

Estimation non-paramétrique de la densité spectrale d'un processus gaussien échantillonné aléatoirement

Jean-Marc Bardet, Pierre, Raphael Bertrand, Véronique Billat

▶ **To cite this version:**

Jean-Marc Bardet, Pierre, Raphael Bertrand, Véronique Billat. Estimation non-paramétrique de la densité spectrale d'un processus gaussien échantillonné aléatoirement. Annales de l'ISUP, 2008, LII (1-2), pp.123-138. hal-00250150

HAL Id: hal-00250150
https://hal.science/hal-00250150

Submitted on 11 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation non-paramétrique de la densité spectrale d'un processus gaussien échantillonné aléatoirement

Jean-Marc BARDET*, Pierre, R. BERTRAND** and Véronique BILLAT†

* *SAMOS-MATISSE - UMR CNRS 8595, Université Panthéon-Sorbonne (Paris I), 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris Cedex, France, E-mail: bardet@univ-paris1.fr*

** *Laboratoire de Mathématiques - UMR CNRS 6620, Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand II), 24 Avenue des Landais, 63117 Aubière Cedex, France. E-mail: Pierre.Bertrand@math.univ-bpclermont.fr*

† *UBIAE Laboratoire INSERM 902 et Université d'Évry.*

hal-00250150, version 1 - 11 Feb 2008

Résumé:
En utilisant une analyse en ondelette, on construit un estimateur non-paramétrique de la densité spectrale d'un processus gaussien à accroissements stationnaires. Dans un premier temps, on considère le cas "idéal" de l'observation d'une trajectoire en temps continu et on donne un théorème de la limite central ponctuel et une estimation de l'erreur quadratique moyenne intégrée. Puis, afin de mieux correspondre aux applications, on construit un second estimateur à partir de l'observation d'une trajectoire du processus à des instants discrets, aléatoires et irrégulièrement espacés. Cet estimateur est obtenu en remplaçant les coefficients d'ondelette par leurs discrétisations. Nous donnons un second théorème de la limite central, avec une vitesse différente. Des simulations et une application à la modélisation du rythme cardiaque des marathoniens sont présentées.

Abstract (english):
From a wavelet analysis, one derives a nonparametrical estimator for the spectral density of a Gaussian process with stationary increments. First, the idealistic case of a continuous time path of the process is considered. A punctual Central Limit Theorem (CLT) and an estimation of the Mean Integrate Square Error (MISE) are established. Next, to fit the applications, one considers the case where one observes a path at random times. One built a second estimator obtained by replacing the wavelet coefficients by their discretizations. A second CLT and the corresponding estimation of the MISE are provided. Finally, simulation results and an application on the heartbeat time series of marathon runners are presented.

1 Introduction

Soit $\mathbf{X} = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus à temps continu gaussien centré à accroissements stationnaires Il admet une représentation (voir Yaglom, 1958)

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{it\xi} - 1\right) \cdot f^{1/2}(\xi)\, dW(\xi), \quad \text{pour tout } \ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $W(dx)$ est une mesure de Wiener complexe adaptée afin que $X(t)$ soit réel et f est une fonction paire, positive appelée densité spectrale. On observe une trajectoire $(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n})$ du processus X à des instants t_i, $i = 0, \ldots, n$ irrégulièrement espacés ou aléatoires. Le but de cet article est de proposer un estimateur de la densité spectrale $f(\xi)$ pour une fréquence $0 < \xi < \infty$ et d'étudier sa convergence.

A titre d'exemple paradigmatique, si $f(\xi) = \sigma^2 |\xi|^{-(2H+1)}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, alors le processus X est un mouvement brownien fractionnaire (mbf) d'indice de Hurst H et de paramètre d'échelle σ; la fonction de densité spectrale est entièrement déterminée par les deux seuls paramètres (H, σ). On se trouve dans un cadre d'estimation paramétrique de la densité spectrale f. De plus, la fonction $\ln f(\xi)$ est une fonction affine de $\ln(|\xi|)$, ce qui correspond à l'autosimilarité du processus.

L'autosimilarité est très souvent supposée sans vraiment être statistiquement vérifiée ou théoriquement justifiée. Dans cet article, nous nous intéressons à l'estimation de la fonction $f(\xi)$ dans un cadre non-paramétrique. Cette approche peut permettre ensuite de vérifier graphiquement l'autosimilarité, ou, par exemple, de déterminer une ou plusieurs bandes de fréquences de fréquences $]\omega_i, \omega_{i+1}[$ telle que $f(\xi) = \sigma_i^2 \cdot |\xi|^{-(2H_i+1)}$ pour $\omega_i < \xi < \omega_{i+1}$.

Le plan de cet article est le suivant. Dans la section 2, nous précisons le modèle statistique et les hypothèses utilisées. Dans la section 3, on montre un théorème de la limite central (TLC) pour l'estimation de la fonction de densité spectrale à l'aide d'une analyse en ondelette théorique, c'est-à-dire avec des coefficients d'ondelette calculés par une intégrale sur $\mathbb{R}$. Dans la section suivante, nous montrons que la discrétisation des coefficients d'ondelette découlant de l'observation à des instants discrets aléatoires conduit à établir un second TLC. Dans la dernière section, nous donnons des exemples numériques.

