurations des boîtes peuvent être modifiables ou non.

Dans le cas des configurations modifiables, une technique consiste à réaliser une partition de l'ensemble initial en séparant spatialement l'ensemble des objets traités de l'ensemble des objets non traités. Dans le cas de tri ou de classement, l'ensemble des objets traités peut être à nouveau partitionné, comme nous l'avons vu avec l'ensemble des jetons avec et sans gommette. Nous avons par ailleurs mis en évidence la nécessité de créer de façon explicite différents espaces pour séparer les ensembles non traités et traités au travers du filtre d'un espace de traitement.

Dans le cas des configurations non modifiables sans marquage possible, deux techniques peuvent se dégager et être éventuellement utilisées simultanément. La technique des partitions par « paquets » consiste à procéder à une partition en quelques sous-ensembles puis à énumérer chacun d'entre eux. Une deuxième technique de linéarisation considère les éléments un à un suivant un chemin plus ou moins facilement identifiable. Il n'y a pas de technique simple qui permet de générer un tel chemin quelle que soit la configuration, cependant, les lignes et les colonnes, quand elles sont disponibles du fait des connaissances littératiennes, sont utiles dans ces situations. Les chemins sont une réponse très souvent adaptée aux situations dans lesquelles le marquage n'est pas possible, mais aussi en complément de celui-ci, comme l'a montré Briand (1993). La reconnaissance d'une organisation spatiale « prototypique » facilite alors le contrôle car la mémoire de ce qui a été parcouru est en quelque sorte déposée, déléguée à cette organisation spatiale. Ainsi, le principe, mathématiquement correct, de non pertinence de l'ordre est à (re)considérer : suivant l'ordre dans lequel on choisit de désigner les éléments d'une collection donnée, l'énumération peut être facilitée ou non.

2. Quel discours technologique peut permettre de légitimer, étayer, consolider et développer ces techniques ?

Penser les tâches que nous avons rencontrées dans cet article comme relevant d'un même savoir, l'énumération, permet de faire le lien entre des contextes très différents et donc de faire jouer des connaissances utiles qui peuvent être reconnues comme des instanciations d'un même savoir. Le premier niveau du discours technologique concerne l'explicitation des techniques mises en œuvre. Ainsi, dans le cas d'une configuration modifiable, le professeur pourrait, *a minima*, interroger l'élève d'une façon qui permette d'unifier les différences instanciations des connaissances d'énumération en jeu et des techniques pertinentes : « où as-tu mis les éléments que tu as déjà traités ? », quitte à contextualiser parfois « où as-tu mis les étiquettes que tu as déjà regardées ? », « as-tu bien séparé ce qui est à traiter et ce qui est traité ? ». Dans le cas d'une configuration non modifiable, il pourrait favoriser ou empêcher le marquage, et institutionnaliser les différentes techniques évoquées ci-dessus. Mais il ne suffit pas de mettre à jour des connaissances utiles dans certaines situations pour que les savoirs correspondants soient enseignables.

Des situations qui permettent d'enseigner l'énumération existent. Elles ont été décrites et publiées à la fois dans des revues scientifiques (Briand, 1999), des revues d'interface (Briand, Glykos, Loubet, Olasguaga, & Malpelat, 1996-1997; Briand, Lacave-Luciani, Harvouët, Bedere, & Goua De Baix, 2000), des ouvrages diffusés par un éditeur scolaire (Briand, Loubet, & Salin, 2004). Une reconnaissance de l'énumération comme objet d'enseignement commence à apparaître en France. Dans les documents d'accompagnement des programmes

(Durepaire & Megard, 2010; Durepaire & Megard, 2011), l'énumération a fait son apparition au sein du chapitre « premières compétences pour accéder au dénombrement » dans une section relative à des « exemples de situations pour apprendre à compter » (Emprin & Emprin, 2010).