2 Hypothèses et notations

Soit X un processus gaussien centré à accroissements stationnaires défini par l'équation (1). On suppose que sa densité spectrale f vérifie les conditions (F1) et (F2) ci-dessous:

(F1) *La fonction f est borélienne, paire positive et vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge |\xi|^2\right) \cdot f(\xi)\, d\xi < \infty. \tag{2}$$

(F2) *Sur $\mathbb{R}^+$ la fonction f est càdlàg et $\mathcal{C}^1$ en dehors d'un nombre fini de points $0 < \omega_1 < \cdots < \omega_K$ avec $K \in \mathbb{N}$, sa derivée f' vérifie la condition*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge |\xi|^3\right) \cdot \left|f'(\xi)\right| \, d\xi < \infty. \tag{3}$$

De plus, on a un contrôle du comportement à haute fréquence: il existe deux constantes $C_0, C_0' > 0$, une fréquence $\omega_K > 0$ et un réel $H > 0$, tel que pour $|\xi| \geq \omega_K$

$$f(\xi) \leq C_0 |\xi|^{-(2H+1)} \qquad \text{et} \qquad f'(x) \leq C_0' |\xi|^{-(2H+2)}. \tag{4}$$

On dispose de l'observation du processus à des instants discrets sur un intervalle $[0, T_n]$, *i.e.* $\big(X(t_0), X(t_1), \ldots, X(t_n)\big)$ est connue avec $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = T_n$. Les instants d'observations t_i sont aléatoires et irrégulièrement espacés. On aura besoin que l'hypothèse (S(s)) ci-dessous soit vérifiée pour un réel $s \in [1, \infty]$.

(S(s)) *Il existe une suite de nombres réels strictement positifs* $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\delta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *et une suite de variables aléatoires positives identiquement distribuées et indépendantes* $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$t_{k+1} - t_k := \delta_n L_k \quad \text{et } \mathbb{E} L_k = 1 \text{ pour } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

De plus, les v.a. $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sont indépendantes de la tribu* $\mathcal{F}_X$ *engendrée par le processus avec* $\mathcal{F}_X := \sigma\big\{X(t),\, t \in \mathbb{R}\big\}$ *et il existe deux constantes* $0 < m_s < M_s < \infty$ *telles que*

$$m_s \le \|L_k\|_s \le M_s \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

où pour une v.a. Z *et un réel* $\alpha \in (0, \infty]$, *on note* $\|Z\|_\alpha := \big(\mathbb{E}(|Z|^\alpha)\big)^{1/\alpha}$ *quand* $\mathbb{E}(|Z|^\alpha) < \infty$ *et* $\|Z\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |Z(\omega)|$ *par convention.*

Un estimateur de la densité spectrale $f(\xi)$ pour une fréquence $0 < \xi < \infty$ est construit à partir de l'analyse en ondelette du processus X. Soit ψ une *"ondelette mère"*, et pour n'importe quels échelle et décalage $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on définit respectivement les coefficients d'ondelette "théoriques" (pour une trajectoire à temps continu) et "empiriques" (pour une trajectoire à temps discrets) par

$$d_\psi(a, b) := a^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) X(t)\, dt \tag{5}$$

et

$$e_\psi(a, b) := a^{-1/2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi\Big(\frac{t-b}{a}\Big)\, dt \right) X\big(t_i\big). \tag{6}$$

Suivant les différents cas examinés par la suite, l'ondelette ψ vérifiera des hypothèses issues de la famille suivante :

W(m, q, r) $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *est une fonction vérifiant les trois conditions:*

- *pour tout entier* $n \le m$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |t^n \psi(t)|\, dt < \infty$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^n \psi(t)\, dt = 0$ *et* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \big|t^{m+1}\, \psi(t)\big|\, dt < \infty$;
- *il existe une constante* $C_\psi > 0$ *telle que pour tout* $t \in \mathbb{R}$

$$\big(1 + |t|\big)^q \cdot \big|\psi(t)\big| \le C_\psi.$$

- *il existe une constante* $C'_\psi > 0$ *telle que pour tout* $\xi \in \mathbb{R}$

$$\big(1 + |\xi|\big)^r \cdot \big(\big|\widehat{\psi}(\xi)\big| + \big|\widehat{\psi}'(\xi)\big|\big) \le C'_\psi.$$

Cette famille d'hypothèses est également utilisée dans Bardet et Bertrand (2008). Dans cette présentation, nous ferons deux hypothèses supplémentaires qui permettent de simplifier les énoncés et les démonstrations :

(T)
- *La durée d'observation* T_n *est déterministe.*
- *La transformée de Fourier de l'ondelette mère,* $\widehat{\psi}$ *a un support compact.*

Remarque 2.1 *Les différentes hypothèses imposées sont faibles.*

- *L'hypothèse (F1) est équivalente à l'existence de l'intégrale stochastique (1), l'hypothèse (F2) autorise à la fois des mbf, des processus à bande finie (voir Rachdi, 2004), les processus localement fractionnaires utilisés par Kammoun et al. (2007) pour modéliser les battements cardiaques ou des processus fractionnaires multi-échelles définis dans Bertrand et Bardet (2001).*

- *L'hypothèse $S(s)$ est satisfaite pour tout $s < \infty$ dans le cas où les intervalles d'inter-arrivée suivent une loi exponentielle (on parlera alors d'échantillonnage poissonnien) et pour $s = \infty$ dans le cas déterministe ou le cas intervalles où la loi des intervalles d'inter-arrivée a un support inclus dans $[a\delta_n, b\delta_n]$ avec $0 < a < b$; la condition $\delta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ est naturelle. Seule l'hypothèse d'indépendance des instants d'observations par rapport au processus est restrictive pour les applications en finance, mais elle est toujours faite, nous renvoyons sur ce point à Aït-Sahalia et Mykland (2008). A notre connaissance, l'hypothèse S(s) avec $s < \infty$ est nouvelle et tous les travaux sur les mbf ou les diffusions observés à des instants irréguliers ou aléatoires supposent vérifiée $S(\infty)$, voir par exemple Begyn (2005), Blanke et Vial (2007) ou Hayashi et Yoshida (2005).*

- *L'hypothèse $W(m, q, r)$ est classique et peu contraignante, voir la discussion ci-dessous.*

- *L'hypothèse (T) est purement technique et peut être supprimée au prix de notations plus lourdes. Supposer déterministe la durée d'observation T_n est standard. Cela n'empêche pas les temps d'inter-arrivée d'être aléatoires comme par exemple dans le cas d'un processus ponctuel. Dans les applications, que ce soit en finance lors de l'observation des cours d'une action ou en biologie lors de l'observation du rythme cardiaque d'un individu sain ou malade, on a une durée d'observation T_n déterministe (8h pour les cours de bourse, 1h ou 24h pour les battements de coeur). On peut donner dependant un exemple où T_n est aléatoire : Kammoun et al. (2007) ont étudié le rythme cardiaque de coureurs de marathon, T_n correspondant alors à la durée du marathon, qui est indubitablement aléatoire*[1].

3 Analyse en ondelette d'une trajectoire continue

Qu'appelle-t-on exactement une *"ondelette mère"*? Il y a en fait un léger abus, car nous n'avons pas besoin que la fonction ψ et ses *"filles"* engendrent $I\!L^2(I\!R)$. Nous utilisons uniquement des hypothèses $\mathrm{W}(m, q, r)$ qui sont faibles et signifient que ψ est une fonction bien localisée en temps et en fréquence avec un certain nombre de moments nuls, comme l'est par exemple une ondelette de Lemarié-Meyer. La première étape consiste à obtenir une représentation fréquentielle des coefficients:

Proposition 3.1 *Soient X un processus gaussien défini par (1) avec une densité spectrale f vérifiant (F1) et ψ une ondelette vérifiant la condition $W(0, 0, 0)$, alors pour tout $(a, b) \in I\!R_+^* \times I\!R$, le coefficient d'ondelette $d_X(a, b)$ est bien défini par (5) et admet la représentation fréquentielle*

$$d_X(a,b) = \sqrt{a} \int_{I\!R} e^{ib\xi}\, \overline{\widehat{\psi}}(a\xi)\, f^{1/2}(\xi)\, dW(\xi). \tag{7}$$

Démonstration. La démonstration résulte de l'application du Théorème de Fubini stochastique, licite grâce aux hypothèses. Elle est donnée en détail, tout comme les autres démonstrations des résultats de cet article, dans Bardet et Bertrand (2008). ■

On en déduit que, pour une échelle a fixée, le processus $\big(d_\psi(a,b)\big)_{b\in I\!R}$ est stationnaire, gaussien, centré, et a pour variance

$$\mathcal{I}_\psi(a) := \int_{I\!R} |\widehat{\psi}(x)|^2\, f(x/a)\, du.$$

[1] Un match de tennis a lui aussi une durée aléatoire, par contre un match de football a une durée à peu près déterministe.

On montre également que, pour a fixé, le processus $\big(d_\psi(a,b)\big)_{b\in\mathbb{R}}$ n'est pas à longue mémoire (alors que le processus X peut l'être). Tout estimateur de la variance de $d_\psi(a,\cdot)$ fournit alors une estimation de $\mathcal{I}_\psi(a)$.

Estimation de la variance des coefficients d'ondelette

Soit $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $N_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour une famille de décalages $b_1 < b_2 < \cdots < b_{N_n}$, on estime $\mathcal{I}_\psi(a)$ par la variance empirique

$$I_{N_n,\psi}(a) \;:=\; N_n^{-1} \sum_{k=1}^{N_n} d_\psi^2(a,b_k). \tag{8}$$

Comment choisir la famille de décalages $(b_k)_{k=1,\ldots,N_n}$?

Dans le cas d'une observation à des instants déterministes régulièrement espacés, l'usage consiste à prendre comme famille de décalages les instants d'observation, sans que jamais la question du choix ne soit posée. Nous n'avons pas réussi pour l'instant à résoudre la question du choix optimal de la famille de décalages. Pour simplifier les calculs et la présentation, nous supposons dans la suite que les décalages b_k sont régulièrement espacés. On montre dans la section suivante que l'erreur de discrétisation est contrôlée si $T_n^\rho < b_1 < \cdots < b_{N_n} < T_n - T_n^\rho$ avec $\rho \in (3/4, 1)$. Ceci conduit au choix suivant:

(B1) *On se fixe un réel $\rho \in (3/4,1)$, on note $\tau_n := T_n - 2T_n^\rho$ et on définit la famille de décalages par*

$$b_k \;:=\; T_n^\rho + \frac{k-1}{N_n-1} \times \tau_n \qquad \textit{pour } k = 1,\ldots,N_n. \tag{9}$$

Remarquons que $\tau_n = \big(b_{N_n} - b_1\big)$. La proposition suivante donne une condition suffisante pour que l'estimateur $I_{N_n,\psi}(a)$ satisfasse un TLC.