Cette timide reconnaissance institutionnelle des besoins de connaissances appelle un travail de transposition didactique. C'est ce que nous avons contribué à faire dans ce texte en proposant le modèle mathématique des multi-ensembles comme modèle épistémologique de référence afin d'éclairer d'un jour nouveau les techniques de structuration spatiale qui prennent en charge les configurations modifiables d'objets à énumérer lorsqu'ils sont déplaçables. Nous pensons y contribuer aussi en rapprochant des tâches apparemment éloignées : dénombrement, tri, exploration des lettres-étiquettes et des lettres d'un mot qui relèvent de disciplines scolaires différentes. Cependant, pour que l'énumération devienne un savoir à enseigner, un travail de plus grande ampleur est nécessaire dont nous espérons avoir donné un aperçu.

RÉFÉRENCES

BERTHELOT R., SALIN M.-H. (1992a) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux I.

BLIZARD D. W. (1989) Multiset theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol 30 (1). pp 36-66.

BOURDIEU P. (2000a) *Esquisse d'une théorie de la pratique*, Paris: Seuil.

BRÉGEON J.-L., MÉTÉNIER G. (1992b) *Math en herbe, livre du maître*, Paris: Nathan.

BRIAND J. (1993) *L'énumération dans le mesurage des collections*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux I.

BRIAND J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 19 (1). pp 41-76.

BRIAND J. (1999-2000) Trier en petite section. *Grand N*. Vol 65. pp 7-14.

BRIAND J., et al. (2000b) Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N*. Vol Numéro spécial maternelle, approche du nombre, T1. pp 123-138.

BRIAND, J., GLYKOS, M., LOUBET, M., OLASGUAGA, M., & MALPELAT, M.-H. (1996-1997). Une activité de marquage-désignation. *Grand N*, 60, 7-16.

BRIAND J., LOUBET M., SALIN M.-H. (2004) *Apprentissages mathématiques en maternelle*, Paris Hatier.

BROUSSEAU G. (1984) L'enseignement de l'énumération *International Congress on Mathematical Education*. Adelaïde: Australia.

BUTTERWORTH B., et al. (2008a) Numerical thought with and without words: Evidence from indigenous Australian children. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. Vol 105 (35). pp 13179-13184.

CORNELL E. H., HETH C. D. (1983a) Spatial cognition: gathering strategies used by preschool children. *Journal of Experimental Child Psychology*. Vol 35 (1). pp 93-110.

COWAN R., et al. (1996) Even more precisely assessing children's understanding of the order-irrelevance principle. *Journal of Experimental Child Psychology*. Vol 62. pp 84-101.

DUREPAIRE J.-L., MEGARD M. (Eds) (2010) *Le nombre au cycle 2*, Paris: SCÉRÉN CRDP-CNDP.

DUREPAIRE J.-L., MEGARD M. (Eds) (2011) *Le nombre au cycle 3*, Paris: SCÉRÉN CRDP-CNDP.

EMPRIN, F., & EMPRIN, F. (2010). Premières compétences pour accéder au dénombrement. In J.-L. DURPAIRE & M. MÉGARD (Eds.), *Le nombre au cycle 2* (pp. 23-34). Poitiers: Scérén.

GELMAN R. (1983b) Les bébés et le calcul. *La recherche*. Vol 149. pp 1382-1389.

GELMAN R., GALLISTEL C. (1978a) *The Child's Understanding of Number*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

GOODY J. (1979) *La raison graphique*, Paris: Les éditions de minuit.

KUHN T. S. (1970) *La structure des révolutions scientifiques*, Paris: Flammarion.

LAHIRE B. (1998) *L'homme pluriel. Les ressorts de l'action.*, Paris: Nathan.

LE CORRE M., et al. (2006a) Re-visiting the competence/performance debate in the acquisition of the counting principles. *Cognitive Psychology*. Vol 52 (2). pp 130-169.

MARGOLINAS, C., & WOZNIAK, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique*. Bruxelles: De Boeck.

POTTER M. C., LEVY E. I. (1968) Spatial enumeration without counting. *Child development*. Vol 39. pp 257-264.

PRIVAT J.-M. (2006b) Un habitus littératien? *Pratiques*. Vol 131/132 (La littératie. Autour de Jack Goody). pp 125-130.

SHANNON L. (1978b) Spatial strategies in the counting of young children. *Child development*. Vol 49. pp 1212-1215.
SINGH D., et al. (2008b) A systematization of fundamentals of multisets. *Lecturas Matemàticas*. Vol 29. pp 33-48.