Proposition 3.2 *Soient X un processus gaussien défini par (1) avec une densité spectrale f vérifiant (F1) et (F2), ψ une ondelette vérifiant la condition $W(1,0,1/2)$ et $(b_i)_{1\le i\le N_n}$ vérifiant(9). Alors si* $\tau_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $N_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et $\tau_n/N_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\sqrt{\tau_n}\,\big(I_{N_n,\psi}(a) - \mathcal{I}_\psi(a)\big) \;\underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{D}}}\; \mathcal{N}\Big(0\,,\, 4\pi\, a^2 \int_{\mathbb{R}} \big|\widehat{\psi}(ax)\big|^4 f(x)^2\, dx\Big). \tag{10}$$

Estimation ponctuelle de la densité spectrale

Dans l'expression de $\mathcal{I}_\psi(a)$, la fonction $x \mapsto |\widehat{\psi}(x)|^2$ joue le rôle de la fenêtre spectrale et on estime $\mathcal{I}_\psi(a)$ qui est une moyenne de f au voisinage de $x = 1/a$. Pour estimer f ponctuellement, il suffit de disposer d'une suite d'ondelettes ψ_λ vérifiant $\mathrm{W}(1,1/2,0)$ telles que leurs transformées de Fourier $\widehat{\psi_\lambda}$ convergent vers la masse de Dirac en 1. On montre ainsi le lemme suivant:

Lemme 3.1 *Soit ψ une ondelette vérifiant la condition $W(1,0,1/2)$ telle que le support de sa transformée de Fourier soit inclus dans un compact $[-\Lambda,\Lambda]$ avec $\Lambda > 0$. Soit la famille $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+^*}$ telle que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $\psi_\lambda(t) = \big(1/\sqrt{\lambda}\big)\, e^{i\,t}\cdot\psi(t/\lambda)$. De plus, si la fonction f est $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage du point $1/a$, on a le développement limité quand $\lambda \to \infty$*

$$\mathcal{I}_{\psi_\lambda}(a) \;=\; \|\psi\|_{L^2}^2 \times \left[f(1/a) + f'(1/a)\cdot\frac{1}{a\lambda} + \mathcal{O}\left((\lambda)^{-2}\right)\right] \tag{11}$$

Démonstration. On a $\widehat{\psi_\lambda}(\xi) = \sqrt{\lambda}\cdot\widehat{\psi}\big(\lambda(\xi-1)\big)$ pour $\xi \in I\!R$. La première condition de W(1,0,1/2) signifie que $\widehat{\psi_\lambda}(0) = \widehat{\psi_\lambda}'(0) = 0$ et $\int_{I\!R} |t|^2|\psi_\lambda(t)|\,dt < \infty$, or $\widehat{\psi_\lambda}(0) = \sqrt{\lambda}\cdot\widehat{\psi_\lambda}(-\lambda) = 0$ et $\widehat{\psi_\lambda}'(0) = \lambda^{3/2}\cdot\widehat{\psi_\lambda}'(-\lambda) = 0$ pour $\lambda > \Lambda$, les autres conditions se vérifiant aisément. D'autre part

$$\mathcal{I}_{\psi_\lambda}(a) = \int_{I\!R} \lambda\,|\widehat{\psi}\big(\lambda(x-1)\big)|^2\, f(x/a)\,dx = \int_{I\!R} |\widehat{\psi}\big(u\big)|^2 \times f\left(\frac{1}{a} + \frac{u}{\lambda a}\right) du,$$

puis, en utilisant la formule de Taylor et la compacité du support de $\widehat{\psi}$, on en déduit (11). ■

Ainsi, pour une suite $(\lambda_n)_{n\in I\!N}$ telle que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, on définit l'estimateur ponctuel de la densité spectrale par $\widehat{f}_n(\xi) = I_{N_n,\psi_{\lambda_n}}\big(\xi^{-1}\big)/\|\psi\|^2_{L^2}$. On montre que cet estimateur converge vers $f(\xi)$ avec un biais $\lambda_n^{-1} \times \xi\, f'(\xi)$ et une variance équivalente à $\big(\lambda_N \tau_N^{-1}\big) \times \pi\, \xi^{-1} f(\xi)\, \|\widehat{\psi}\|^4_{L^4}/\|\widehat{\psi}\|^4_{L^2}$. Si le carré du biais est asymptotiquement négligeable devant la variance, on obtient le TLC suivant ainsi qu'un calcul de l'erreur quadratique intégrée (MISE):

Théorème 3.1 *Soient X un processus gaussien défini par (1) avec une densité spectrale f vérifiant (F1), (F2) et ψ une ondelette vérifiant $W(1,0,1/2)$ et $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset [-\Lambda,\Lambda]$. Pour tout réel $\alpha \in]1/3,1[$, soit*

$$\widehat{f}_n(\xi) \;:=\; \|\widehat{\psi}\|_{L^2}^{-2}\cdot\tau_n^{-\alpha}(\xi\,N_n)^{-1}\sum_{k=1}^{N_n}\left|\int_{I\!R} e^{i\xi(t-b_k)}\,\psi\left(\frac{\xi(t-b_k)}{\tau_n^\alpha}\right)\,X(t)\,dt\right|^2$$

avec la famille de décalages donnée par (9).

i) *Pour toute fréquence $\xi \in]0,\infty[$, quand $\tau_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $N_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et $\tau_n/N_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a*

$$\tau_n^{(1-\alpha)/2}\big(\widehat{f}_n(\xi) - f(\xi)\big) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}\Big(0\,,\, 4\pi\,\frac{f^2(\xi)}{\xi}\,\frac{\|\widehat{\psi}\|^4_{L^4}}{\|\widehat{\psi}\|^4_{L^2}}\Big). \tag{12}$$

ii) *Pour toute bande de fréquences finie $0 < \omega_0 < \omega_1 < \infty$, on a le développement limité du MISE:*

$$I\!E\Big[\int_{\omega_0}^{\omega_1}\big|\widehat{f}_n(\xi) - f(\xi)\big|^2\,d\xi\Big] \;=\; \frac{4\pi}{\tau_n^{(1-\alpha)}}\,\frac{\|\widehat{\psi}\|^4_{L^4}}{\|\widehat{\psi}\|^4_{L^2}}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\frac{f^2(\xi)}{\xi}\,d\xi \;+\; \tau_n^{-2\alpha}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\xi^2 f'(\xi)^2\,d\xi \;+\; \mathcal{O}\big(\tau_n^{-2+\alpha}\big).$$

Démonstration. La proposition 3.2 et le lemme 3.1 sont les deux ingrédients principaux pour obtenir ce théorème. ■

Remarque 3.1 *La proposition 3.2 permet d'estimer des paramètres de la densité spectrale dans un cadre paramétrique ou semi-paramétrique (par exemple dans le cas du mbf multi-échelle, voir Bardet et Bertrand, 2008). La vitesse de convergence est alors en $\tau_n^{-1/2}$, où $\tau_n = b_{N_n} - b_1$ correspond à l'amplitude de la famille de décalages; dans le cadre non-paramétrique du théorème 3.1, la vitesse de convergence est en $\tau_n^{-1/3-\varepsilon}$ si $\alpha = 1/3 + 2\varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$. Concernant l'estimation du MISE sur une bande finie $\big[\omega_0,\omega_1\big]$, il n'y a aucune difficulté à faire tendre la borne supérieure ω_1 vers l'infini; en revanche, on a une explosion à basse fréquence quand $\omega_0 \to 0$.*

4 Estimation de la densité spectrale pour une trajectoire observée à des instants discrets aléatoires

4.1 Autres méthodes existantes

Périodogramme empirique

L'estimation de la densité spectrale d'un processus gaussien stationnaire à partir de l'observation d'une trajectoire échantillonnée à des instants irréguliers est un vieux problème en traitement du signal, voir Lii & Masry (1994) ou Rachdi (2004) et les références qui y sont citées. Malgré la ressemblance, nous ne travaillons pas sur la même question. Tout d'abord, nous considérons des processus à accroissements stationnaires au lieu de processus stationnaires, mais ce n'est qu'un détail: dans le cas stationnaire, il suffit de remplacer la formule (1) par $X(t) = \int_{I\!R} e^{it\xi} \cdot f^{1/2}(\xi)\, dW(\xi)$. La vraie différence provient de la modélisation et des applications sous-jacentes: dans les années 1960, il s'agissait de choisir une bonne méthode d'échantillonnage afin d'estimer la densité spectrale d'un signal analogique; la perspective est aujourd'hui entièrement différente, on dispose de l'observation d'un signal à des instants digitaux aléatoires, sans aucune possibilité de les choisir.

Dans Rachdi (2004) ou Lii & Masry (1994), on choisit un échantillonnage poissonien d'intensité moyenne β connue, ainsi que la densité de sa covariance $c(u)$, formules (2.1, 2.2 et 2.3) dans Lii & Masry (1994), ces quantités sont ensuite utilisées pour définir la fonction $\gamma(u)$ dont la transformée de Fourier $\Gamma(\lambda)$ intervient dans la définition de l'estimateur de la densité spectrale (formule 2.14). Une construction différente, bien que toujours basée sur la connaissance de la constante β et de la fonction $c(u)$ est proposée dans Rachdi (2004). Cette approche paraît difficilement transposable à nos données : en admettant que les temps d'inter-arrivée soient poissonniens, il faudrait disposer d'une estimation $\widehat{\beta}$ de β et surtout d'une bonne estimation $\widehat{c}(u)$ de la fonction $c(u)$.

Variations quadratiques

Une autre méthode populaire pour l'estimation du paramètre de Hurst d'un mbf consiste en l'utilisation des variations quadratiques généralisées (voir Guyon & Leon, 1989, ou Istas & Lang, 1997). Pour $(a,b) \in I\!R_+^2$, soit $Q_X(a,b) := X(b+a) - 2X(b) + X(b-a)$; on estime alors la variation quadratique d'ordre 2 (ordre minimal requis pour notre modèle) par $V_N(a) := \sum_{k=1}^{N} Q_X(a,b_k)^2$. Le calcul élémentaire

$$\begin{aligned} Q_X(a,b) &= \int_{I\!R} e^{ib\xi} \cdot \left(e^{ia\xi} + e^{-iba\xi} - 2 \right) \cdot f^{1/2}(\xi)\, dW(\xi) \\ &= 4 \int_{I\!R} e^{ib\xi} \cdot \sin^2(a\xi/2) \cdot f^{1/2}(\xi)\, dW(\xi) \end{aligned}$$

donne une formule de représentation analogue à (7). On en déduit que le processus $\big(Q_X(a,b)\big)_{b \in I\!R}$ est stationnaire, gaussien, centré, de variance $\mathcal{V}_X(a) := 64\, a^{-1} \int_0^{\infty} \sin^4(2u)\, f(u/a)\, du$, puis que $V_N(a)$ converge vers $\mathcal{V}_X(a)$ selon un TLC analogue à (10). Mais l'expression de $\mathcal{V}_X(a)$ est telle qu'elle ne permet pas d'estimer la fonction f à toutes les fréquences (sauf éventuellement en 0 et en ∞ par un choix asymptotique de a).

4.2 Analyse par ondelette et estimation de la densité spectrale à partir d'une trajectoire observée à des instants discrets aléatoires

Pour une trajectoire obtenue à des instants discrets $(t_k)_{0\le k\le n}$, on définit un estimateur non-paramétrique de la densité spectrale en remplaçant les coefficients d'ondelette théoriques par les coefficients d'ondelette "discrétisés" selon la formule (6). On en déduit

$$\widetilde{f}_n(\xi) \;=\; \xi\,\|\widehat{\psi}\|_{L^2}^{-2}\cdot\tau_n^{-\alpha}N_n^{-1}\sum_{k=1}^{N_n}\Bigg\{\sum_{i=1}^{n}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\cos(\xi(t-b_k))\,\psi\Big(\frac{\xi(t-b_k}{\tau_n^{\alpha}}\Big)\,dt\Big]\times X(t_i)\Bigg\}^2 \qquad (13)$$

Les TLC (10) et (12) restent vrais, mais les vitesses de convergence sont plus faibles:

Théorème 4.1 *Soit X un processus gaussien défini par (1) ayant une densité spectrale f vérifiant (F1) et (F2). On suppose que ψ est une ondelette vérifiant $W(1,4,1/2)$ avec $\operatorname{supp}\widehat{\psi}\subset[-\Lambda,\Lambda]$, et X est observé selon échantillonnage vérifiant l'hypothèse (S(s)) avec $3+\big(2H-1\,,\,\frac{1}{2H}-\frac{3}{2}\big)_+\le s\le\infty$. De plus, s'il existe $\alpha\in]1/3,1[$ et*

- *si $s=\infty$, $n\,\delta_n^{2+H}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ et $\tau_n\,n^{-(1+H)/(2+H)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$,*
- *si $s<\infty$, $n\,\delta_n^{2+H-\frac{(H+1)^2}{H+s}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ et $\tau_n\,n^{-(s(H+1)+2\alpha)/(s(H+2)-1+\alpha(1-H))}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$,*

i) *Le TLC (12) est vérifié également par $\widetilde{f}_n(\xi)$;*

ii) *Pour toute bande de fréquences finie $0<\omega_0<\omega_1<\infty$, on a le développement limité du MISE:*

$$I\!E\Big[\int_{\omega_0}^{\omega_1}\big|\widehat{f}_n(\xi)-f(\xi)\big|^2\,d\xi\Big] \;=\; \frac{4\pi}{\tau_n^{(1-\alpha)}}\frac{\|\widehat{\psi}\|_{L^4}^4}{\|\widehat{\psi}\|_{L^2}^4}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\frac{f^2(\xi)}{\xi}\,d\xi\;+\;\tau_n^{-2\alpha}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\xi^2 f'(\xi)^2\,d\xi\;+\;\mathcal{O}\big(\tau_n^{-2+\alpha)}\big).$$

5 Applications numériques

Résultats de simulations pour des mouvements browniens fractionnaires

La densité spectrale d'un mouvement brownien fractionnaire de paramètres (H,σ^2) s'exprime sous la forme $f_{H,\sigma^2}(\xi)=\pi^{-1}H\,\Gamma(2H)\,\sin(\pi H)\,\sigma^2\,|\xi|^{-1-2H}$. Nous avons simulé des trajectoires de différentes longueurs de mbf pour différentes valeurs de H, avec $\sigma^2=\pi\big(H\,\Gamma(2H)\,\sin(\pi H)\big)^{-1}$, de telle manière que la densité spectrale soit $|\xi|^{-1-2H}$. Il est à noter que dans une telle simulation le choix de α s'avère crucial: si α est choisi trop proche de la valeur frontière $1/3$, l'algorithme d'estimation n'est pas stable; de même si α est trop proche de 1, l'estimateur ne converge pas assez vite et sa variance est très importante. De multiples simulations nous ont montré que plus N est grand, plus α pouvait être choisi proche de $1/3$. La Figure 1 donne un exemple d'une telle estimation pour $N=20000$, $H=0.2$ et $\alpha=0.6$.

Application aux fréquences cardiaques instantanées pendant un marathon

Les données que nous considérons ici ont été obtenues par le Laboratoire INSERM LEPHE, dirigé par la professeure V. Billat (Université d'Evry, France). Il s'agit des mesures (parmi d'autres mesures obtenues)

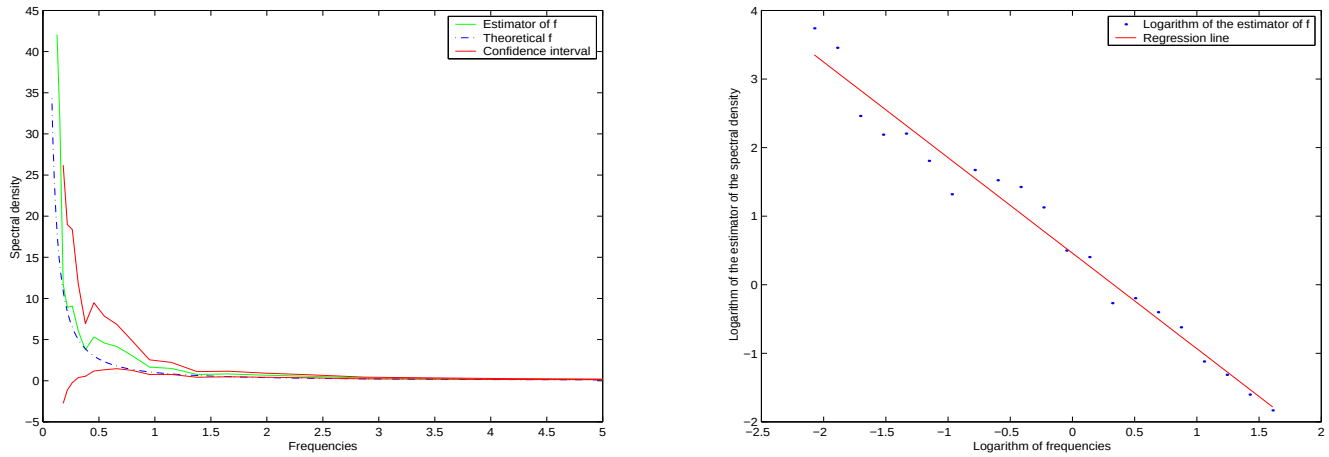


Figure 1: *Estimation de la densité spectrale (à gauche) et de son logarithme (à droite) pour une trajectoire de mbf telle que* $H = 0.2$ *et* $N = 20000$ *échantillonné suivant un pas suivant une loi exponentielle de paramètre* 1.

des durées entre deux battements de coeur de 50 marathoniens de bon niveau courant le Marathon de Paris 2004. Ces données ont également été étudiées dans Kammoun *et al.* (2007), en considérant la suite des fréquences cardiaques instantanées comme une série chronologique classique (à pas régulier). Ici, nous considérons l'évolution de la fréquence cardiaque instantanée en fonction du temps réellement écoulé (suivant un pas de temps irrégulier correspondant aux durées entre deux battements successifs). La Figure 2 présente un exemple sur un athlète (ayant donc couru ce marathon en 2h45mn12s) :

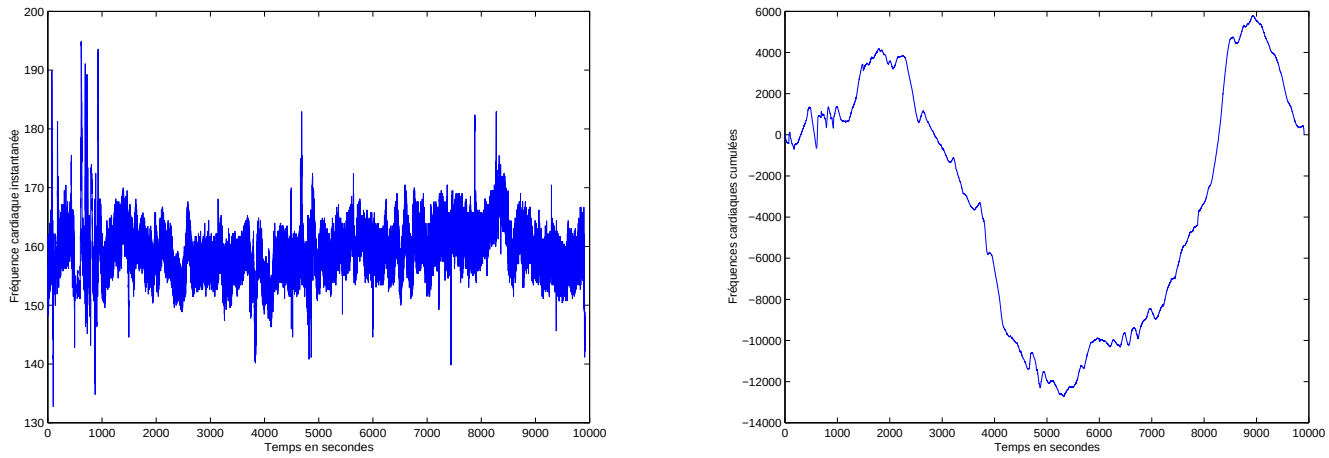


Figure 2: *Fréquences cardiaques instantanées (à gauche) et cumulées (à droite) d'un marathonien en fonction du temps de course*

Nous avons appliqué l'estimateur de la densité spectrale $\widetilde{f}_n(\xi)$ aux des fréquences cardiaques instantanées de ce coureur (fréquences cumulées qui semblent satisfaire les hypothèses du modèle de processus gaussien à

accroissements stationnaires considérées ici). Cependant, comme cela avait déjà été proposé dans Kammoun *et al.* (2007), on a préféré découper cette série en trois sous-séries (obtenues à partir d'un algorithme de détection de ruptures en moyenne et variance) représentant le début (4802 données), le milieu (19708 données) et la fin de course (2590 données) afin de tester une éventuelle évolution de l'indice d'auto-similarité du signal fréquence cardiaque en fonction de la fatigue. Notons que le pas d'échantillonnage ici suit approximativement une loi gaussienne (donc $S(s)$ est vérifié pour tout $s > 0$) de moyenne $0.376s$ et d'écart-type $0.01s$. Pour appliquer les résultats précédents, on considère la base de temps en minutes et ainsi $\delta_n \simeq 0.006mn$. La Figure 3 ci-dessous représente le logarithme de la densité spectrale en fonction du logarithme des fréquences pour la partie de fin de course.

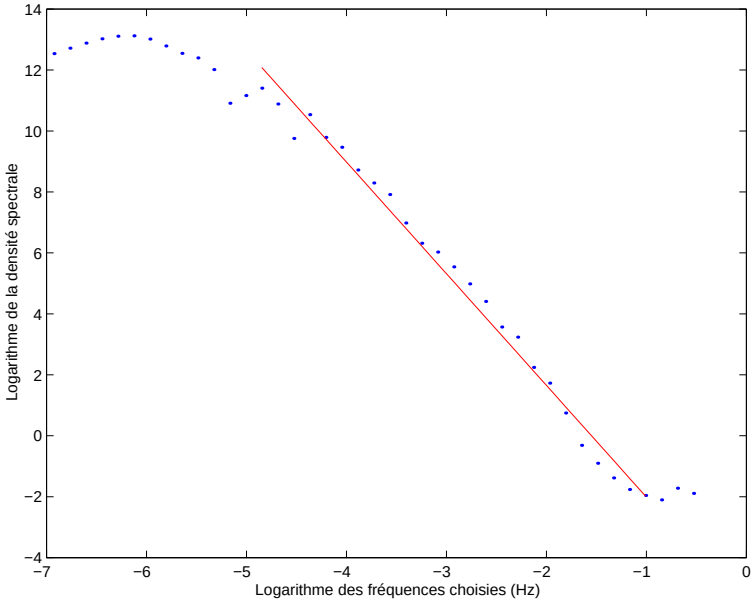


Figure 3: *Logarithme de la densité spectrale en fonction du logarithme des fréquences (fin de course)*

On retrouve dans la Figure 3 la même propriété évoquée dans Kammoun *et al.* (2007): il existe une phase de linéarité dans ce graphe. Ceci avait permis la modélisation de ces données par un mouvement brownien localement fractionnaire, qui est une généralisation du MBF (même densité spectrale dans une bande de fréquence) et le coefficient directeur de la droite fournit une estimation du paramètre de fractalité locale H. On trouve, de la même manière:

$$\widehat{H}_D \simeq 1.12 \text{ (début de course)}, \quad \widehat{H}_M \simeq 1.15 \text{ (milieu de course)} \quad \text{et} \quad \widehat{H}_D \simeq 1.38 \text{ (fin de course)}.$$

On constate une augmentation de la valeur de ce paramètre en fin de course, ce qui donne une intéressante caractérisation de l'apparition d'une fatigue du coeur (voir Kammoun *et al.*, 2007). Ce résultat devra être étayé par des études ultérieures afin par exemple d'expliquer l'augmentation depuis une décennie de l'occurence de mort subite au cours des marathons.

Remerciements : Nous tenons à remercier Mario Wschebor (Université de Montevideo) et Antoine Ayache (Université de Lille I) dont les questions et conseils ont contribué à la mise au point de l'algorithme

et Imen Kammoun(Université de Paris I) pour le pré-traitement des données. Cependant, toutes les erreurs éventuelles sont de notre seule responsabilité.

References

[1] Abry, P., Flandrin, P., Taqqu, M.S. and Veitch, D. (2002). Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens, in *Long-range Dependence: Theory and Applications*, P. Doukhan, G. Oppenheim and M.S. Taqqu editors, Birkhäuser.

[2] Aït-Sahalia and Y. & Mykland, P.A. (2008). An analysis of Hansen-Scheinkman moment estimators for discretely and randomly sampled diffusions, *Journal of Econometrics*, In Press.

[3] Bardet, J.M. and Bertrand, P. (2007), "Identification of the multiscale fractional Brownian motion with biomechanical applications", *Journal of Time Series Analysis*, 28, p. 1-52.

[4] Bardet, J.M. and Bertrand, P.R. (2008), " Wavelet Analysis along Random Sampling for Gaussian Processes". Preprint.

[5] Begyn, A. (2005). Quadratic Variations along Irregular Subdivisions for Gaussian Processes. *Electronic Journal of Probability*, 10, p-691-717.

[6] Bertrand, P. and Bardet, J.M. (2001), " Some generalization of fractional Brownian motion and Control", in *Optimal Control and Partial Differential Equations*, J.L. Menaldi, E. Rofman and A. Sulem editors, p.221-230, IOS Press .

[7] D. Blanke, and Vial, C. (2008), "Assessing the number of mean-square derivative of a Gaussian process", to appears in *Stoch. Proc. Applications*.

[8] Gao, J.; Anh, V.; Heyde, C. (2002) Statistical estimation of non-stationary Gaussian processes with long-range dependence and intermittency. *Stochastic Process. Appl.* **99**, no. 2, 295–321

[9] Guyon, X., and Leon, J.R.(1989). Convergence en loi des H-variations d'un processus gaussien fractionnaire, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 25, 265-282.

[10] Hayashi, T. and Yoshida, N. (2005). On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes. *Bernoulli*, Volume 11, Number 2, p.359-379.

[11] Istas, J. and Lang, G. (1997). Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process. *Ann. Inst. Poincaré*, 33, 407-436.

[12] Kammoun, I., Billat, V and Bardet, J.M. (2007). Comparison of DFA vs wavelet analysis for estimation of regularity of HR series during the marathon. Preprint available on `http://hal.archives-ouvertes.fr/`.

[13] Lii, K.S. and Masry, E. (1994) Spectral estimation of continuous-time stationary processes from random sampling. *Stochastic Process. Appl.* **52**, no. 1, 39–64.

[14] Rachdi, M.(2004). Strong consistency with rates of spectral estimation of continuous-time processes: from periodic and Poisson sampling schemes. *J. Nonparametr. Stat.* **16** , no. 3-4, 349–364.

[15] Samorodnitsky, G. and Taqqu M.S. (1994), *Stable non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall.

[16] Yaglom, A.M. (1958). Correlation theory of processes with stationary random increments of order n. *Trans. A.M.S.* 8, p.87-141.